


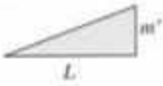
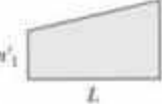
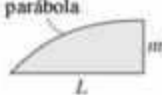


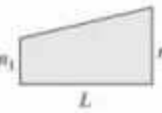

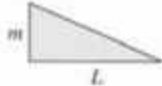


ANÁLISIS ESTRUCTURAL

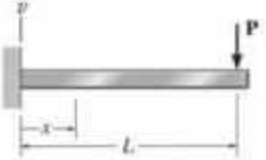
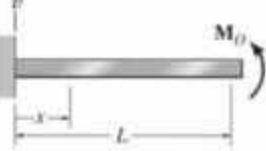
OCTAVA EDICIÓN

R. C. HIBBELER

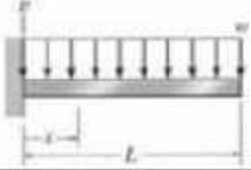
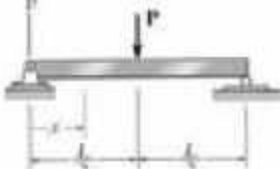
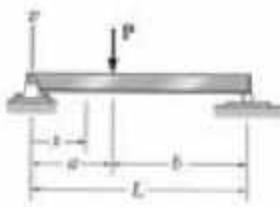
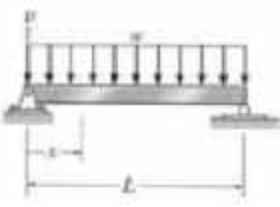
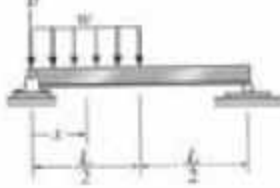
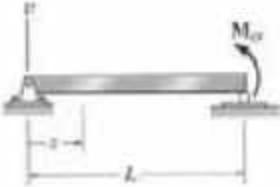
Tabla para evaluar $\int_0^L m m' dx$

$\int_0^L m m' dx$				
	$mm'L$	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{2}m(m'_1 + m'_2)L$	$\frac{2}{3}mm'L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{3}mm'L$	$\frac{1}{6}m(m'_1 + 2m'_2)L$	$\frac{5}{12}mm'L$
	$\frac{1}{2}m'(m_1 + m_2)L$	$\frac{1}{6}m'(m_1 + 2m_2)L$	$\frac{1}{6}[m'_1(2m_1 + m_2) + m'_2(m_1 + 2m_2)]L$	$\frac{1}{12}[m'(3m_1 + 5m_2)]L$
	$\frac{1}{2}mm'L$ $m_2(L + a)]$	$\frac{1}{6}mm'(L + a)$	$\frac{1}{6}m[m'_1(L + b) + m'_2(L + a)]$	$\frac{1}{12}mm'\left(3 + \frac{3a}{L} - \frac{a^2}{L^2}\right)L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'L$	$\frac{1}{6}m(2m'_1 + m'_2)L$	$\frac{1}{4}mm'L$

Deflexiones y pendientes de vigas

Carga	$v \uparrow$	$\theta \curvearrowright$	Ecuación $\uparrow + \curvearrowright$
	$v_{\text{máx}} = \frac{PL^3}{3EI}$ en $x = L$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{PL^2}{2EI}$ en $x = L$	$v = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
	$v_{\text{máx}} = \frac{M_0L^2}{2EI}$ en $x = L$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{M_0L}{EI}$ en $x = L$	$v = \frac{M_0}{2EI}x^2$

Deflexiones y pendientes de vigas (continuación)

	$v_{\max} = -\frac{wL^4}{8EI}$ <p>en $x = L$</p>	$\theta_{\max} = -\frac{wL^3}{6EI}$ <p>en $x = L$</p>	$v = -\frac{w}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
	$v_{\max} = \frac{PL^3}{48EI}$ <p>en $x = L/2$</p>	$\theta_{\max} = \pm \frac{PL^2}{16EI}$ <p>en $x = 0$ o $x = L$</p>	$v = \frac{P}{48EI} (4x^3 - 3L^2x),$ <p>$0 \leq x \leq L/2$</p>
		$\theta_L = -\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$ $\theta = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$	$v = \frac{Pbx}{6LEI} (L^2 - b^2 - x^2)$ <p>$0 \leq x \leq a$</p>
	$v_{\max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$ <p>en $x = \frac{L}{2}$</p>	$\theta_{\max} = \pm \frac{wL^3}{24EI}$	$v = -\frac{wx}{24EI} (x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
		$\theta_L = -\frac{3wL^3}{128EI}$ $\theta_R = \frac{7wL^3}{384EI}$	$v = -\frac{wx}{384EI} (16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ <p>$0 \leq x \leq L/2$</p> $v = -\frac{wL}{384EI} (8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ <p>$L/2 \leq x \leq L$</p>
	$v_{\max} = -\frac{M_O L^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_L = -\frac{M_O L}{6EI}$ $\theta_R = \frac{M_O L}{3EI}$	$v = \frac{M_O x}{6EI L} (L^2 - x^2)$

ANÁLISIS ESTRUCTURAL

ANÁLISIS ESTRUCTURAL

OCTAVA EDICIÓN

R. C. HIBBELER

TRADUCCIÓN

Jesús Elmer Murrieta Murrieta

Maestro en investigación de operaciones
Tecnológico de Monterrey Campus Morelos

REVISIÓN TÉCNICA

Gelacio Juárez Luna

Departamento de Estructuras
*Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco*

David Sepúlveda García

Departamento de Mecánica
*Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Profesional Azcapotzalco
Instituto Politécnico Nacional*

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

HIBBELER, R. C.

Análisis estructural.

Octava edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2012

ISBN: 978-607-32-1062-1

Área: Ingeniería

Formato: 20 × 25.5 cm

Páginas: 720

Authorized translation from the English language edition, entitled *STRUCTURAL ANALYSIS*, 8th Edition, by *Russell C. Hibbeler*, published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall Inc., Copyright © 2012. All rights reserved.

ISBN 9780132570534

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *STRUCTURAL ANALYSIS*, 8^a Edición por *Russell C. Hibbeler*, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Prentice Hall Inc., Copyright © 2012. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español

Dirección General:

Laura Koestinger

Dirección Educación Superior:

Mario Contreras

Editor Sponsor:

Luis M. Cruz Castillo

e-mail: luis.cruz@pearson.com

Editor de Desarrollo:

Bernardino Gutiérrez Hernández

Supervisor de Producción:

Rodrigo Romero Villalobos

Gerencia Editorial

Educación Superior Latinoamérica: Marisa de Anta

OCTAVA EDICIÓN, 2012

D.R. © 2012 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Atacomulco 500-5o. piso

Col. Industrial Atoto

53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-1062-1

ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-1063-8

ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-1064-5

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 15 14 13 12

PEARSON

A los estudiantes

Con la esperanza de que este trabajo estimule su interés por el análisis estructural y proporcione una guía aceptable hacia su comprensión.

El propósito de este libro es proporcionar al estudiante una presentación clara y completa de la teoría y la aplicación del análisis estructural en armaduras, vigas y marcos. En esta obra se hace énfasis en el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para modelar y analizar una estructura, y se proporcionan aplicaciones reales como las que pueden encontrarse en la práctica profesional.

Desde hace muchos años, los ingenieros han utilizado métodos matriciales para analizar estructuras. Aunque estos métodos son de probada eficiencia para realizar un análisis estructural, el autor opina que los estudiantes que tomen por primera vez un curso sobre este tema también deben conocer con profundidad algunos de los métodos clásicos más importantes. La práctica en la aplicación de estos métodos cimentará una comprensión más profunda de dos de las ciencias básicas de ingeniería: la estática y la mecánica de materiales. Inclusive, las habilidades para resolver problemas se desarrollan aún más cuando se consideran y aplican diversas técnicas de una manera clara y ordenada. Al resolver problemas de este modo es posible captar de una mejor manera la forma como se transmiten las cargas a través de una estructura y comprender con más exactitud la manera en que la estructura se deforma bajo una carga. Por último, los métodos clásicos brindan un medio para comprobar los resultados obtenidos al usar una computadora, en lugar de limitarse a confiar en los resultados generados.

Novedades en esta edición

- **Problemas fundamentales.** Estos conjuntos de problemas se localizan de forma selectiva justo después de los problemas de ejemplo. Ofrecen a los estudiantes aplicaciones sencillas de los conceptos y, por lo tanto, les proporcionan la oportunidad de desarrollar sus habilidades para resolver dificultades antes de tratar de solucionar alguno de los problemas típicos que se presentan más adelante; y pueden considerarse ejemplos extendidos, puesto que todos cuentan con soluciones y respuestas al final del libro. Además, son un medio excelente para estudiar antes de los exámenes generales; y también son muy útiles como preparación para el examen final ya sea del curso o para obtener su título profesional en ingeniería.
- **Revisión del contenido.** Cada sección del texto se revisó cuidadosamente para mejorar su claridad. Esto incluye la incorporación, en el capítulo 1, de las nuevas normas sobre cargas ASCE/SEI 07-10, una explicación mejorada sobre cómo trazar diagramas de cortante, diagramas de momento y la curva de deflexión de una estructura; la consolidación del material sobre estructuras que tienen un momento de inercia variable, la inclusión de un análisis más profundo de las estructuras que cuentan con articulaciones internas aplicando análisis matricial; y la adición de un nuevo Apéndice B donde se analizan algunas de las características comunes para ejecutar el software computacional más reciente sobre análisis estructural.

- **Cambios en los ejemplos.** Con el fin de ilustrar de mejor manera las aplicaciones prácticas de la teoría, en el texto se han cambiado algunos ejemplos, y con ayuda de fotografías se han aplicado técnicas de modelado y análisis de cargas sobre estructuras reales.
- **Fotografías adicionales.** La importancia de conocer el objeto de estudio se refleja en las aplicaciones al mundo real que se muestran a través de una gran cantidad de fotografías nuevas y actualizadas, junto con comentarios a lo largo del libro.
- **Problemas nuevos.** Aproximadamente 70% de los problemas de esta edición son nuevos. Con estos ejercicios se mantiene un equilibrio entre las aplicaciones fáciles, las regulares y las difíciles. Estos problemas han sido revisados tanto por el autor como por otros cuatro participantes: Scott Hendricks, Nohra Karim, Norlin Kurt y Kai Beng Yap.
- **Disposición de los problemas.** Para mayor comodidad en la asignación de tareas, los problemas se han distribuido a lo largo del texto en secciones bien definidas con problemas ilustrativos de ejemplo y un conjunto de problemas de tarea dispuestos en orden de dificultad creciente.

Organización y enfoque

El contenido de cada capítulo está organizado en secciones con temas específicos, clasificados por subtítulos. Los razonamientos relevantes sobre una teoría particular son breves pero completos. En la mayoría de los casos después de estos razonamientos se presenta una guía del “procedimiento de análisis”, la cual proporciona un resumen de los conceptos más importantes y un enfoque sistemático para la aplicación de la teoría. Los problemas de ejemplo se resuelven usando este método esquematizado con el fin de hacer más clara su aplicación numérica. Los problemas se presentan al final de cada grupo de secciones y están organizados para cubrir el material en orden secuencial. Además, para cada tema los problemas están dispuestos en orden de dificultad creciente.

Elementos importantes

- **Fotografías.** A lo largo del libro se utiliza una gran cantidad de fotografías para explicar cómo se aplican los principios del análisis estructural en situaciones del mundo real.
- **Problemas.** En la mayoría de los problemas del libro se presentan situaciones reales que puede encontrarse en la práctica. Este realismo debería estimular el interés de los estudiantes en el análisis estructural y desarrollar su habilidad para reducir los problemas de este tipo desde su descripción física hasta un modelo o representación simbólica a la cual pueda aplicarse la teoría correspondiente. En este libro hay un balance de problemas en los que se utilizan unidades del Sistema Internacional (metro-kilogramo-segundo) y del Sistema Inglés (pie-libra-segundo) con la intención de poner a prueba la habilidad del estudiante para aplicar la teoría, teniendo en cuenta que los problemas

que requieren cálculos tediosos se pueden relegar a un análisis por computadora.

- **Respuestas a problemas seleccionados.** Las respuestas a los problemas seleccionados aparecen al final del libro. Hemos tenido cuidado especial en su presentación y solución; todos han sido revisados, y sus soluciones comprobadas y verificadas una y otra vez para garantizar su claridad y precisión numérica.
- **Problemas de ejemplo.** Todos los problemas de ejemplo se presentan de manera concisa y con un estilo fácil de entender.
- **Ilustraciones.** Hemos aumentado la cantidad de figuras ilustrativas e ilustraciones reales que proporcionan una fuerte conexión con la naturaleza tridimensional de la ingeniería estructural.
- **Triple comprobación de la exactitud.** Esta edición ha pasado por una rigurosa comprobación de su exactitud y una profunda revisión de las pruebas de imprenta. Además de la revisión que realizó el autor sobre el texto y las ilustraciones, Scott Hendricks, del Instituto Politécnico de Virginia; Karim Nohra de la Universidad del Sur de Florida, y Kurt Norlin, de Laurel Technical Services, revisaron de nuevo las pruebas de imprenta y en conjunto inspeccionaron todo el Manual de soluciones para el profesor.

Contenido

Este libro está dividido en tres partes. La primera consta de siete capítulos que abarcan los métodos clásicos del análisis de estructuras estáticamente determinadas. El capítulo 1 presenta los distintos tipos de formas estructurales y cargas. El capítulo 2 analiza la determinación de fuerzas en los soportes y conexiones de vigas y marcos estáticamente determinados. El análisis de los distintos tipos de armaduras estáticamente determinadas se presenta en el capítulo 3; en tanto que las funciones y los diagramas de cortante y de momento de flexión en vigas y marcos se estudian en el capítulo 4. En el capítulo 5 veremos los sistemas simples de cable y arco, y en el capítulo 6 se estudian las líneas de influencia para vigas, tensores y armaduras. Por último, el capítulo 7 ofrece varias técnicas comunes para el análisis aproximado de estructuras estáticamente indeterminadas.

La segunda parte del libro cubre en 6 capítulos las estructuras estáticamente indeterminadas. En el capítulo 8 se analizan los métodos geométricos para el cálculo de deflexiones. En el capítulo 9 se estudian los métodos de energía para encontrar deflexiones. El capítulo 10 hace un análisis de las estructuras estáticamente indeterminadas mediante el método de la fuerza, además de un estudio de las líneas de influencia para vigas. En el capítulo 11 estudiaremos los métodos de desplazamiento que se componen del método de pendiente-deflexión, y en el capítulo 12 veremos la distribución de momentos. Por último, el capítulo 13 ofrece un panorama de las vigas y marcos de elementos no prismáticos.

La tercera parte del libro trata el análisis matricial de estructuras aplicando el método de la rigidez. Las armaduras se examinan en el capítulo 14, las vigas en el 15 y los marcos en el 16. En el apéndice A se hace un repaso del álgebra matricial, mientras que el apéndice B proporciona una guía general para el uso del software disponible para la resolución de problemas de análisis estructural.

Recursos para los profesores (en inglés)

- **Manual de soluciones para el profesor.** El autor preparó un manual de soluciones para el profesor, el cual también fue revisado como parte del programa de triple comprobación de exactitud.
- **Presentaciones en PowerPoint.** Todas las ilustraciones del libro están disponibles en diapositivas de PowerPoint y en formato JPEG. Estos archivos están disponibles en el centro de recursos para el profesor en www.pearsonenespañol.com/hibbeler. Contacte a su representante local de Pearson para obtener sus claves de acceso.
- **Soluciones en video.** Son soluciones en video con descripciones paso a paso para resolver los problemas de tarea más representativos de cada sección del libro. Utilice eficientemente las horas de clase y ofrezca a sus estudiantes los métodos completos y concisos para resolver problemas con estos videos, a los cuales pueden tener acceso en cualquier momento y estudiar a su propio ritmo. Los videos están diseñados como un recurso flexible que puede usarse cada vez que el profesor y el estudiante lo requieran. Son una herramienta muy valiosa ya que puede verlos una y otra vez para verificar su comprensión y trabajar con algún problema siguiendo los pasos del video. Este material se encuentra en www.pearsonenespañol.com/hibbeler, siguiendo los vínculos de *Structural Analysis* hasta *Video Solutions*.

Reconocimientos

Más de un centenar de mis colegas en la profesión docente y muchos de mis alumnos han hecho valiosas sugerencias muy útiles en la preparación de este libro. Por este medio me gustaría hacerles un reconocimiento por todos sus comentarios; asimismo quisiera agradecer a los revisores contratados por mi editor para esta nueva edición:

Thomas H. Miller, *Oregon State University*
Hayder A. Rasheed, *Kansas State University*
Jeffrey A. Laman, *Penn State University*
Jerry R. Bayless, *University of Missouri—Rolla*
Paolo Gardoni, *Texas A&M University*
Timothy Ross, *University of New Mexico*
F. Wayne Klaiber, *Iowa State University*
Husam S. Najm, *Rutgers University*

También fueron muy apreciables las observaciones constructivas de Kai Beng Yap y Barry Nolan, ambos ingenieros en activo. Por último, me gustaría agradecer el apoyo de mi esposa Conny, que siempre ha sido de gran ayuda en la preparación del manuscrito.

Estaré muy agradecido al lector que me envíe algún comentario o sugerencia sobre el contenido de esta edición.

Russell Charles Hibbeler
hibbeler@bellsouth.net

CRÉDITOS

Entrada del capítulo 1:	© CJ Gunther/epa/Corbis
Figura 1.6(a), página 7:	Mark Harris/Photodisc/Getty Images
Entrada del capítulo 2:	Joe Gough/Shutterstock
Entrada del capítulo 3:	© Robert Shantz/Alamy
Entrada del capítulo 4:	Ralf Broskvar/123rf
Entrada del capítulo 5:	© Greg Balfour Evans/Alamy
Entrada del capítulo 6:	© Accent Alaska.com/Alamy
Entrada del capítulo 7:	© David R. Frazier Photolibrary, Inc./Alamy
Entrada del capítulo 8:	[Fotógrafo]/Stone/Getty Images
Entrada del capítulo 9:	Alamy Images
Entrada del capítulo 10:	Shutterstock
Entrada del capítulo 11:	© 2011 Photos.com, una división de Getty Images. Derechos reservados.
Entrada del capítulo 12:	Fotosearch/SuperStock
Entrada del capítulo 13:	iStockphoto.com
Entrada del capítulo 14:	© Corbis RF/Alamy
Entrada del capítulo 15:	© Paul A. Souders/CORBIS
Entrada del capítulo 16:	© Alan Schein/Corbis
Portada 1:	zimmytws/Shutterstock
Portada 2:	Vladitto/Shutterstock

Las fotografías restantes fueron proporcionadas por el autor, R. C. Hibbeler.

CONTENIDO

1

Tipos de estructuras y cargas 3



- 1.1 Introducción 3
- 1.2 Clasificación de estructuras 4
- 1.3 Cargas 9
- 1.4 Diseño estructural 26
- Problemas 27
- Repaso del capítulo 31

2

Análisis de estructuras estáticamente determinadas 33



- 2.1 Estructura idealizada 33
- 2.2 Principio de superposición 46
- 2.3 Ecuaciones de equilibrio 47
- 2.4 Determinación y estabilidad 48
- 2.5 Aplicación de las ecuaciones de equilibrio 59
- Repaso del capítulo 68
- Problemas fundamentales 70
- Problemas 72
- Problema de proyecto 77

3

Análisis de armaduras estáticamente determinadas 79



- 3.1 Tipos comunes de armaduras 79
- 3.2 Clasificación de armaduras coplanares 85
- 3.3 El método de los nodos 94
- 3.4 Elementos de fuerza cero 98

- 3.5 El método de las secciones 104
- 3.6 Armaduras compuestas 110
- 3.7 Armaduras complejas 116
- 3.8 Armaduras espaciales 120
- Problemas 127

Repaso del capítulo 130

4

Cargas internas desarrolladas en elementos estructurales 133



- 4.1 Cargas internas en un punto específico 133
- 4.2 Funciones de fuerza cortante y de momento 139
- 4.3 Diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga 150
- 4.4 Diagramas de fuerza cortante y de momento para un marco 163
- 4.5 Diagramas de momento contruados por el método de superposición 168
- Problemas 173

Repaso del capítulo 178

5

Cables y arcos 181



- 5.1 Cables 181
- 5.2 Cable sometido a cargas concentradas 182
- 5.3 Cable sometido a una carga uniformemente distribuida 184
- 5.4 Arcos 194
- 5.5 Arco de tres articulaciones 195
- Problemas 201

Repaso del capítulo 203

6**Líneas de influencia para estructuras estáticamente determinadas 205**

- 6.1 Líneas de influencia 205
- 6.2 Líneas de influencia para vigas 213
- 6.3 Líneas de influencia cualitativa 216
- 6.4 Líneas de influencia para vigas de piso 228
- 6.5 Líneas de influencia para armaduras 232
- 6.6 Influencia máxima en un punto debido a una serie de cargas concentradas 240
- 6.7 Fuerza cortante y momento máximo absoluto 250
Problemas 255
Repaso del capítulo 260

7**Análisis aproximado de estructuras estáticamente indeterminadas 263**

- 7.1 Uso de métodos aproximados 263
- 7.2 Armaduras 264
- 7.3 Cargas verticales sobre marcos de construcción 270
- 7.4 Marcos y armaduras de portal 273
- 7.5 Cargas laterales en marcos de construcción: Método del portal 282
- 7.6 Cargas laterales sobre marcos de construcción: Método del voladizo 288
Problemas 294
Repaso del capítulo 296

8**Deflexiones 299**

- 8.1 Diagramas de deflexión y la curva elástica 299
- 8.2 Teoría de la viga elástica 305
- 8.3 El método de integración doble 307
- 8.4 Teoremas del momento de área 316
- 8.5 Método de la viga conjugada 326
Problemas 335
Repaso del capítulo 338

9**Deflexiones empleando métodos de energía 341**

- 9.1 Trabajo externo y energía de deformación 341
- 9.2 Principio del trabajo y la energía 345
- 9.3 Principio del trabajo virtual 346
- 9.4 Método del trabajo virtual: Armaduras 348
- 9.5 Teorema de Castigliano 355
- 9.6 Teorema de Castigliano para armaduras 356
- 9.7 Método del trabajo virtual: Vigas y marcos 364
- 9.8 Energía de deformación virtual causada por carga axial, fuerza cortante, torsión y temperatura 375
- 9.9 Teorema de Castigliano para vigas y marcos 381
Problemas 388
Repaso del capítulo 392

10

Análisis de estructuras estáticamente indeterminadas por el método de la fuerza 395



- 10.1 Estructuras estáticamente indeterminadas 395
- 10.2 Método de análisis de la fuerza: Procedimiento general 398
- 10.3 Teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos; Ley de Betti 402
- 10.4 Método de análisis de la fuerza: Vigas 403
- 10.5 Método de análisis de la fuerza: Marcos 411
- 10.6 Método de análisis de la fuerza: Armaduras 422
- 10.7 Estructuras compuestas 425
- 10.8 Comentarios adicionales sobre el método de análisis de la fuerza 428
- 10.9 Estructuras simétricas 429
- 10.10 Líneas de influencia para vigas estáticamente indeterminadas 435
- 10.11 Líneas de influencia cualitativas para marcos 439
Problemas 446
Repaso del capítulo 448

11

Método de análisis del desplazamiento: Ecuaciones de pendiente-deflexión 451



- 11.1 Método de análisis del desplazamiento: Procedimientos generales 451
- 11.2 Ecuaciones de pendiente-deflexión 453
- 11.3 Análisis de vigas 459
- 11.4 Análisis de marcos: Sin ladeo 469
- 11.5 Análisis de marcos: Con ladeo 474
Problemas 482
Repaso del capítulo 485

12

Método de análisis del desplazamiento: distribución de momentos 487



- 12.1 Principios generales y definiciones 487
- 12.2 Distribución de momentos para vigas 490
- 12.3 Modificaciones al factor de rigidez 500
- 12.4 Distribución de momentos para marcos: Sin ladeo 508
- 12.5 Distribución de momentos para marcos: Con ladeo 510
Problemas 518
Repaso del capítulo 521

13

Vigas y marcos con elementos no prismáticos 523



- 13.1 Propiedades de carga de los elementos no prismáticos 523
- 13.2 Distribución de momentos para estructuras con elementos no prismáticos 528
- 13.3 Ecuaciones de pendiente-deflexión para elementos no prismáticos 534
Problemas 536
Repaso del capítulo 537

14

Análisis de armaduras utilizando el método de la rigidez 539



- 14.1 Fundamentos del método de la rigidez 539
- 14.2 Matriz de rigidez del elemento 542
- 14.3 Matrices de transformación de fuerza y desplazamiento 543
- 14.4 Matriz de rigidez global del elemento 546
- 14.5 Matriz de rigidez de la armadura 547
- 14.6 Aplicación del método de la rigidez para el análisis de armaduras 552
- 14.7 Coordenadas nodales 560
- 14.8 Armaduras con cambios térmicos y errores de fabricación 564
- 14.9 Análisis de armaduras espaciales 570
- Repaso del capítulo 571
- Problemas 572

15

Análisis de vigas utilizando el método de la rigidez 575



- 15.1 Comentarios preliminares 575
- 15.2 Matriz de rigidez de la viga-elemento 577
- 15.3 Matriz de rigidez de la viga-estructura 579

- 15.4 Aplicación del método de la rigidez al análisis de vigas 579
- Problemas 592

16

Análisis de marcos planos utilizando el método de la rigidez 595



- 16.1 Matriz de rigidez del marco-elemento 595
- 16.2 Matrices de transformación del desplazamiento y de las fuerzas 597
- 16.3 Matriz de rigidez global del marco-elemento 599
- 16.4 Aplicación del método de la rigidez para el análisis de marcos 600
- Problemas 609

Apéndices

- A. Álgebra matricial para el análisis estructural 612
- B. Procedimiento general para usar el software de análisis estructural 625
- Soluciones parciales y respuestas a los problemas fundamentales 628
- Respuestas a problemas seleccionados 665
- Índice 685

ANÁLISIS ESTRUCTURAL



La estructura (el contraventeo) con patrón de diamante (refuerzo cruzado) instalada en estos edificios de gran altura se utiliza para resistir las cargas debidas al viento.

Tipos de estructuras y cargas

Este capítulo contiene un estudio de algunos de los aspectos preliminares del análisis estructural. Primero se presentan las fases necesarias para construir una estructura, después se hace una introducción a los tipos básicos de estructuras, sus componentes y soportes, y por último, se proporciona una explicación breve de los distintos tipos de cargas que deben considerarse para un análisis y diseño apropiados.

1.1 Introducción

Una *estructura* se refiere a un sistema de partes conectadas que se utiliza para soportar una carga. Entre los ejemplos más importantes relacionados con la ingeniería civil están los edificios, los puentes y las torres; en otras ramas de la ingeniería puede decirse que son importantes las estructuras de barcos y aviones, los tanques, los recipientes a presión, los sistemas mecánicos, y las estructuras de soporte de líneas eléctricas también son importantes.

Cuando se diseña una estructura para que desempeñe una función específica para el uso público, el ingeniero debe considerar su seguridad, estética y facilidad de mantenimiento, y a la vez tener presentes las limitantes económicas y ambientales. A menudo esto requiere varios estudios independientes sobre las diferentes soluciones posibles antes de tomar una determinación final sobre cuál es la forma estructural más adecuada. Este proceso de diseño es tanto creativo como técnico y requiere un conocimiento fundamental de las propiedades de los materiales y de las leyes de la mecánica que rigen la respuesta de los materiales. Una vez propuesto el diseño preliminar de una estructura, ésta debe *analizarse* para asegurar que tiene la rigidez y la fuerza necesarias. Para analizar adecuadamente una estructura deben hacerse algunas idealizaciones sobre cómo se conectan y apoyan los elementos entre sí. Las cargas se determinan a partir de códigos y especificaciones locales, mientras que las fuerzas en los elementos y sus desplazamientos se encuentran aplicando la teoría del análisis estructural, que es el objeto de estudio de este texto. Los resultados de este análisis pueden emplearse para rediseñar la estructura, lo que implica una determinación más precisa del peso

y el tamaño de los elementos. Por lo tanto, el diseño estructural proviene de una serie de aproximaciones sucesivas en las que cada ciclo requiere un análisis estructural. En este libro, el análisis estructural se aplica a estructuras vinculadas con la ingeniería civil; sin embargo, el método de análisis descrito también puede seguirse en el caso de estructuras relacionadas con otros campos de la ingeniería.

1.2 Clasificación de estructuras

Para un ingeniero estructural es importante reconocer los distintos tipos de elementos que componen una estructura, y ser capaz de clasificar las estructuras de acuerdo con su forma y función. En este punto se presentarán algunos de los aspectos mencionados y posteriormente, en el momento adecuado a lo largo del texto, se profundizará en ellos.

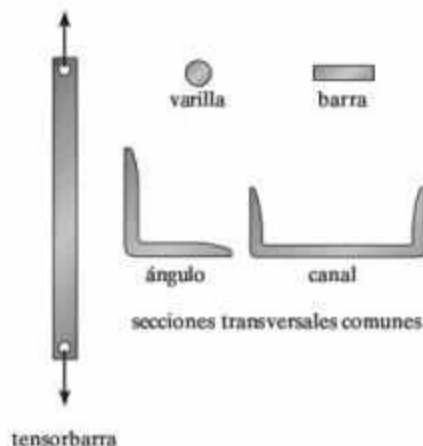


Figura 1-1



Figura 1-2

Elementos estructurales. Algunos de los elementos más comunes de los cuales están compuestas las estructuras son los siguientes.

Tensores. Los elementos estructurales sometidos a una *fuerza de tensión* suelen denominarse *tensores* o *puntales*. Debido a la naturaleza de la carga descrita, estos elementos tienden a ser delgados y suelen elegirse a partir de varillas, barras, ángulos o canales, figura 1-1.

Vigas. Por lo general, las vigas son elementos rectos horizontales que se usan principalmente para soportar cargas verticales. Con frecuencia se clasifican según la forma en que están apoyadas, como se indica en la figura 1-2. En particular, cuando la sección transversal de la viga varía, ésta se conoce como viga afilada o estrechada. Las secciones transversales de las vigas también pueden “construirse” añadiendo placas en sus partes superior e inferior.

Las vigas se diseñan en principio para resistir momentos de flexión; sin embargo, si una viga es corta y soporta grandes cargas, la fuerza cortante interna puede llegar a ser bastante grande y regir el diseño de la viga. Cuando el material utilizado para una viga es un metal como el acero o el aluminio, la sección transversal resulta más eficiente si tiene la forma que se muestra en la figura 1-3. Aquí, las fuerzas desarrolladas en las *alas* (patines) superior e inferior de la viga forman el par necesario que se usa para resistir el momento M aplicado, mientras que el *alma* es eficiente al resistir la fuerza cortante V aplicada. Esta sección transversal se conoce comúnmente como “ala ancha”, I o H, y suele formarse como una sola unidad en una laminadora con longitudes de hasta 75 pies (23 m). Si se requieren longitudes más cortas se puede seleccionar una sección cónica con alas ahusadas (o patines estrechados). Si es necesario que la viga tenga un claro muy amplio y las cargas aplicadas son bastante grandes, la sección transversal puede tomar la forma de una *trabe armada*. Este elemento se fabrica utilizando una placa grande para el alma, a la cual para formar las alas se le sueldan o fijan con pernos placas en los extremos. La trabe suele transportarse al campo en segmentos y éstos se diseñan para empalmarse o unirse entre sí en los puntos donde la trabe



Figura 1-3



Estas traveses de concreto prefabricado están simplemente apoyadas y se emplean en un puente carretero.

soporta un momento interno pequeño. (Vea la fotografía en la parte inferior de esta página).

Por lo general, las vigas de concreto tienen secciones transversales rectangulares porque esta forma es fácil de construir directamente en el campo. Como el concreto es bastante débil en cuanto a su resistencia a la tensión, se colocan varillas de acero de refuerzo dentro de la viga en las regiones de la sección transversal sometidas a tensión. Del mismo modo, las vigas o traveses de concreto prefabricadas pueden construirse en un taller o fábrica para después ser transportadas al lugar de trabajo.

Las vigas de madera pueden obtenerse de una pieza sólida de madera o laminarse. Las vigas *laminadas* se construyen con secciones sólidas de madera unidas entre sí mediante adhesivos de alta resistencia.



En esta fotografía se muestran las juntas de placas empalmadas que se usan comúnmente para conectar las vigas de acero en un puente carretero.



El acero de refuerzo que se observa a derecha e izquierda se utiliza para resistir cualquier tensión que pudiera originarse en las vigas de concreto que se formarán a su alrededor.



Los elementos de ala ancha suelen usarse como columnas. La fotografía presenta un ejemplo de una columna de viga (a flexocompresión).

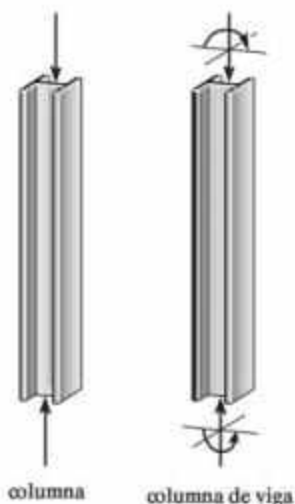


Figura 1-4

Columnas. Los elementos que generalmente son verticales y resisten cargas de compresión axial se conocen como *columnas*, figura 1-4. Las secciones transversales tubulares y de ala ancha se suelen utilizar para columnas de metal, y las secciones transversales circulares y cuadradas, con varillas de refuerzo, se utilizan para las columnas de concreto. En ocasiones, las columnas están sujetas simultáneamente a una carga axial y a un momento de flexión, como se muestra en la figura 1-4. Estos elementos se denominan *columnas de viga*.

Tipos de estructuras. La combinación de los elementos estructurales y los materiales de que están hechos se conoce como *sistema estructural*. Cada sistema está construido con uno o más de los cuatro tipos básicos de estructuras. Si se clasifican por la complejidad de su análisis de fuerzas, los tipos básicos de estructuras son los siguientes.

Armaduras. Cuando se requiere que el claro de una estructura sea grande y su profundidad, o peralte, no es un criterio importante para el diseño, se puede elegir una armadura. Las *armaduras* consisten en elementos delgados, por lo general colocados en forma triangular. Las *armaduras planas* se componen de elementos ubicados en el mismo plano y se utilizan para el soporte de puentes y techos, en tanto que las *armaduras espaciales* tienen elementos que se extienden en tres dimensiones y son adecuadas para grúas y torres.

Debido a la disposición geométrica de sus elementos, las cargas que hacen que toda la armadura se deforme se convierten en fuerzas de tensión o compresión en los elementos. En consecuencia, una de las principales ventajas de una armadura en comparación con una viga es que utiliza menos material para soportar una carga determinada, figura 1-5. Además, una armadura se construye a partir de *elementos largos y delgados*, que pueden colocarse de varias maneras para soportar una carga. La



Figura 1-5

Las cargas provocan la flexión de una armadura, la cual desarrolla compresión en sus elementos superiores y tensión en los inferiores.

mayoría de las veces resulta económicamente factible usar una armadura para cubrir claros que van desde 30 pies (9 metros) hasta 400 pies (122 m), aunque en ocasiones se han empleado armaduras para cubrir claros de mayor longitud.

Cables y arcos. Otras dos formas de estructura que se usan para cubrir distancias largas son el cable y el arco. Por lo general, los *cables* son flexibles, soportan cargas en tensión y se utilizan como soporte en puentes, figura 1-6a, y en techos de edificios. Cuando se usa para estos fines, el cable tiene una ventaja sobre la viga y la armadura, en particular para claros mayores a 150 pies (46 metros). Dado que los cables siempre están en tensión, no se volverán inestables ni se colapsarán de manera súbita como puede suceder con las vigas o las armaduras. Además, la armadura requeriría costos adicionales para su construcción y un peralte mayor conforme aumente el claro. Por otro lado, el uso de cables sólo está limitado por su colgamiento, su peso y los métodos de anclaje que se empleen.

El *arco* logra su resistencia en compresión, puesto que tiene una curvatura inversa a la del cable. Sin embargo, el arco debe ser rígido a fin de mantener su forma, lo que se traduce en cargas secundarias que involucran fuerzas cortantes y de momento, que deben considerarse en su diseño. Los arcos se usan en estructuras para puentes, figura 1-6b, techos de cúpula y aberturas en muros de mampostería



Los cables soportan sus cargas en tensión.
(a)



Los arcos soportan sus cargas en compresión.
(b)

Figura 1-6

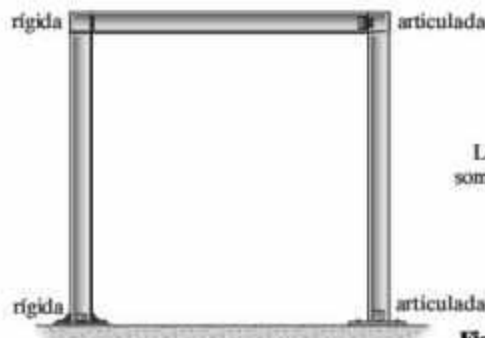


Figura 1-7

Marcos. Los marcos se suelen usar en edificios y están compuestos por vigas y columnas conectadas rígidamente o mediante articulaciones, figura 1-7. Al igual que las vigas, los marcos se extienden en dos o tres dimensiones. La carga en un marco ocasiona flexión de sus elementos; y si tiene conexiones de unión rígidas, por lo general esta estructura es “indeterminada” desde el punto de vista analítico. La resistencia de un marco de este tipo se deriva de las interacciones de momento entre las vigas y las columnas en las uniones rígidas.

Estructuras superficiales. Una *estructura superficial* está hecha de un material que tiene un espesor muy pequeño en comparación con sus otras dimensiones. Se les llama *tenso estructuras* cuando el material es muy flexible y puede tomar la forma de una tienda de campaña o una estructura inflada con aire. En ambos casos, el material actúa como una membrana que se somete a tensión pura.

Las estructuras superficiales también pueden estar hechas de un material rígido como el concreto reforzado. En tales casos pueden tener la forma de placas plegadas, cilindros o paraboloides hiperbólicos, y reciben el nombre de *placas delgadas* o *cascarones*. Estas estructuras actúan como cables o arcos, puesto que soportan cargas sobre todo en tensión o compresión, y experimentan muy poca flexión. No obstante, las estructuras de placa o cascarón suelen ser muy difíciles de analizar, debido a la geometría tridimensional de su superficie. Un análisis de este tipo se encuentra fuera del alcance del presente texto; sin embargo, existen libros dedicados por completo a ese tema.



La fotografía muestra un ejemplo de marco de acero que se usa para sostener el riel de una grúa. Se supone que el marco está unido rígidamente en sus juntas superiores y articulado en los apoyos.



El techo del “Domo de Georgia” en Atlanta, Georgia, puede considerarse como una membrana delgada.

1.3 Cargas

Una vez que se han definido los requisitos dimensionales para una estructura, es necesario determinar las cargas que debe soportar la estructura. La anticipación de las diferentes cargas que se impondrán a una estructura suele proporcionar el tipo básico de estructura que se elegirá para el diseño. Por ejemplo, las estructuras muy altas deben soportar grandes fuerzas laterales causadas por el viento, y entonces se seleccionan paredes para cortante y sistemas de marco tubular, en tanto que los edificios ubicados en zonas propensas a terremotos deben diseñarse con marcos y conexiones flexibles.

Una vez determinada la forma estructural, el diseño real comienza con los elementos que están sujetos a las cargas primarias que debe soportar la estructura y procede en orden secuencial a los distintos elementos de apoyo hasta alcanzar el cimiento o base. Por lo tanto, en un edificio primero se diseñaría la losa de cada piso, después las vigas de soporte, las columnas y, por último, los cimientos. De modo que para diseñar una estructura es necesario especificar primero las cargas que actúan en ella.

La carga de diseño de una estructura suele estar especificada en códigos. En general, el ingeniero estructuralista trabaja con dos tipos de códigos: los códigos generales de construcción y los códigos de diseño. Los *códigos generales de construcción* especifican los requisitos de los organismos gubernamentales para las cargas mínimas de diseño en las estructuras y las normas mínimas para la construcción. Los *códigos de diseño* proporcionan normas técnicas detalladas y se utilizan para establecer los requisitos en el diseño real de estructuras. En la tabla 1-1 se enuncian algunos de los códigos más importantes que se aplican en la práctica. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que los códigos proporcionan sólo una guía general para el diseño. *La responsabilidad definitiva del diseño recae en el ingeniero estructuralista.*

TABLA 1-1 Códigos

Códigos de construcción generales (en Estados Unidos)

Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures,
ASCE/SEI 7-10 (Cargas de diseño mínimas para edificios y otras
estructuras, ASCE/SEI 7-10), American Society of Civil Engineers.
International Building Code (Código internacional de construcción).

Códigos de Diseño

Building Code Requirements for Reinforced Concrete (Códigos de requerimientos de construcción para concreto reforzado), Am. Conc. Inst. (ACI).
Manual of Steel Construction (Manual de construcción en acero), American Institute of Steel Construction (AISC).
Standard Specifications for Highway Bridges (Especificaciones estándar para puentes carreteros), American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO).
National Design Specifications for Wood Construction (Especificación nacional de diseño para la construcción en madera), American Forest and Paper Association (AFPA).
Manual for Railway Engineering (Manual de ingeniería ferroviaria), American Railway Engineering Association (AREA).

Dado que por lo común una estructura está sometida a varios tipos de cargas, a continuación se presentará un breve análisis de estas cargas para ilustrar la manera en que deben considerarse sus efectos en la práctica.

Cargas muertas. Las *cargas muertas* son los pesos de los diversos elementos estructurales y los pesos de todos los objetos que están unidos de manera permanente a la estructura. Por lo tanto, las cargas muertas de un edificio son el peso de las columnas, vigas y trabes, la losa del piso, el techo, paredes, ventanas, fontanería, instalaciones eléctricas y otros accesorios diversos.

En algunos casos, una carga muerta estructural puede estimarse de manera satisfactoria a partir de fórmulas sencillas basadas en los pesos y tamaños de estructuras similares. A través de la experiencia también es posible obtener una “apreciación” de la magnitud de estas cargas. Por ejemplo, el peso medio de los edificios de madera es de 40 a 50 lb/pie² (1.9 a 2.4 kN/m²), para los edificios con estructura de acero es de 60 a 75 lb/pie² (2.9 a 3.6 kN/m²), y para los edificios de concreto reforzado es de 110 a 130 lb/pie² (5.3 a 6.2 kN/m²). Sin embargo, una vez que se han determinado los materiales y los tamaños de los componentes de la estructura, se pueden encontrar sus pesos a partir de tablas que muestran sus densidades.

En la tabla 1-2 se enuncian las densidades de los materiales que se suelen usar en la construcción, y en la tabla 1-3 puede observarse una parte

TABLA 1-2 Densidades mínimas para cargas de diseño de distintos materiales*

	lb/pie ³	kN/m ³
Aluminio	170	26.7
Concreto, concreto simple	108	17.0
Concreto, piedra simple	144	22.6
Concreto, concreto reforzado	111	17.4
Concreto, piedra reforzada	150	23.6
Arcilla, seca	63	9.9
Arcilla, húmeda	110	17.3
Arena y grava, seca, suelta	100	15.7
Arena y grava, húmeda	120	18.9
Mampostería, concreto sólido ligero	105	16.5
Mampostería, peso normal	135	21.2
Madera contrachapada	36	5.7
Acero, estirado en frío	492	77.3
Madera, abeto Douglas	34	5.3
Madera, pino del sur	37	5.8
Madera, pino abeto	29	4.5

*Reproducido con permiso de la American Society of Civil Engineers, *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures* ASCE/SEI 7-10 (Cargas de diseño mínimas para edificios y otras Estructuras ASCE/SEI 7-10). Para adquirir copias de este estándar de ASCE acceda al sitio www.pubs.asce.org.

TABLA 1-3 Cargas muertas mínimas de diseño*

<i>Muros</i>	psf	kN/m ²
ladrillo de arcilla, 4 pulg (102 mm)	39	1.87
ladrillo de arcilla, 8 pulg (203 mm)	79	3.78
ladrillo de arcilla, 12 pulg (305 mm)	115	5.51
<i>Particiones y muros de marco</i>		
Muros de entramado exterior con revestimiento de ladrillo	48	2.30
Ventanas, vidrio, marco y hoja	8	0.38
Entramados de madera de 2 × 4 pulg (51 × 102 mm) sin enyesar	4	0.19
Entramados de madera de 2 × 4 pulg (51 × 102 mm) enyesados de un lado	12	0.57
Entramados de madera de 2 × 4 pulg (51 × 102 mm) enyesados por los dos lados	20	0.96
<i>Relleno de piso</i>		
Concreto de cemento, por pulgada (mm)	9	0.017
Concreto ligero, simple, por pulgada (mm)	8	0.015
Concreto de piedra, por pulgada (mm)	12	0.023
<i>Techos</i>		
Lámina de fibra acústica	1	0.05
Yeso sobre mosaico o concreto	5	0.24
Malla de metal suspendida y yeso revocado	10	0.48
Tejas de asfalto	2	0.10
Lámina de fibra, $\frac{1}{2}$ pulg (13 mm)	0.75	0.04

*Reproducido con permiso de la American Society of Civil Engineers, *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*, ASCE/SEI 7-10 (Cargas de diseño mínimas para edificios y otras estructuras, ASCE/SEI 7-10).

del listado del peso de los componentes de construcción más comunes. Aunque el cálculo de las cargas muertas con base en el uso de datos tabulados es bastante sencillo, debe tenerse en cuenta que en muchos aspectos estas cargas deben estimarse en la fase inicial del diseño. Estas estimaciones incluyen materiales no estructurales como los paneles de fachada prefabricados, los sistemas eléctricos y de fontanería, etcétera. Incluso si el material está especificado, los pesos unitarios de los elementos reportados en los códigos pueden variar respecto de los datos del fabricante, y el uso posterior del edificio puede incluir algunos cambios en la carga muerta. En consecuencia, las estimaciones de las cargas muertas pueden tener un error de 15 a 20% o más.

Normalmente la carga muerta no es muy grande en comparación con la carga de diseño en estructuras simples, como una viga o un marco de una sola planta; sin embargo, para edificios con varios pisos, es importante considerar todas las cargas muertas a fin de diseñar correctamente las columnas, en especial para los pisos inferiores.

EJEMPLO 1.1

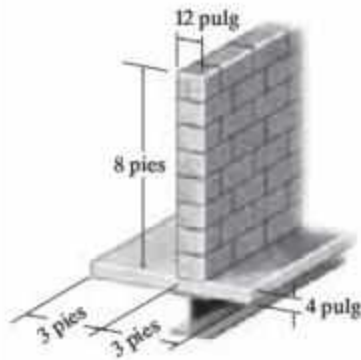


Figura 1-8

La viga de piso que se muestra en la figura 1-8 se utiliza para soportar una losa de concreto ligero simple con 6 pies de ancho y un espesor de 4 pulg. La losa sirve como una parte del techo de la planta de abajo, por lo que su parte inferior está cubierta con yeso. Además, un muro de tabiques de concreto ligero sólido de 8 pies de altura y 12 pulg de espesor, se encuentra directamente sobre el ala superior de la viga. Determine la carga en la viga medida por cada pie de longitud de la viga.

SOLUCIÓN

Usando los datos de las tablas 1-2 y 1-3, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \text{Losa de concreto:} & \quad [8 \text{ lb/}(\text{pie}^2 \cdot \text{pulg})](4 \text{ pulg})(6 \text{ pies}) = 192 \text{ lb/pie} \\
 \text{Yeso del techo:} & \quad (5 \text{ lb/pie}^2)(6 \text{ pies}) = 30 \text{ lb/pie} \\
 \text{Muro de tabiques:} & \quad (105 \text{ lb/pie}^3)(8 \text{ pies})(1 \text{ pie}) = 840 \text{ lb/pie} \\
 \text{Carga total} & \quad 1062 \text{ lb/pie} = 1.06 \text{ k/pie}
 \end{aligned}$$

Resp.

Aquí la unidad k significa "kip", que simboliza kilolibras. Por lo tanto, $1 \text{ k} = 1000 \text{ lb}$.



La carga viva sobre el piso de este salón de clases consiste en los escritorios, las sillas y el equipo de laboratorio. Para el diseño, la Norma ASCE 7-10 especifica una carga de 40 psf o 1.92 kN/m².

Cargas vivas. Las *cargas vivas* pueden variar tanto en su magnitud como en su ubicación. Las puede causar el peso de objetos colocados provisionalmente sobre una estructura, vehículos en movimiento o fuerzas naturales. Las cargas vivas mínimas especificadas en los códigos se determinan con base en el estudio de la historia de sus efectos sobre estructuras existentes. Por lo general estas cargas incluyen una protección adicional contra una deformación excesiva o sobrecarga repentina. En el capítulo 6 se desarrollarán técnicas para especificar la ubicación adecuada de las cargas vivas sobre la estructura, de forma que causen el mayor esfuerzo o deflexión de los elementos. A continuación se analizarán los distintos tipos de cargas vivas.

Cargas en edificios. Se supone que los pisos de los edificios están sometidos a *cargas vivas uniformes* que dependerán de la finalidad para la cual se diseñó el edificio. Por lo general estas cargas se encuentran tabuladas en los códigos locales, estatales o nacionales. En la tabla 1-4 se presenta una muestra representativa de *cargas vivas mínimas*, las cuales se tomaron de la Norma ASCE 7-10. Los valores se determinan a partir de datos históricos de las cargas aplicadas a distintos edificios. Las cargas mínimas incluyen algún tipo de protección contra la posibilidad de sobrecarga debido a situaciones de emergencia, cargas de construcción y los requisitos de utilidad debido a la vibración. Además de las cargas uniformes, algunos códigos especifican *cargas vivas concentradas mínimas*, ocasionadas por carros manuales, automóviles, etcétera, que también deben aplicarse en cualquier punto del sistema del piso. Por ejemplo, en el diseño de un estacionamiento para automóviles se deben considerar tanto las cargas vivas uniformes como las concentradas.

TABLA 1-4 Cargas vivas mínimas*

Ocupación o uso	Carga viva		Ocupación o uso	Carga viva	
	psf	kN/m ²		psf	kN/m ²
Zonas de reunión y teatros			Residencial		
Asientos fijos	60	2.87	Viviendas (de una y dos familias)	40	1.92
Asientos móviles	100	4.79	Hoteles y casas multifamiliares		
Estacionamientos (vehículos de pasajeros solamente)	50	2.40	Habitaciones privadas y pasillos	40	1.92
Edificios de oficinas			Salas públicas y pasillos	100	4.79
Vestíbulos	100	4.79	Escuelas		
Oficinas	50	2.40	Salones de clase	40	1.92
Almacén			Pasillos por encima de la primera planta	80	3.83
Ligero	125	6.00			
Pesado	250	11.97			

*Reproducido con permiso de *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*, ASCE/SEI 7-10 (Cargas de diseño mínimas para edificios y otras estructuras, ASCE/SEI 7-10).

Para algunos tipos de edificios que tienen pisos con áreas muy grandes muchos códigos permitirán una *reducción* de la carga viva uniforme para el *piso*, puesto que es poco probable que la carga viva prescrita ocurra simultáneamente en toda la estructura en algún momento. Por ejemplo, ASCE 7-10 permite una reducción de la carga viva sobre un elemento que tenga un *área de influencia* ($K_{LL} A_T$) de 400 pies² (37.2 m²) o más. Esta carga viva reducida se calcula empleando la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 L &= L_o \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{K_{LL} A_T}} \right) \quad (\text{Unidades PLS}) \\
 L &= L_o \left(0.25 + \frac{4.57}{\sqrt{K_{LL} A_T}} \right) \quad (\text{Unidades SI})
 \end{aligned}
 \tag{1-1}$$

donde

L = carga viva de diseño reducida por pie cuadrado o metro cuadrado de área sostenida por el elemento.

L_o = carga viva de diseño sin reducir por pie cuadrado o metro cuadrado de área sostenida por el elemento (vea la tabla 1-4).

K_{LL} = factor de la carga viva del elemento. Para columnas interiores, $K_{LL} = 4$.

A_T = área tributaria en pies cuadrados o metros cuadrados.*

La carga viva reducida definida mediante la ecuación 1-1 se limita a no menos del 50% de L_o para elementos que sostienen un piso, o no menos del 40% de L_o para elementos que soportan más de un piso. No se permite la reducción para cargas que excedan 100 lb/pie² (4.79 kN/m²), o para estructuras que se utilicen en sitios de reunión públicos, estacionamientos o techos. En el ejemplo 1-2 se ilustra una aplicación de la ecuación 1-1.

*En la sección 2-1 se proporcionan ejemplos específicos de la determinación de áreas tributarias para vigas y columnas.

EJEMPLO 1.2



En la fotografía se muestra un edificio de oficinas de dos pisos que tiene columnas interiores separadas por 22 pies de distancia en dos direcciones perpendiculares. Si la carga del techo (plano) es de 20 lb/pie², determine la carga viva reducida que soporta una columna interior típica situada a nivel del piso.

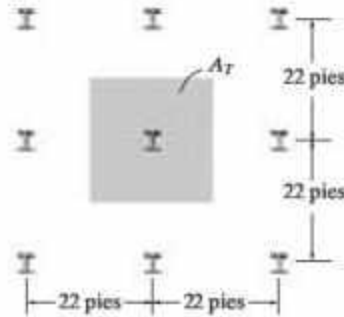


Figura 1-9

SOLUCIÓN

Como se muestra en la figura 1-9, cada columna interior tiene un área tributaria o área cargada efectiva de $A_T = (22 \text{ pies})(22 \text{ pies}) = 484 \text{ pies}^2$. Por lo tanto, una columna de la planta baja soporta una carga viva en el techo de

$$F_R = (20 \text{ lb/pie}^2)(484 \text{ pies}^2) = 9680 \text{ lb} = 9.68 \text{ k}$$

Esta carga no puede reducirse porque no es una carga en el piso. Para el segundo piso, la carga viva se toma de la tabla 1-4: $L_o = 50 \text{ lb/pie}^2$. Como $K_{LL} = 4$, entonces $4A_T = 4(484 \text{ pies}^2) = 1936 \text{ pies}^2$ y $1936 \text{ pies}^2 > 400 \text{ pies}^2$, la carga viva puede reducirse mediante la ecuación 1.1. Por lo tanto,

$$L = 50 \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{1936}} \right) = 29.55 \text{ lb/pie}^2$$

Aquí, la reducción de la carga es $(29.55/50)100\% = 59.1\% > 50\%$. Muy bien! Por lo tanto,

$$F_F = (29.55 \text{ lb/pie}^2)(484 \text{ pies}^2) = 14\,300 \text{ lb} = 14.3 \text{ k}$$

Entonces, la carga viva total soportada por la columna de la planta baja es,

$$F = F_R + F_F = 9.68 \text{ k} + 14.3 \text{ k} = 24.0 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

Cargas en puentes carreteros. Las cargas vivas principales en los claros de un puente son las ocasionadas por el tráfico, y la carga más pesada de vehículos que puede encontrarse es la causada por una serie de camiones. Las especificaciones para las cargas de camiones en puentes carreteros se registran en la *LRFD Bridge Design Specifications* (Especificaciones para el diseño de puentes) de la American Association of State and Highway Transportation Officials (AASHTO). Para camiones de dos ejes, estas cargas se designan con una H, seguida por el peso del camión en toneladas y otro número que proporciona el año de las especificaciones en el cual se reportó la carga. Los pesos de los camiones de la serie H varían de 10 a 20 toneladas. Sin embargo, los puentes ubicados en las principales carreteras que llevan una gran cantidad de tráfico, se diseñan comúnmente para camiones de dos ejes más un semirremolque de un eje como el de la figura 1-10. Éstas se denominan cargas HS. Por lo general, la selección de una carga de camión para un diseño depende del tipo de puente, su ubicación y la clase de tráfico previsto.

En las especificaciones también se reporta el tamaño del “camión estándar” y la distribución de su peso. Aunque se supone que los camiones están en la autopista, no todos los carriles en el puente deben estar cargados con una fila de camiones para obtener la carga crítica, puesto que una carga semejante sería muy improbable. Los detalles se analizan en el capítulo 6.



Figura 1-10

Cargas en puentes ferroviarios. Las cargas sobre puentes ferroviarios, como el de la figura 1-11, se reportan en las *Specifications for Steel Railway Bridges* (Especificaciones para puentes ferroviarios de acero) publicadas por la American Railroad Engineers Association (AREA). Normalmente, para el diseño se utilizan las cargas E como las concibió originalmente Theodore Cooper en 1894. Desde entonces, B. Steinmann ha actualizado la distribución de cargas de Cooper e ideado una serie de cargas M, actualmente aceptadas para el diseño. Dado que las cargas de un tren implican una serie complicada de fuerzas concentradas para simplificar los cálculos manuales, en ocasiones se utilizan tablas y gráficas en combinación con líneas de influencia para obtener la carga crítica. También se usan programas de computación para este propósito.



Figura 1-11

Cargas de impacto. Los vehículos en movimiento pueden rebotar o desplazarse lateralmente mientras avanzan por un puente, por lo tanto pueden transmitir un *impacto* a la cubierta. El porcentaje de aumento de las cargas vivas debido al impacto se denomina *factor de impacto*, I . Por lo general, este factor se obtiene de fórmulas desarrolladas a partir de la evidencia experimental. Por ejemplo, para puentes carreteros las especificaciones de la AASHTO requieren que

$$I = \frac{50}{L + 125} \quad \text{pero no mayor a } 0.3$$

donde L es la longitud en pies del claro que está sometido a la carga viva.

En algunos casos también es necesario tomar previsiones para la carga de impacto sobre la estructura de un edificio. Por ejemplo, la Norma ASCE 7-10 requiere que el peso de la maquinaria de los ascensores se incremente 100%, y que las cargas sobre cualesquier soportes utilizados para sostener los pisos y balcones se incrementen 33%.

Cargas del viento. Cuando las estructuras bloquean el flujo del viento, la energía cinética del viento se convierte en energía potencial de presión, la cual ocasiona una carga de viento. El efecto del viento sobre una estructura depende de la densidad y la velocidad del aire, el ángulo de incidencia del viento, la forma y la rigidez de la estructura y la rugosidad de su superficie. Para propósitos de diseño, las cargas del viento pueden abordarse mediante un método estático o dinámico.

Para el método estático, la presión fluctuante ocasionada por un viento que sopla constantemente se aproxima mediante una presión de velocidad media que actúa sobre la estructura. Esta presión q está definida por su energía cinética, $q = \frac{1}{2}\rho V^2$, donde ρ es la densidad del aire y V es su velocidad. De acuerdo con la Norma ASCE 7-10, esta ecuación se modifica a fin de tomar en cuenta la importancia de la estructura, su altura, y el terreno en que se localiza. Se representa como

$$\begin{aligned} q_z &= 0.00256 K_z K_{zt} K_d V^2 \text{ (lb/pie}^2\text{)} \\ q_z &= 0.613 K_z K_{zt} K_d V^2 \text{ (N/m}^2\text{)} \end{aligned} \quad (1-2)$$

donde

V = la velocidad en millas por hora (m/s) de una ráfaga de viento de 3 segundos medida a 33 pies (10 m) del suelo. Los valores específicos dependen de la "categoría" de la estructura obtenida a partir de un mapa eólico. Por ejemplo, al interior del territorio



Los vientos de un huracán causaron estos daños a un condominio en Miami, Florida.

continental de Estados Unidos se reporta una velocidad del viento de 105 mi/h (47 m/s) si la estructura es un edificio de uso agrícola o de almacenamiento, ya que una falla de la estructura representa un bajo riesgo para la vida humana. Mas en el caso de la estructura de un hospital, la velocidad del viento es de 120 mi/h (54 m/s), pues su falla podría ocasionar una importante pérdida de vidas humanas.

K_z = el coeficiente de exposición a la presión de la velocidad, la cual es una función de la altura y depende del terreno. En la tabla 1-5 se listan los valores de una estructura que se encuentra a terreno abierto, con obstrucciones bajas dispersas.

K_{zt} = un factor que toma en cuenta los aumentos de la velocidad del viento debido a colinas y acantilados. Para el terreno plano $K_{zt} = 1.0$.

K_d = un factor que toma en cuenta la dirección del viento. Se usa sólo cuando la estructura está sometida a combinaciones de cargas (vea la sección 1-4). Cuando el viento actúa por sí solo, $K_d = 1.0$.

TABLA 1-5 Coeficiente de exposición a la presión de la velocidad para terrenos con obstrucciones bajas.

z		K_z
pies	m	
0-15	0-4.6	0.85
20	6.1	0.90
25	7.6	0.94
30	9.1	0.98
40	12.2	1.04
50	15.2	1.09

Presión de diseño del viento para edificios cerrados. Una vez que se ha obtenido el valor para q_z , se puede determinar la presión de diseño a partir de una lista de las ecuaciones pertinentes estipuladas en la Norma ASCE 7-10. La elección depende de la flexibilidad y la altura de la estructura, y si el diseño está dirigido al sistema principal para la resistencia del viento o para los componentes de la construcción y el revestimiento. Por ejemplo, mediante un "procedimiento direccional" la presión del viento sobre un edificio cerrado de cualquier altura se determina a partir de una ecuación de dos términos que resulta de las presiones tanto externas como internas, es decir,

$$p = qGC_p - q_h(GC_{pi}) \quad (1-3)$$



El viento que sopla sobre un muro tenderá a voltear un edificio o hacer que se ladee. Para evitar esto, los ingenieros suelen usar arriostramientos cruzados para proporcionar estabilidad. Vea también la página 46.

Aquí

$q = q_z$ para el muro en barlovento a la altura z sobre el suelo (ecuación 1-2), y $q = q_h$ para el muro en sotavento, las paredes laterales y el techo, donde $z = h$, la altura media del techo.

$G =$ factor del efecto de la ráfaga de viento, que depende de la exposición. Por ejemplo, para una estructura rígida, $G = 0.85$.

$C_p =$ coeficiente de presión de una pared o un techo determinado a partir de una tabla. En la figura 1-12 se presentan estos valores tabulados para las paredes y un paso del techo de $\theta = 10^\circ$. Observe en la vista de elevación que la presión varía con la altura en el lado de barlovento de la construcción, mientras que en los lados restantes y en el techo se supone que la presión es constante. Los valores negativos indican presiones que actúan fuera de la superficie.

$(GC_{pi}) =$ el coeficiente de la presión interna, que depende del tipo de aberturas en el edificio. Para los edificios completamente cerrados $(GC_{pi}) = \pm 0.18$. Aquí los signos indican que dentro del edificio puede ocurrir presión positiva o negativa (succión).

Al aplicar la ecuación 1-3 implicará cálculos de las presiones del viento de cada lado del edificio, con las debidas consideraciones para la posibilidad de presiones positivas o negativas que actúan sobre el interior del edificio.

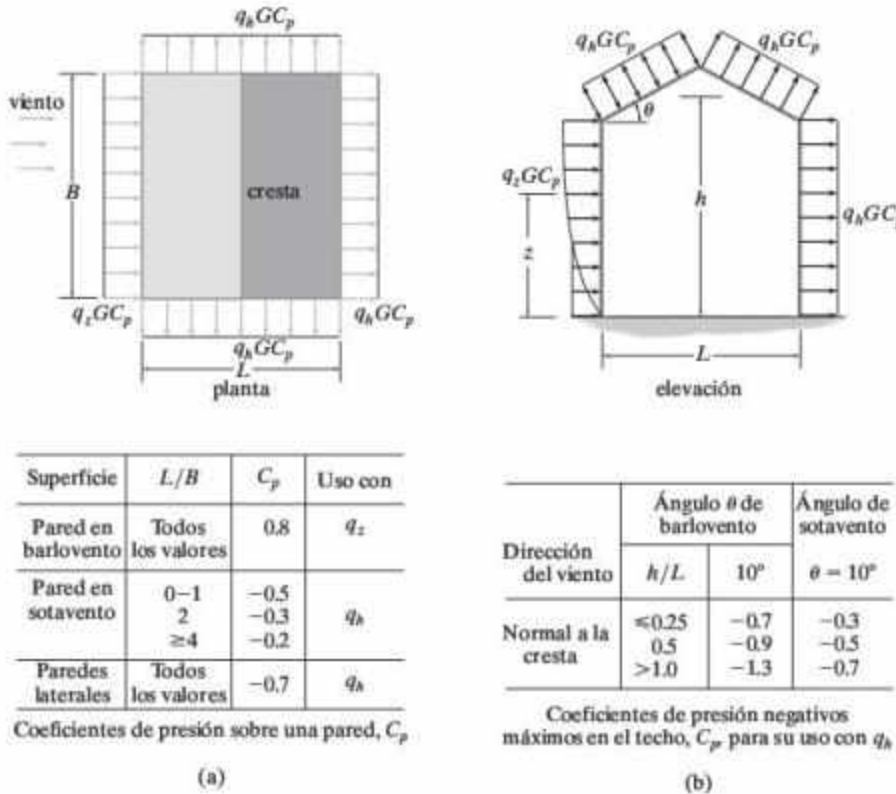


Figura 1-12

Para edificios de gran altura o aquellos que tienen una forma o una ubicación que los hace sensibles al viento, se recomienda el uso de un *método dinámico* para determinar las cargas del viento. La metodología para hacer esto también se indica en la Norma ASCE 7-10. Ésta implica pruebas en túnel de viento, las cuales se realizan sobre un modelo a escala del edificio y las construcciones que lo rodean, con el fin de simular el ambiente natural. Los efectos de la presión del viento sobre el edificio pueden determinarse a partir de transductores de presión conectados al modelo. Además, si el modelo tiene características de rigidez que se encuentran en la escala adecuada para el edificio, también pueden determinarse las deflexiones dinámicas del edificio.

EJEMPLO 1.3



El edificio cerrado que se muestra en la fotografía y en la figura 1-13a se utiliza con fines de almacenamiento y se encuentra en las afueras de Chicago, Illinois, en un terreno plano y abierto. Si el viento tiene la dirección que se muestra, determine la presión del viento de diseño que actúa sobre el techo y los laterales del edificio empleando las especificaciones ASCE 7-10.

SOLUCIÓN

En primer lugar, la presión del viento se determinará mediante la ecuación 1-2. La velocidad básica del viento es $V = 105$ mi/h, puesto que el edificio se utiliza para almacenamiento. Además, para un terreno plano, $K_{zt} = 1.0$. Como sólo se está considerando la carga del viento, $K_d = 1.0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} q_z &= 0.00256 K_z K_{zt} K_d V^2 \\ &= 0.00256 K_z (1.0) (1.0) (105)^2 \\ &= 28.22 K_z \end{aligned}$$

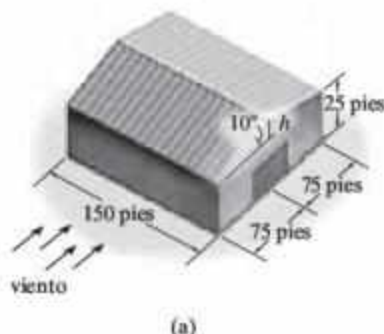


Figura 1-13

A partir de la figura 1-13a, $h' = 75 \tan 10^\circ = 13.22$ pies de modo que la altura media del techo es $h = 25 + 13.22/2 = 31.6$ pies. Si se emplean los valores de K_z de la tabla 1.5, los valores calculados del perfil de la presión se listan en la tabla de la figura 1-13b. Observe que el valor de K_z se determinó por interpolación lineal para $z = h$, es decir, $(1.04 - 0.98)/(40 - 30) = (1.04 - K_z)/(40 - 31.6)$, $K_z = 0.990$, de modo que $q_h = 28.22(0.990) = 27.9$ libras por pie cuadrado (psf).

Para aplicar la ecuación 1-3, el factor de ráfaga es $G = 0.85$, y $(GC_{pi}) = \pm 0.18$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p &= qGC_p - q_h(GC_{pi}) \\ &= q(0.85)C_p - 27.9(\pm 0.18) \\ &= 0.85qC_p \mp 5.03 \end{aligned} \quad (1)$$

Las cargas de presión se obtienen a partir de esta ecuación con los valores calculados para q_z que se listan en la tabla de la figura 1-13b, de acuerdo con el perfil de la presión del viento de la figura 1-12.

z (pies)	K_z	q_z (psf)
0-15	0.85	24.0
20	0.90	25.4
25	0.94	26.5
$h = 31.6$	0.990	27.9

(b)

Pared en barlovento. Aquí la presión varía con la altura z puesto que debe usarse $q_z GC_p$. Para todos los valores de L/B , $C_p = 0.8$, por lo que a partir de la ecuación (1),

$$p_{0-15} = 11.3 \text{ psf} \quad \text{o} \quad 21.3 \text{ psf}$$

$$p_{20} = 12.2 \text{ psf} \quad \text{o} \quad 22.3 \text{ psf}$$

$$p_{25} = 13.0 \text{ psf} \quad \text{o} \quad 23.1 \text{ psf}$$

Pared en sotavento. Aquí $L/B = 2(75)/150 = 1$, de modo que $C_p = -0.5$. Además, $q = q_h$ por lo que a partir de la ecuación (1),

$$p = -16.9 \text{ psf} \quad \text{o} \quad -6.84 \text{ psf}$$

Paredes laterales. Para todos los valores de L/B , $C_p = 0.7$, y como debe utilizarse $q = q_h$, en la ecuación (1), se tiene

$$p = -21.6 \text{ psf} \quad \text{o} \quad -11.6 \text{ psf}$$

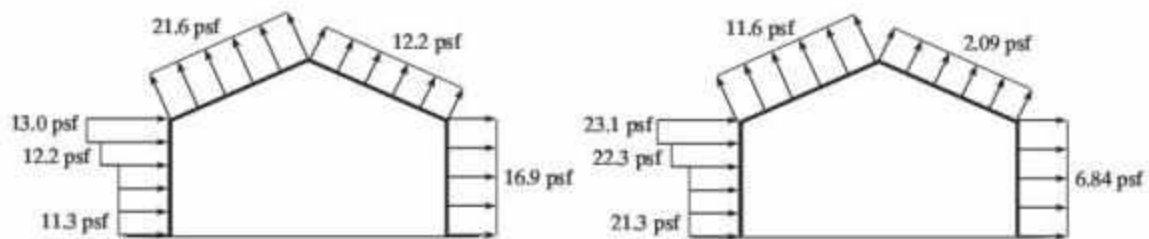
Techo en barlovento. Aquí $h/L = 31.6/2(75) = 0.211 < 0.25$, por lo que $C_p = -0.7$ y $q = q_h$. Por lo tanto,

$$p = -21.6 \text{ psf} \quad \text{o} \quad -11.6 \text{ psf}$$

Techo en sotavento. En este caso, $C_p = -0.3$; por lo tanto, con $q = q_h$ se obtiene

$$p = -12.2 \text{ psf} \quad \text{o} \quad -2.09 \text{ psf}$$

Estos dos conjuntos de cargas se muestran en la elevación del edificio, lo que representa una presión interna en el edificio positiva o negativa (succión), figura 1-13c. La estructura principal de la construcción debe resistir estas cargas; lo mismo ocurre con las cargas por separado calculadas a partir del viento que sopla en la parte delantera o la trasera del edificio.



(c)

Presión del viento de diseño para espectaculares. Si la estructura representa un espectacular, el viento produce una fuerza resultante que actúa sobre la cara de la estructura y que se determina a partir de

$$F = q_h G C_f A_s \quad (1-4)$$

Aquí

q_h = la presión del viento evaluada a la altura h , medida desde el suelo hasta la parte superior del espectacular.

G = factor del coeficiente de ráfaga de viento ya definida antes.

C_f = un coeficiente de fuerza que depende de la relación de aspecto (ancho B del espectacular sobre su altura s), y la relación de área libre (altura s del espectacular sobre la elevación h , medida desde el suelo hasta la parte superior de la estructura). Para los casos en que el viento se dirige en forma normal hacia el centro del espectacular, para $B/s = 4$, los valores se listan en la tabla 1.6.

A_s = el área de la cara del espectacular en pies² (m²).

TABLA 1-6 Coeficientes de fuerza para espectaculares sólidos por encima del suelo, C_f

s/h	C_f
1	1.35
0.9	1.45
0.5	1.70
0.2	1.80
≤ 0.16	1.85

Para permitir las direcciones normal y oblicua del viento, se supone que la fuerza resultante calculada actúa ya sea a través del centro geométrico de la cara de la señal, o en otros lugares específicos en la cara de la señal, los cuales dependen de las relaciones s/h y B/s .



Los vientos huracanados que actúan sobre la cara de este espectacular son lo bastante fuertes como para doblar notablemente los dos brazos de soporte y ocasionar la fluencia del material. Esto pudo evitarse con un diseño adecuado.

Cargas de nieve. En algunas partes de Estados Unidos la carga sobre el techo debida a la nieve puede ser muy grave; por lo tanto, proteger el techo contra posibles fallas es una preocupación primordial. Por lo común, las cargas de diseño dependen de la forma general de la construcción y la geometría del techo, la exposición al viento, la ubicación, su importancia, y si se usa o no calefacción. Del mismo modo que para el viento, en la Norma ASCE 7-10 se determinan las cargas de la nieve, por lo general a partir de un mapa de la zona con los reportes de los periodos de recurrencia de la profundidad extrema de la nieve en un periodo de 50 años. Por ejemplo, en la extensión relativamente plana a lo largo de la sección media de Illinois e Indiana, la carga de la nieve del suelo es de 20 lb/pie² (0.96 kN/m²). Sin embargo, para el área de Montana se requieren estudios sobre los casos específicos de las cargas de nieve debido a la elevación variable del terreno en todo el estado. Las especificaciones para las cargas de nieve se cubren en la Norma ASCE 7-10, aunque no hay ningún código que pueda cubrir todas las implicaciones de este tipo de carga.

Si un techo es plano, definido como un techo con una pendiente menor a 5%, entonces la carga de la presión puede obtenerse modificando la carga de la nieve sobre el suelo, p_g , mediante la siguiente fórmula empírica

$$p_f = 0.7C_e C_t I_s p_g \quad (1-5)$$

Aquí

C_e = un factor de exposición que depende del terreno. Por ejemplo, para un techo completamente expuesto en un área despejada, $C_e = 0.8$, en tanto que si el techo está protegido y situado en el centro de una ciudad grande, $C_e = 1.2$.

C_t = un factor térmico que se refiere a la temperatura media dentro del edificio. Para las estructuras sin calefacción que se mantienen por debajo de cero grados, $C_t = 1.2$, en tanto que si el techo soporta una estructura que se suele calentar, entonces $C_t = 1.0$.

I_s = el factor de importancia en lo que respecta a la ocupación. Por ejemplo, $I_s = 0.80$ para instalaciones dedicadas a la agricultura y el almacenamiento, $I_s = 1.20$ para escuelas y hospitales.

Si $p_g \leq 20$ lb/pie² (0.96 kN/m²), use el valor mayor para p_g ya sea calculada desde la ecuación anterior o a partir de $p_f = I_s p_g$. Si $p_g > 20$ lb/pie² (0.96 kN/m²), utilice $p_f = I_s (20$ lb/pie²).



Las cargas excesivas de la nieve y el hielo actúan sobre este techo.

EJEMPLO 1.4

La instalación de almacenamiento sin calefacción que se muestra en la figura 1-14 se localiza en un terreno plano y abierto en el sur de Illinois, donde la carga especificada de la nieve sobre el suelo es de 15 lb/pie^2 . Determine la carga de nieve de diseño sobre el techo, el cual tiene una pendiente de 4%.



Figura 1-14

SOLUCIÓN

Como la pendiente del techo es $< 5\%$, se usará la ecuación 1.5. Aquí, $C_e = 0.8$ debido a que se trata de un área abierta, $C_t = 1.2$ e $I_s = 0.8$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_f &= 0.7C_eC_tI_s p_g \\ &= 0.7(0.8)(1.2)(0.8)(15 \text{ lb/pie}^2) = 8.06 \text{ lb/pie}^2 \end{aligned}$$

Como $p_g = 15 \text{ lb/pie}^2 < 20 \text{ lb/pie}^2$, entonces también

$$p_f = I p_g = 1.2(15 \text{ lb/pie}^2) = 18 \text{ lb/pie}^2$$

Por comparación, elija

$$p_f = 18 \text{ lb/pie}^2 \quad \text{Resp.}$$



Figura 1-15

Cargas de terremoto. Los terremotos producen cargas sobre una estructura a través de su interacción con el suelo y las características de su respuesta. Estas cargas resultan de la distorsión de la estructura a causa del movimiento del suelo y la resistencia lateral de la estructura. Su magnitud depende de la cantidad y tipo de aceleraciones del suelo y de la masa y la rigidez de la estructura. Para obtener algún conocimiento de la naturaleza de las cargas sísmicas, considere el modelo estructural simple que se muestra en la figura 1-15. Este modelo puede representar un edificio de una sola planta, donde el bloque superior es la masa "concentrada" del techo y el bloque medio es la rigidez agrupada de todas las columnas del edificio. Durante un terremoto el suelo vibra tanto horizontal como verticalmente. Las aceleraciones horizontales crean fuerzas cortantes en la columna que ponen al bloque en movimiento secuencial con el suelo. Si la columna es *rígida* y el bloque tiene una masa *pequeña*, el periodo de vibración del bloque será *corto* y el bloque se acelerará con el mismo movimiento que el suelo y sufrirá sólo pequeños desplazamientos relativos. Para una estructura real que esté diseñada con una gran cantidad de refuerzos y conexiones rígidas esto puede ser beneficioso, puesto que se desarrolla menos esfuerzo en los elementos. Por otro lado, si la columna de la figura 1-15 es muy flexible y el bloque tiene una masa grande, entonces el movimiento inducido por el terremoto causará pequeñas aceleraciones del bloque y grandes desplazamientos relativos.

En la práctica, los efectos de la aceleración, la velocidad y el desplazamiento de una estructura se pueden determinar y representar como un *espectro de respuesta al terremoto*. Una vez que se ha establecido esta gráfica, las cargas del terremoto pueden calcularse aplicando un *análisis*

dinámico basado en la teoría de la dinámica estructural. Este tipo de análisis está ganando popularidad, aunque a veces es muy elaborado y requiere utilizar una computadora. Aún así, dicho análisis resulta obligatorio si la estructura es grande.

Algunos códigos requieren que se preste atención específica al diseño sísmico, especialmente en las zonas del país (Estados Unidos) donde predominan fuertes terremotos. Además, estas cargas deben considerarse con gran seriedad en el diseño de edificios de gran altura o plantas de energía nuclear. A fin de evaluar la importancia de la consideración del diseño para sismos, es posible corroborar los mapas sísmicos de aceleración del suelo publicados en la Norma ASCE 7-10. Estos mapas proporcionan las aceleraciones pico del suelo causadas por algún terremoto, junto con los coeficientes de riesgo. Las regiones de Estados Unidos varían desde un riesgo bajo, como en algunas partes de Texas, hasta un riesgo muy alto, como a lo largo de la costa oeste de California.

Para estructuras pequeñas, un *análisis estático* para el diseño sísmico puede resultar satisfactorio. En este caso las cargas dinámicas se aproximan mediante un conjunto de *fuerzas estáticas* externas que se aplican de manera lateral a la estructura. Uno de estos métodos está reportado en la Norma ASCE 7-10, y se basa en el hallazgo de un coeficiente de respuesta sísmica, C_s , determinado a partir de las propiedades del suelo, las aceleraciones de éste y la respuesta vibratoria de la estructura. Para la mayoría de las estructuras, este coeficiente se multiplica por la carga muerta total W de la estructura, con lo que se obtiene la "fuerza cortante basal" en la estructura. El valor de C_s se determina realmente a partir de

$$C_s = \frac{S_{DS}}{R/I_e}$$

donde

S_{DS} = la aceleración de respuesta espectral durante cortos periodos de vibración.

R = un factor de modificación de la respuesta que depende de la flexibilidad de la estructura. Los elementos de un marco de acero que son muy flexibles pueden tener un valor alto de 8, en tanto que las estructuras de concreto reforzado pueden tener un valor bajo de 3.

I_e = el factor de importancia que depende del uso del edificio. Por ejemplo, $I_e = 1$ para las instalaciones de agricultura y almacenamiento, e $I_e = 1.5$ para los hospitales y otros servicios esenciales.

A cada nueva publicación de la Norma, los valores de estos coeficientes se actualizan con los datos más precisos disponibles sobre la respuesta al terremoto.

Presión hidrostática y geostática. Cuando las estructuras se utilizan para retener agua, tierra o materiales granulares, la presión desarrollada por estas cargas se convierte en un criterio importante para su diseño. Algunos ejemplos de este tipo de estructuras son los tanques, las presas, los buques, las mamparas y los muros de contención. Aquí se aplican las leyes de la hidrostática y la mecánica de suelos para definir la intensidad de las cargas sobre la estructura.



El diseño de este muro de contención requiere la estimación de la presión geostática que actúa sobre él. Además, la compuerta de seguridad estará sujeta a una presión hidrostática que debe considerarse durante su diseño.

Otras cargas naturales. En el diseño de una estructura también deben considerarse otros tipos de cargas vivas en función de su ubicación o su uso. Éstos incluyen el efecto de la erosión, los cambios de temperatura y los asentamientos diferenciales de los cimientos.

1.4 Diseño estructural

Cada vez que se diseñe una estructura, es importante considerar las incertidumbres de los materiales y las cargas. Estas incertidumbres incluyen una posible variabilidad en las propiedades del material, la tensión residual en los materiales, las medidas previstas que pueden ser diferentes a los tamaños prefabricados, las cargas debidas a las vibraciones o impactos y la corrosión o decadencia de los materiales.

DEP. Los métodos de diseño por esfuerzos permisibles (DEP) incluyen *tanto* las incertidumbres del material *como* las de las cargas en un solo factor de seguridad. Los diferentes tipos de cargas ya antes analizados pueden ocurrir simultáneamente en una estructura, pero es muy poco probable que el máximo de todas estas cargas ocurra al mismo tiempo. Por ejemplo, las cargas máximas del viento y de los sismos no suelen actuar de forma simultánea sobre una estructura. Para el *diseño por esfuerzos permisibles*, el esfuerzo elástico calculado en el material no debe exceder el esfuerzo admisible para cada una de las diferentes combinaciones de carga. Las combinaciones de carga más comunes que se especifican en la Norma ASCE 7-10 incluyen

- carga muerta
- $0.6 \text{ (carga muerta)} + 0.6 \text{ (carga del viento)}$
- $0.6 \text{ (carga muerta)} + 0.7 \text{ (carga sísmica)}$

DFCR. Como la incertidumbre puede tomarse en cuenta empleando la teoría de probabilidad, ha habido una creciente tendencia a separar la incertidumbre del material de la incertidumbre de las cargas. Este método se denomina *diseño por resistencia* o DFCR (Diseño por factores de carga y de resistencia). Por ejemplo, para tener en cuenta la incertidumbre de las cargas, este método utiliza los factores de carga aplicados a las cargas o combinaciones de éstas. De acuerdo con la Norma ASCE 7-10, algunos de los factores de carga y combinaciones de éstas son

- $1.4 \text{ (carga muerta)}$
- $1.2 \text{ (carga muerta)} + 1.6 \text{ (carga viva)} + 0.5 \text{ (carga de nieve)}$
- $0.9 \text{ (carga muerta)} + 1.0 \text{ (carga de viento)}$
- $0.9 \text{ (carga muerta)} + 1.0 \text{ (carga sísmica)}$

En todos estos casos se considera que las combinaciones proporcionan una carga máxima pero real sobre la estructura.

PROBLEMAS

1

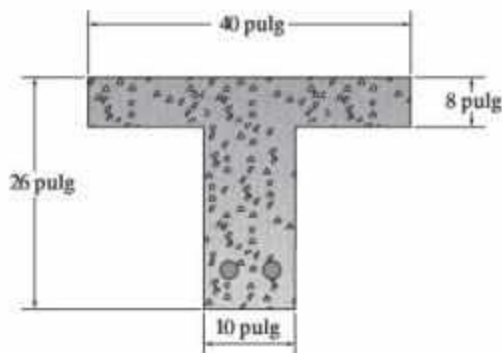
1-1. El piso de un edificio que se usa para el almacenamiento de equipo pesado es de losas de concreto con 6 pulg de espesor. Si el piso es una losa que tiene una longitud de 15 pies y una anchura de 10 pies, determine la fuerza resultante causada por la carga muerta y la carga viva.

1-2. El piso del edificio de oficinas es de concreto ligero con 4 pulg de espesor. Si el piso de la oficina es una losa con una longitud de 20 pies y una anchura de 15 pies, determine la fuerza resultante causada por la carga muerta y la carga viva.



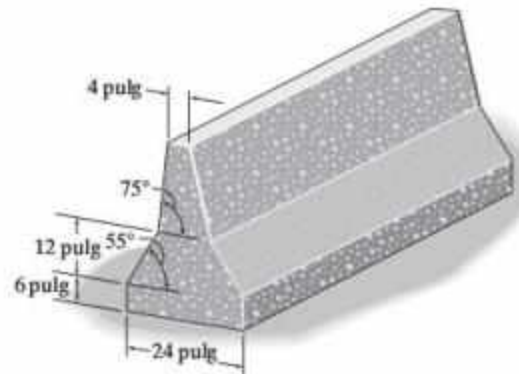
Prob. 1-2

1-3. La viga en T está hecha de concreto y tiene un peso específico de 150 lb/pie^3 . Determine la carga muerta por pie de longitud de la viga. No considere el peso del refuerzo de acero.



Prob. 1-3

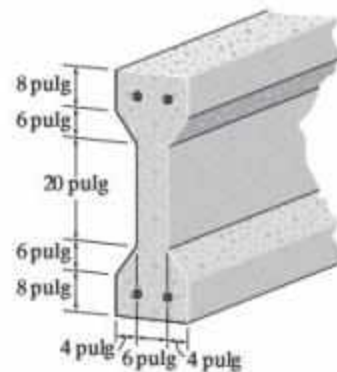
***1-4.** La barrera "New Jersey" se usa comúnmente durante la construcción de carreteras. Si está hecha de concreto de piedra simple, determine su peso por pie de longitud.



Prob. 1-4

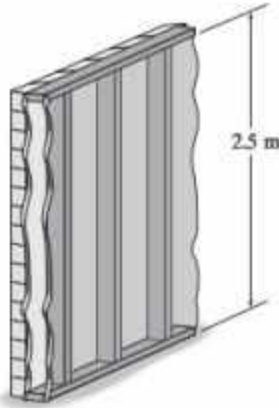
1-5. El piso de una bodega de almacenamiento ligero está hecho de concreto simple ligero con 150 mm de espesor. Si el piso es una losa que tiene una longitud de 7 m y una anchura de 3 m, determine la fuerza resultante causada por la carga muerta y la carga viva.

1-6. La trabe de concreto preesforzado es de concreto de piedra simple y tiene cuatro varillas de refuerzo de $\frac{3}{4}$ pulg, hechas de acero formado en frío. Determine la carga muerta de la trabe por cada pie de su longitud.



Prob. 1-6

1-7. La pared tiene 2.5 m de altura y consta de puntales de 51 mm \times 102 mm enyesados por un lado. En el otro lado hay una lámina de fibra de 13 mm y ladrillos de arcilla de 102 mm. Determine la carga promedio, en kN/m de la longitud de la pared, que la pared ejerce sobre el suelo.

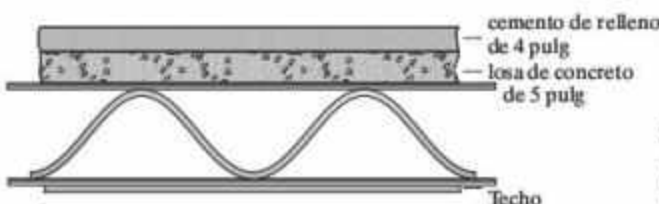


Prob. 1-7

***1-8.** Una pared de un edificio se compone de paredes de entramado exterior con revestimiento de ladrillo y 13 mm de lámina de fibra en un lado. Si la pared tiene 4 m de altura, determine la carga en kN/m que ejerce sobre el suelo.

1-9. La pared interior de un edificio está hecha de puntales de madera de 2 \times 4, enyesados por ambos lados. Si la pared tiene 12 pies de altura, determine la carga en lb/pie de longitud de la pared que ejerce sobre el suelo.

1-10. El segundo piso de un edificio usado para la manufactura ligera está hecho de una losa de concreto de 5 pulg de espesor, con un relleno de 4 pulg de concreto simple, como se muestra en la figura. Si el techo suspendido de la primera planta consta de malla metálica y yeso, determine el peso muerto de diseño en libras por pie cuadrado del área del piso.



Prob. 1-10

1-11. Un edificio de oficinas de cuatro pisos tiene columnas interiores separadas a 30 pies de distancia en dos direcciones perpendiculares. Si la carga viva del techo plano se estima en 30 lb/pie², determine la carga viva reducida que soporta una columna interior normal ubicada a nivel del suelo.

***1-12.** Una construcción para almacenamiento ligero de dos plantas tiene columnas interiores separadas a 12 pies de distancia en dos direcciones perpendiculares. Si se estima que la carga viva sobre el techo es de 25 lb/pie², determine la carga viva reducida que soporta una columna interior normal (a) al nivel de la planta baja, y (b) al nivel del segundo piso.

1-13. El edificio de oficinas tiene columnas interiores separadas a 5 m en direcciones perpendiculares. Determine la carga viva reducida que soporta una columna interior normal ubicada en el primer piso debajo de las oficinas.



Prob. 1-13

1-14. Un hotel de dos pisos tiene columnas interiores para las habitaciones que están separadas a 6 m de distancia en dos direcciones perpendiculares. Determine la carga viva reducida que soporta una columna interior típica en el primer piso debajo de las habitaciones públicas.

1-15. El viento sopla lateralmente sobre un hospital completamente cerrado que se ubica en un terreno abierto y plano en Arizona. Determine la presión externa que actúa sobre la pared en barlovento, la cual tiene una altura de 30 pies. El techo es plano.



Prob. 1-15

1-17. Un edificio cerrado de almacenamiento se encuentra sobre un terreno abierto y plano en el centro de Ohio. Si la pared lateral del edificio tiene 20 pies de altura, determine la presión externa del viento que actúa sobre las paredes en barlovento y sotavento. Cada pared tiene 60 pies de largo. Suponga que el techo es esencialmente plano.



Prob. 1-17

***1-16.** El viento sopla lateralmente sobre un hospital completamente cerrado que se ubica en un terreno abierto y plano en Arizona. Determine la presión externa que actúa sobre la pared en sotavento, la cual tiene una longitud de 200 pies y una altura de 30 pies.



Prob. 1-16

1-18. El edificio metálico de almacenamiento ligero está en un terreno abierto y plano en el centro de Oklahoma. Si la pared lateral del edificio tiene 14 pies de altura, ¿cuáles son los dos valores de la presión externa del viento que actúa sobre esta pared cuando el viento sopla sobre la parte trasera del edificio? El techo es esencialmente plano y el edificio está totalmente cerrado.



Prob. 1-18

- 1-19.** Determine la fuerza resultante que actúa en forma perpendicular a la cara del espectacular y a través de su centro si se encuentra en Michigan sobre un terreno plano y abierto. El espectacular es rígido y tiene una anchura de 12 metros y una altura de 3 m. Su parte superior está a 15 m del suelo.



Prob. 1-19

- *1-20.** Un hospital ubicado en el centro de Illinois tiene un techo plano. Determine la carga de nieve en kN/m^2 que se requiere para diseñar el techo.

- 1-21.** El edificio de la escuela tiene un techo plano. Se encuentra en un área abierta donde la carga de la nieve sobre el suelo es de 0.68 kN/m^2 . Determine la carga de nieve que se requiere para diseñar el techo.



Prob. 1-21

- 1-22.** El hospital tiene un techo plano y se ubica en una zona abierta donde el peso de la nieve sobre el suelo es de 30 lb/ft^2 . Determine la carga de nieve de diseño para el techo.



Prob. 1-22

REPASO DEL CAPÍTULO

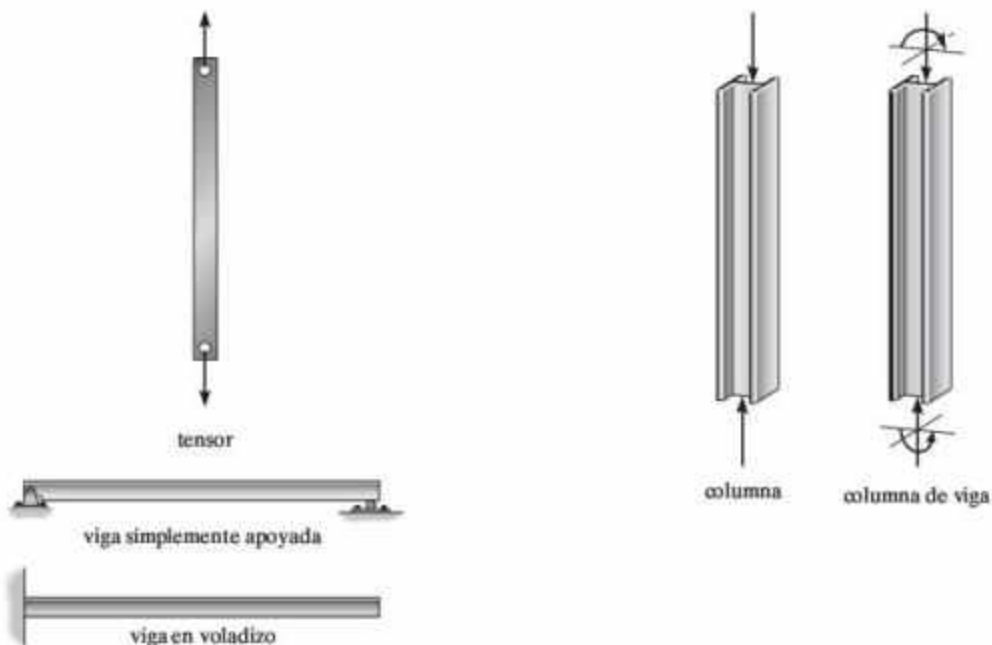
1

Los elementos estructurales básicos son:

Tensores Elementos delgados sometidos a tensión. A menudo se usan como soportes.

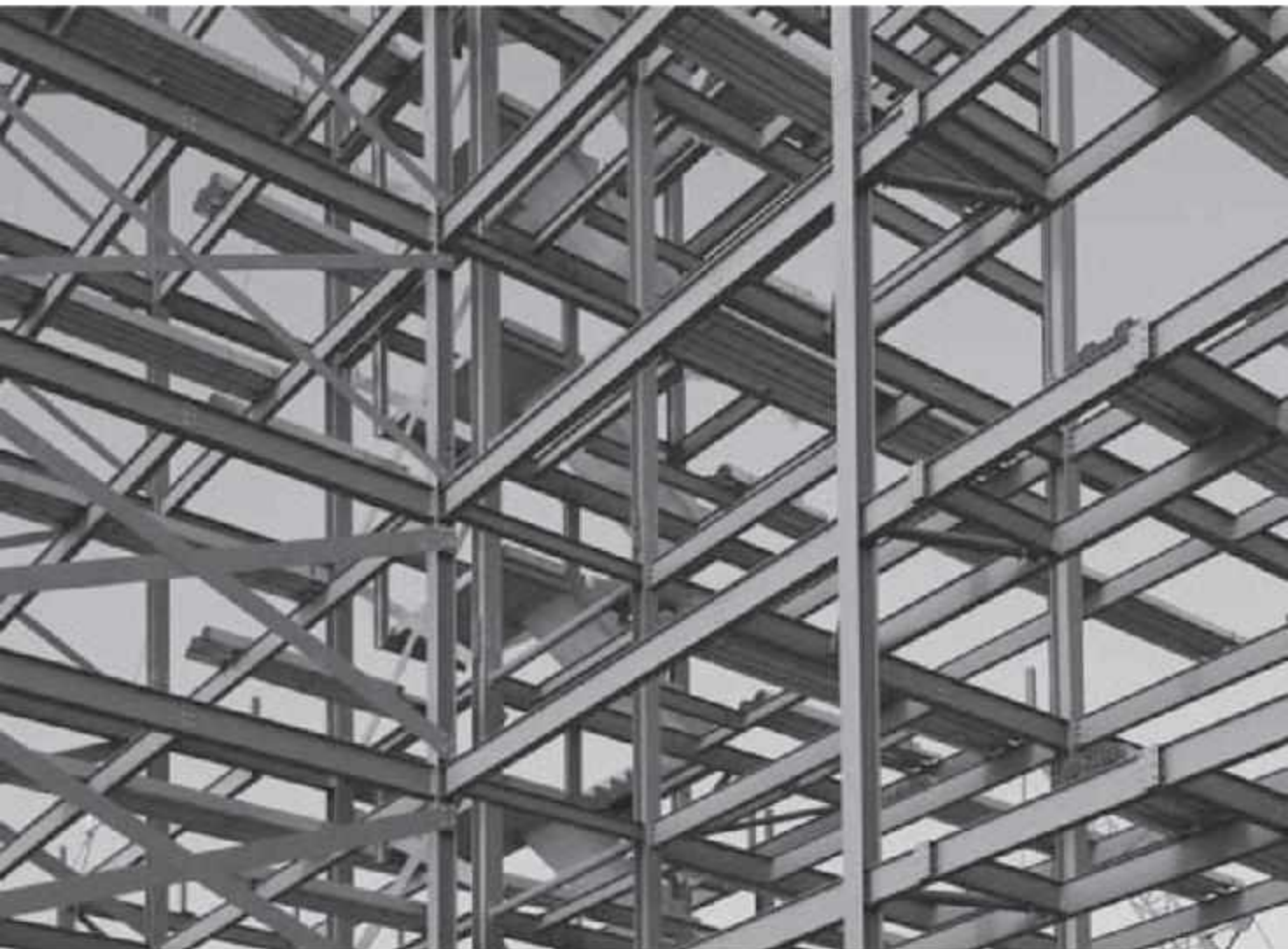
Vigas Elementos diseñados para resistir momentos de flexión. Suelen ser fijos o articulados, y pueden tener la forma de una trabe de placa de acero, una viga de concreto reforzado o de madera laminada.

Columnas Elementos que resisten una fuerza de compresión axial. Si la columna también resiste flexión, se denomina *columna viga*.



Los tipos de estructuras consideradas en este libro son las *armaduras* hechas de elementos delgados articulados, que forman una serie de triángulos; los *cables* y los *arcos*, que sostienen cargas de tensión y compresión, respectivamente, y los *marcos* que se componen de vigas y columnas conectadas en forma rígida o mediante pasadores.

Las cargas se especifican en códigos, como el código ASCE 7-10. Las *cargas muertas* son fijas y se refieren a los pesos de elementos y materiales. Las *cargas vivas* son móviles y consisten en cargas uniformes sobre los pisos de los edificios, las cargas del tráfico y el tren sobre los puentes, las cargas de impacto causadas por automóviles y máquinas, las cargas del viento, las cargas de la nieve, las cargas sísmicas y la presión hidrostática y geostática.



Con frecuencia los elementos estructurales, como las vigas y traveses que forman el soporte de este edificio, están conectados entre sí de tal modo que el análisis puede considerarse estáticamente determinado.

Análisis de estructuras estáticamente determinadas

En el presente capítulo se prestará atención a la forma más común de estructura que el ingeniero tendrá que analizar, la cual se encuentra en un plano y está sometida a un sistema de fuerzas que también pertenece al mismo plano. En la primera parte del capítulo se estudiará la importancia de elegir un modelo apropiado de análisis para una estructura en la que sus fuerzas pueden determinarse con una precisión razonable; después se analizarán los criterios necesarios para obtener la estabilidad estructural y, por último, se presentará el análisis de estructuras estáticamente determinadas, planas y articuladas.

2.1 Estructura idealizada

El análisis exacto de una estructura es imposible de realizar, debido a que siempre hay que realizar estimaciones de las cargas y la resistencia de los materiales que componen la estructura. Además, también deben estimarse los puntos de aplicación de las cargas. Por lo tanto, en la práctica es importante que el ingeniero estructuralista desarrolle la capacidad de modelar o idealizar una estructura a fin de poder efectuar un análisis de fuerzas de los elementos. En esta sección se desarrollarán las técnicas básicas necesarias para llevar a cabo tales idealizaciones.



Observe que la cubierta de este puente de concreto está hecha de forma que puede considerarse que una sección está unida mediante un soporte de rodillo sobre la otra sección.

Conexiones de soporte (apoyo). Los elementos estructurales se unen de diversas maneras dependiendo de la intención del diseñador. Los tres tipos de juntas que se especifican con mayor frecuencia son la junta articulada, el soporte de rodillo y la junta fija. Las juntas articuladas y los soportes de rodillo permiten cierta libertad de rotación, en tanto que una junta fija no permite la rotación relativa entre los elementos conectados y, en consecuencia, su fabricación es más costosa. En las figuras 2-1 y 2-2 se muestran ejemplos de estas juntas formadas, respectivamente, en metal y concreto. Para la mayoría de las estructuras de madera, se supone que los elementos deberán ser articulados ya que el hecho de atornillarlos o clavarlos no es suficiente para restringir la rotación de un elemento con respecto a los demás.

En las figuras 2-3a y 2-3b se muestran *modelos idealizados* que se usan en el análisis estructural y que representan soportes fijos y articulados, así como juntas fijas y articuladas. Sin embargo, en realidad todas las conexiones muestran cierta rigidez a la rotación de las articulaciones, debido a la fricción y al comportamiento del material. En este caso, un modelo más apropiado para un soporte o junta podría ser el que se muestra en la figura 2-3c. Si la constante torsional de resorte $k = 0$, la junta es articulada, y si $k \rightarrow \infty$, la junta es fija.

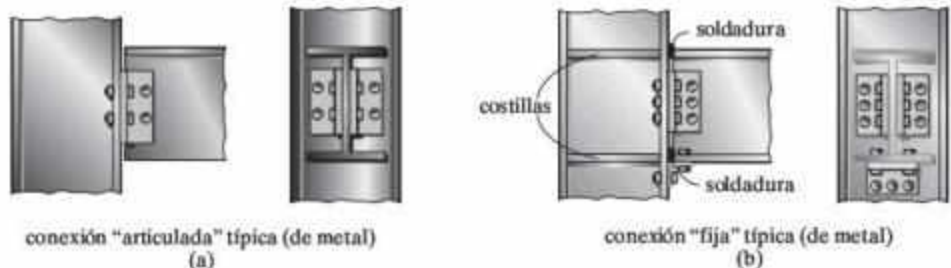


Figura 2-1

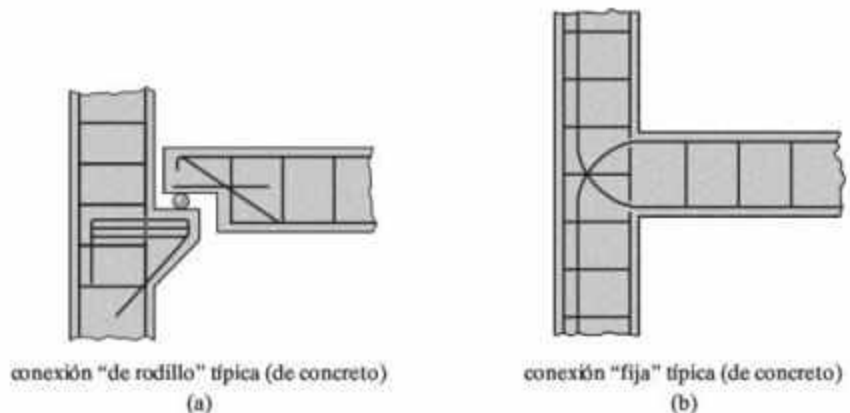


Figura 2-2

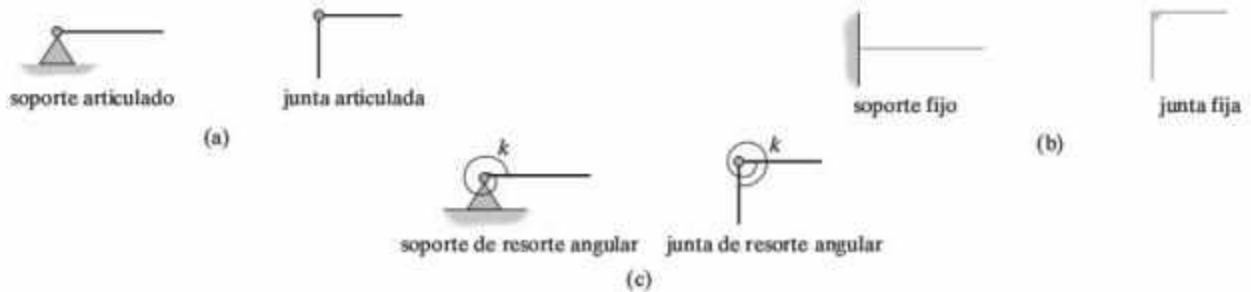


Figura 2-3

Al seleccionar un modelo concreto para cada soporte o junta, el ingeniero debe estar consciente de cómo afectarán los supuestos el desempeño real de los elementos y si los supuestos son razonables para el diseño estructural. Por ejemplo, considere la viga que se muestra en la figura 2-4a, la cual se usa para soportar una carga concentrada P . La conexión mediante ángulos en el soporte A es como la de la figura 2.1a y por lo tanto puede idealizarse como un soporte articulado típico. Además, el soporte en B proporciona un punto aproximado de contacto liso, de modo que puede idealizarse como un rodillo. El espesor de la viga puede ignorarse, dado que es pequeño en comparación con la longitud de la viga y, por lo tanto, el modelo idealizado de la viga es como se muestra en la figura 2-4b. El análisis de cargas en esta viga debe proporcionar resultados que se aproximen mucho a las cargas reales en la viga. Para demostrar que el modelo es adecuado, considere el caso particular de una viga de acero con $P = 8 \text{ k}$ (8000 libras) y $L = 20$ pies. Una de las simplificaciones más importantes que se hicieron aquí fue suponer que el soporte en A es una articulación. El diseño de la viga usando el código de procedimientos estándar* indica que una sección $W10 \times 19$ sería suficiente para soportar la carga. Al usar uno de los métodos de deflexión del capítulo 8, la rotación en el soporte "articulado" puede calcularse como $\theta = 0.0103 \text{ rad} = 0.59^\circ$. Con base en la figura 2-4c, tal rotación sólo mueve el patín (ala) superior o inferior a una distancia de $\Delta = \theta r = (0.0103 \text{ rad})(5.12 \text{ pulg}) = 0.0528 \text{ pulgadas}$! Sin duda, esta *pequeña cantidad* puede incluirse al fabricar la conexión como se muestra en la figura 2-1a y, por lo tanto, la articulación sirve como un modelo adecuado.

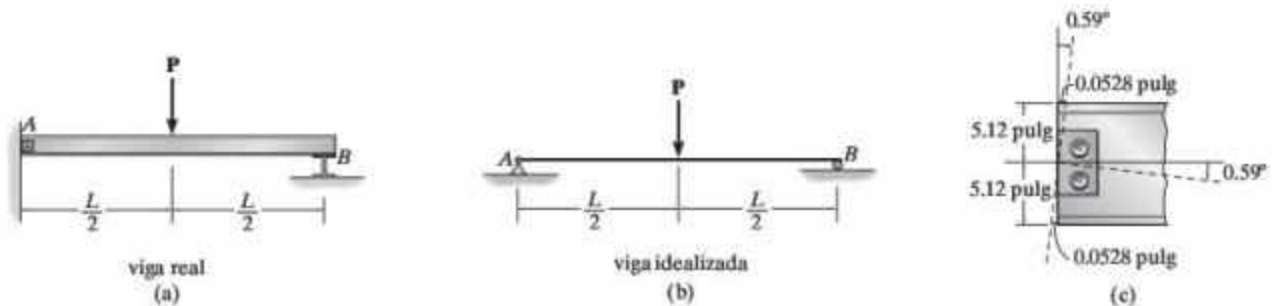
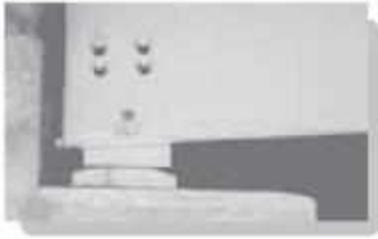


Figura 2-4

*Códigos como el *Manual de Construcción en acero* del American Institute of Steel Construction.

2



SopORTE oscilante común que se usa en una trabe de puente.



Los rodillos y los cojinetes asociados se usan para sostener las trabes de concreto presforzado de un puente carretero.

En la tabla 2-1, se muestran otros tipos de conexiones comúnmente presentes en las estructuras coplanares. Es importante tener la capacidad de reconocer los símbolos de estas conexiones y los tipos de reacciones que ejercen sobre los elementos a los que se encuentran unidas. Esto puede hacerse fácilmente si se observa la forma en que la conexión *restringe* cualquier grado de libertad o desplazamiento de los elementos. En particular, el soporte desarrollará una *fuerza* sobre el elemento si *evita su traslación* y desarrollará un *momento* sobre el elemento si *evita su rotación*. Por ejemplo, en el caso de un elemento que está en contacto con una superficie lisa (3) se impide su traslación en una sola dirección, la cual es perpendicular o normal a la superficie. Por lo tanto, la superficie ejerce sólo una *fuerza normal* F sobre el elemento en esa dirección. La magnitud de esta fuerza representa una *incógnita*. Además, observe que el elemento es libre de girar sobre la superficie, de modo que ésta no puede desarrollar un momento sobre el elemento. Considere otro ejemplo en el que el soporte fijo (7) impide *tanto* la traslación *como* la rotación de un elemento en el punto de conexión. En consecuencia, este tipo de soporte ejerce dos componentes de fuerza y un momento sobre el elemento. El “giro” del momento se encuentra en el plano de la página, dado que la rotación se evita en ese plano. Por consiguiente, en un soporte fijo hay *tres incógnitas*.

En la práctica, todos los soportes ejercen realmente *cargas superficiales distribuidas* sobre los elementos con que están en contacto. Las fuerzas y momentos concentrados que se muestran en la tabla 2-1 representan las *resultantes* de estas distribuciones de carga. Por supuesto, esta representación es una idealización; sin embargo, se usa aquí porque el área de la superficie sobre la que actúa la carga distribuida es considerablemente *menor* que la superficie *total* de los elementos conectados.









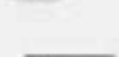





















El eslabón corto se usa para conectar las dos trabes del puente carretero y permite la expansión térmica de la cubierta.



Articulación típica empleada para soportar la trabe de acero de un puente ferroviario.

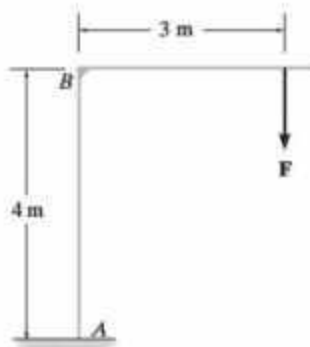
TABLA 2-1 Soportes para estructuras coplanares

Tipo de conexión	Símbolo idealizado	Reacción	Número de incógnitas
(1)  cable ligero  Eslabón sin peso			Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa en la dirección del cable o del eslabón.
(2)  rodillos   balancín	  		Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.
(3)  superficie de contacto lisa			Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.
(4)  collarín articulado liso			Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.
(5)  articulación o bisagra lisa			Dos incógnitas. Las reacciones son dos componentes de la fuerza.
(6)  deslizador  collarín conectado fijamente	 		Dos incógnitas. Las reacciones son una fuerza y un momento.
(7)  soporte fijo			Tres incógnitas. Las reacciones son el momento y las dos componentes de la fuerza.



estructura real

(a)



estructura idealizada

(b)

Figura 2-5

Estructura idealizada. Después de establecer las diferentes formas en que pueden idealizarse las conexiones de una estructura, ahora es posible analizar algunas de las técnicas empleadas para representar los distintos sistemas estructurales mediante modelos idealizados.

Como primer ejemplo, considere el brazo de grúa y el carro que se muestran en la figura 2-5a. Para el análisis estructural se puede ignorar el espesor de los dos elementos principales y suponer que la junta en *B* es rígida. Además, la conexión en *A* puede modelarse como un soporte fijo y es posible excluir los detalles del carro. Por lo tanto, los elementos de la estructura idealizada se representan mediante dos líneas conectadas, y la carga sobre el gancho se representa mediante una sola fuerza concentrada *F*, figura 2-5b. Esta estructura idealizada que se muestra aquí como un *dibujo de líneas* puede usarse ahora para aplicar los principios del análisis estructural, el cual conducirá finalmente al diseño de sus dos elementos principales.

Las vigas y trabes suelen emplearse para sostener los pisos en edificios. En particular, una *trabe* es el elemento principal para el soporte de las cargas del piso, mientras que los elementos más pequeños que tienen un claro más corto y que están conectados a las trabes se llaman *vigas*. A menudo, las cargas aplicadas sobre una viga o trabe se transmiten hacia éstas a través del piso que sostienen. Una vez más, es importante tener la capacidad de idealizar apropiadamente el sistema como una serie de modelos, los cuales pueden usarse para determinar de manera aproximada las fuerzas que actúan sobre los elementos. Considere, por ejemplo, la estructura utilizada para soportar una losa de piso en un edificio típico como el que se muestra en la figura 2-6a. Aquí la losa se sostiene mediante *viguetas de piso* situadas a intervalos regulares, las cuales a su vez están soportadas mediante las dos trabes laterales *AB* y *CD*. Para el análisis, es razonable suponer que las juntas son articuladas y/o que están conectadas mediante rodillos a las trabes y que éstas son articuladas y/o están conectadas mediante rodillos a las columnas. En la figura 2-6b se muestra la vista superior del plano estructural de este sistema. En este esquema “gráfico”, observe que las “líneas” que representan las viguetas no tocan las trabes y que las líneas de las trabes no tocan las columnas. Lo anterior simboliza conexiones articuladas y/o apoyadas en rodillos. Por otro lado,

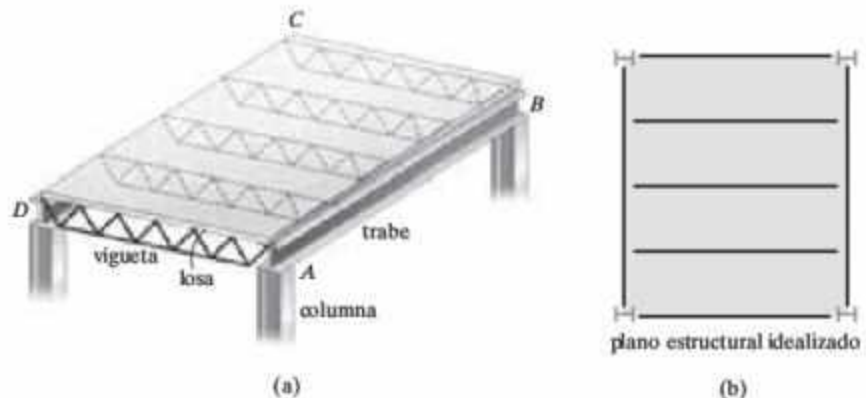


Figura 2-6

si el plano estructural trata de representar elementos conectados fijamente, como juntas soldadas en vez de simples uniones atornilladas, entonces las líneas para las vigas o traveses tocarían las columnas como en la figura 2-7. De manera similar, una viga saliente conectada fijamente estaría representada en la vista superior como se muestra en la figura 2-8. Si se usa la construcción de concreto reforzado, las vigas y traveses se representan mediante líneas dobles. Por lo general estos sistemas están conectados fijamente y, por lo tanto, los elementos se dibujan tocando los soportes. Por ejemplo, el gráfico estructural para el sistema de concreto vaciado en sitio de la figura 2-9a se muestra en su vista superior como en la figura 2-9b. Las líneas de las vigas se dibujan discontinuas debido a que están por debajo de la losa.

Las gráficas e idealizaciones estructurales para estructuras de madera son semejantes a las de metal. Por ejemplo, el sistema estructural que se muestra en la figura 2-10a representa la construcción de una viga de pared, donde la cubierta del techo se sostiene mediante vigas de madera, que transmiten la carga a un muro de mampostería. Puede suponerse que las vigas están simplemente apoyadas en la pared, de modo que el plano estructural idealizado sería como el que se muestra en la figura 2-10b.



viga conectada fijamente



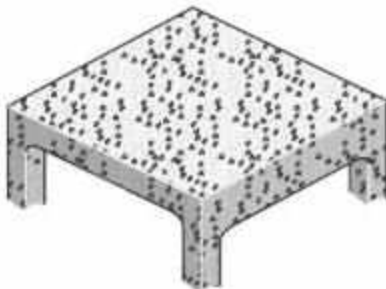
viga idealizada

Figura 2-7

viga saliente conectada fijamente



viga idealizada

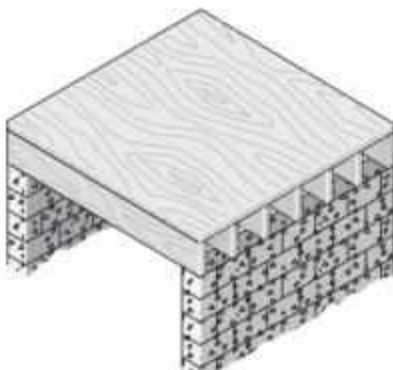
Figura 2-8

(a)



plano estructural idealizado

(b)

Figura 2-9

(a)



plano estructural idealizado

(b)

Figura 2-10



El marco estructural de este edificio consiste en viguetas de concreto, las cuales se formaron en el sitio usando placas metálicas. Estas viguetas están simplemente apoyadas sobre las traveses, que a su vez se apoyan simplemente en las columnas.

Cargas tributarias. Cuando las superficies planas como paredes, pisos o techos están soportadas por un marco estructural, es necesario determinar la forma en que se transmite la carga sobre estas superficies hacia los diversos elementos estructurales utilizados para su soporte. En general, existen dos formas en las que puede hacerse esto. La elección depende de la geometría del sistema estructural, el material del que está hecho y el método empleado para su construcción.

Sistema de una dirección. Una losa o una cubierta que se apoya de tal manera que transfiere su carga a los elementos de soporte mediante una acción en un solo sentido, se conoce como una *losa en una dirección*. Para ilustrar el método de transmisión de cargas, considere el sistema estructural que se muestra la figura 2-11a donde las vigas AB , CD y EF descansan sobre las traveses AE y BF . Si se coloca una carga uniforme de 100 lb/pie^2 sobre la losa, entonces puede suponerse que la viga central CD soporta la carga que actúa sobre el *área tributaria*, la cual se muestra con un sombreado oscuro en el plano del marco estructural de la figura 2-11b. Por lo tanto, el elemento CD se somete a una distribución de carga *lineal* de $(100 \text{ lb/pie}^2)(5 \text{ pies}) = 500 \text{ lb/pie}$, que se muestra en la viga idealizada de la figura 2-11c. Las reacciones sobre esta viga (2500 libras) se aplicarán después al centro de las traveses AE (y BF), que se muestran idealizadas en la figura 2-11d. Si se usa este mismo concepto, ¿es posible observar cómo el resto de la carga de la losa se transmite a los extremos de la trabe con un valor de 1250 libras?

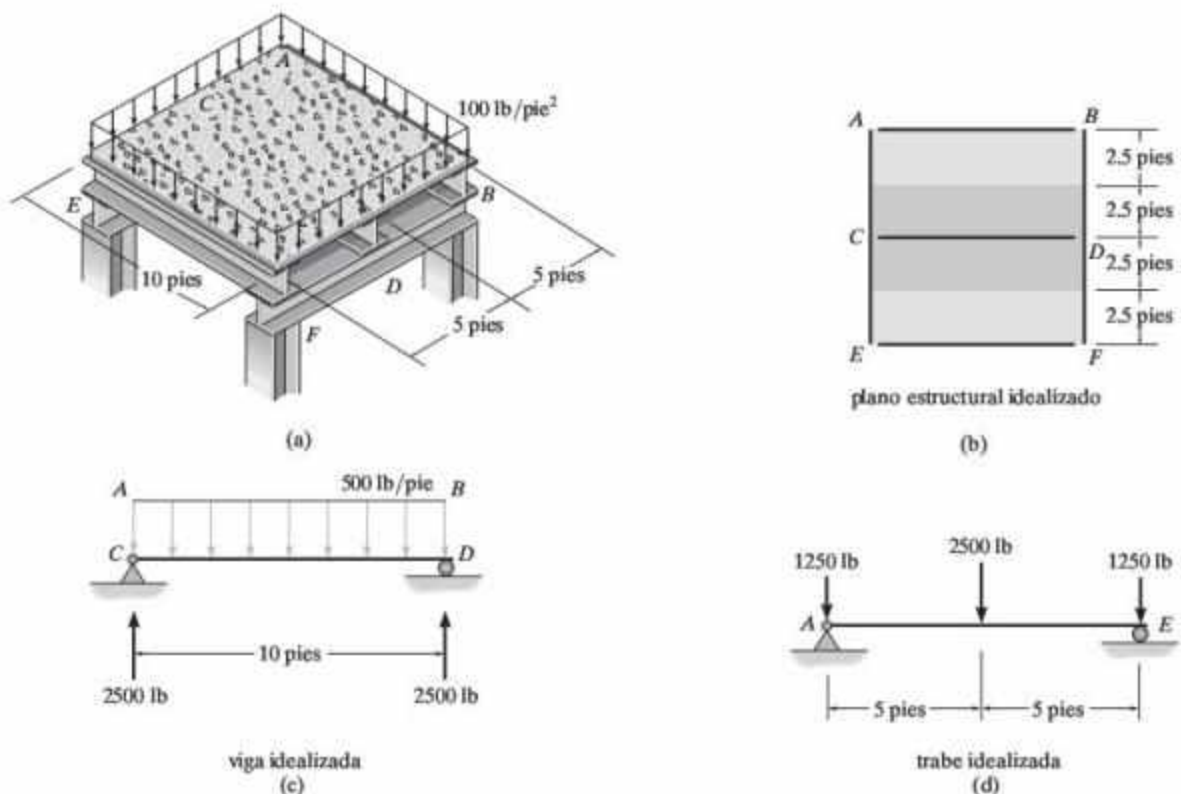


Figura 2-11



Ejemplo de la construcción de una losa en una dirección en un edificio con estructura de acero que tiene un piso de concreto vaciado sobre una cubierta de metal corrugado. Se considera que la carga sobre el piso se transmite a las vigas y no a las trabes.

Para algunos sistemas de piso, las vigas y trabes están conectadas a las columnas a la *misma altura*, como en la figura 2-12a. Si éste es el caso, en ocasiones la losa también puede considerarse como una “losa en una dirección”. Por ejemplo, si la losa es de concreto con refuerzo en *una sola dirección* o si el concreto se vacía en una cubierta de metal corrugado, como en la fotografía superior, entonces puede suponerse una acción de transmisión de carga en un solo sentido. Por otro lado, si la losa es plana en las partes superior e inferior y se refuerza en *dos direcciones*, entonces es necesario considerar la *posibilidad* de que la carga se transmita a los elementos de soporte en uno o dos sentidos. Por ejemplo, considere la losa y el plano estructural de la figura 2-12b. De acuerdo con el American Concrete Institute, código ACI 318, si $L_2 > L_1$ y si la *relación del claro* $(L_2/L_1) > 2$, la losa se comportará como una losa en una dirección, dado que como L_1 se hace más pequeño, las vigas AB, CD y EF proporcionan una mayor rigidez para soportar la carga.

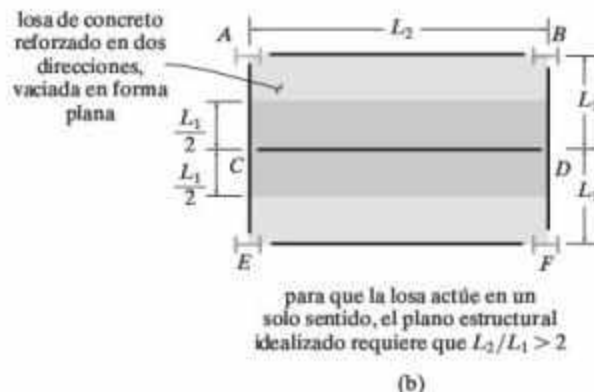
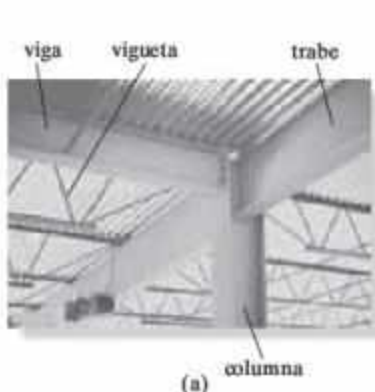


Figura 2-12

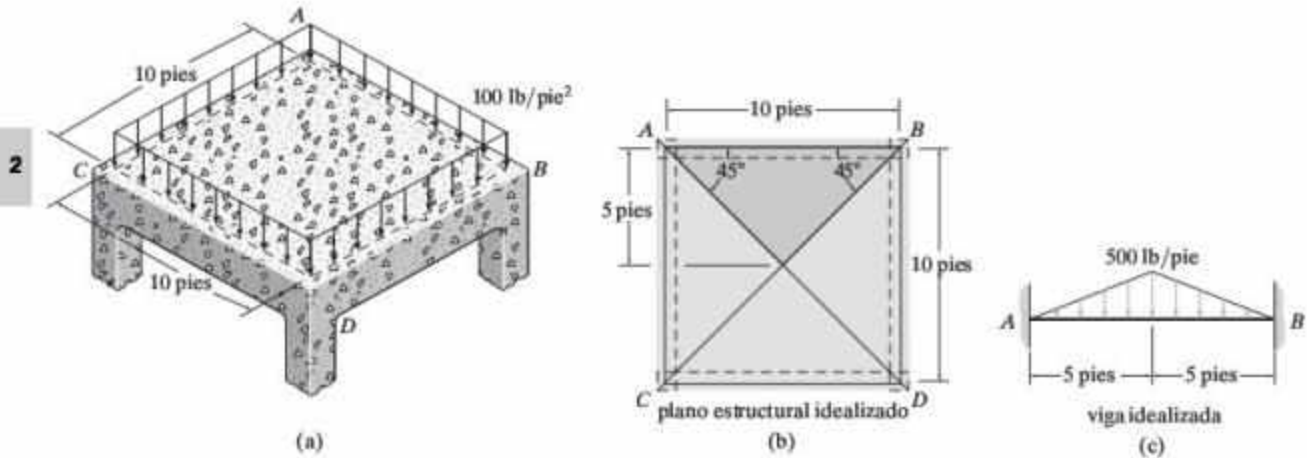


Figura 2-13

Sistema en dos direcciones. Si de acuerdo con el código de concreto ACI 318 la relación de soporte en la figura 2-12b es $(L_2/L_1) \leq 2$, se supone que la carga se transfiere a las vigas de soporte y a las trabes en dos direcciones. Cuando se presenta esta situación, la losa se denomina *losa en dos direcciones*. Para mostrar un método mediante el cual pueda estudiarse este caso, considere la losa cuadrada de concreto reforzado que se muestra en la figura 2-13a, la cual está soportada por cuatro vigas en el borde, de 10 pies de largo: AB , BD , DC , y CA . Aquí $L_2/L_1 = 1$. El *área tributaria* supuesta para la viga AB , debida a la acción de la losa en dos direcciones, se muestra con un sombreado oscuro en la figura 2-13b. Esta área se determina al construir líneas diagonales a 45° como se muestra en la figura. Por lo tanto, si se aplica una carga uniforme de 100 lb/pie^2 sobre la losa, se obtendrá una intensidad máxima de $(100 \text{ lb/pie}^2)(5 \text{ pies}) = 500 \text{ lb/pie}$ sobre el centro de la viga AB , lo que resulta en una distribución de cargas *triangular* como la que se muestra en la figura 2-13c. Para otras geometrías que ocasionan acciones en dos direcciones, puede emplearse un procedimiento similar. Por ejemplo, si $L_2/L_1 = 1.5$ entonces es necesario construir líneas cruzadas a 45° , como se muestra en la figura 2-14a. De esta forma, una carga de 100 lb/pie^2 colocada en la losa producirá cargas distribuidas *trapezoidales* y *triangulares* en los elementos AB y AC respectivamente, figuras 2-14b y 2-14c.

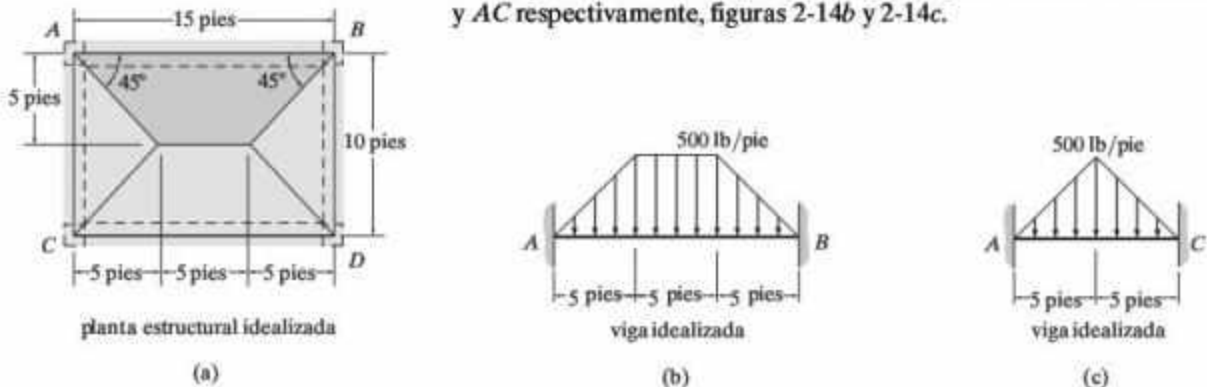


Figura 2-14

La capacidad de reducir una estructura real a una forma idealizada, como se muestra en estos ejemplos, sólo puede adquirirse a través de la experiencia. Para proporcionar una práctica a este respecto, los problemas de ejemplo y los problemas a resolver que se incluyen en este libro se presentan en forma realista, y el enunciado del problema ayuda a explicar cómo pueden modelarse las conexiones y los soportes mediante los elementos enlistados en la tabla 2-1. En la práctica de la ingeniería, si se tiene una duda sobre cómo modelar una estructura o transferir las cargas a los elementos, lo recomendable es considerar *varias* estructuras y cargas idealizadas para después diseñar la estructura real de modo que pueda resistir las cargas incluidas en todos los modelos idealizados.

EJEMPLO 2.1

El piso de un salón de clases debe estar soportado por las viguetas en forma de barra como se muestran en la figura 2-15a. Las viguetas tienen 15 pies de largo cada una y entre sus centros hay un espacio de 2.5 pies. El piso se hará de concreto ligero de 4 pulgadas de espesor. Ignore los pesos de las viguetas y de la cubierta de metal corrugado, y determine la carga que actúa a lo largo de cada vigueta.

SOLUCIÓN

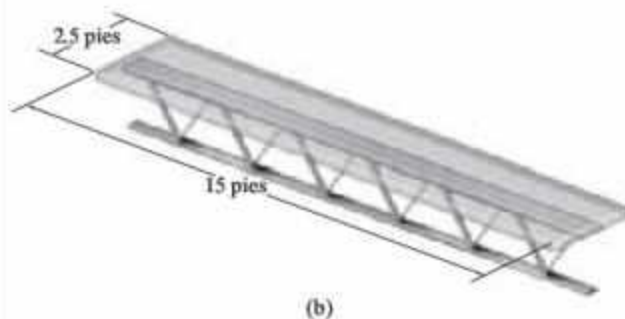
La carga muerta sobre el piso se debe al peso de la losa de concreto. Con base en la tabla 1-3 para 4 pulgadas de concreto ligero, ésta es $(4)(8 \text{ lb/pie}^2) = 32 \text{ lb/pie}^2$. De la tabla 1-4 se sabe que la carga viva para un salón de clases es de 40 lb/pie^2 . Así, la carga total del piso es de $32 \text{ lb/pie}^2 + 40 \text{ lb/pie}^2 = 72 \text{ lb/pie}^2$. Para el sistema del piso, $L_1 = 2.5$ pies y $L_2 = 15$ pies. Como $L_2/L_1 > 2$, la losa de concreto se trata como una losa en una dirección. El área tributaria de cada vigueta se muestra en la figura 2-15b. Por lo tanto, la carga uniforme en toda su longitud es

$$w = 72 \text{ lb/pie}^2 (2.5 \text{ pies}) = 180 \text{ lb/pie}$$

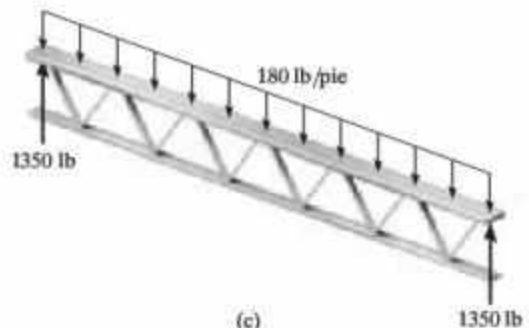
En la figura 2-15c se muestran esta carga y las reacciones finales sobre cada vigueta.



(a)



(b)



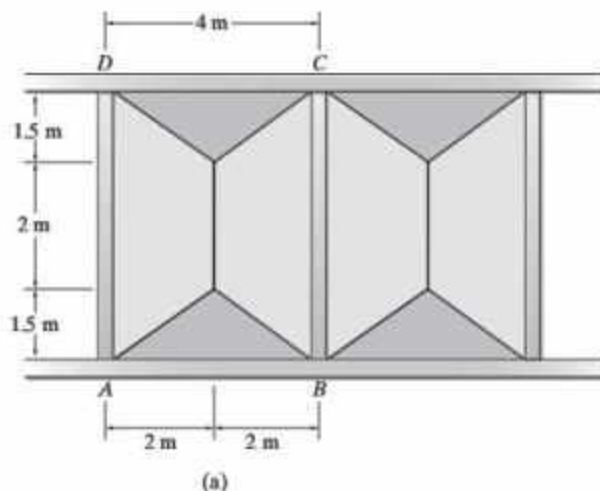
(c)

Figura 2-15

EJEMPLO 2.2

2

El techo plano del edificio con estructura de acero que se muestra en la fotografía está destinado a soportar una carga total de 2 kN/m^2 en toda su superficie. Determine la carga del techo dentro de la región $ABCD$ que se transmite a la viga BC . Las dimensiones se muestran en la figura 2-16a,



SOLUCIÓN

En este caso, $L_2 = 5 \text{ m}$ y $L_1 = 4 \text{ m}$. Como $L_2/L_1 = 1.25 < 2$, se tiene la acción de una losa en dos direcciones. En la figura 2-16a se muestra la carga tributaria a lo largo de cada viga en el borde, donde el área de carga trapezoidal con un sombreado claro se transmite al elemento BC . La intensidad más alta de esta carga es $(2 \text{ kN/m}^2)(2 \text{ m}) = 4 \text{ kN/m}$. En consecuencia, la distribución de carga a lo largo de BC es como se muestra en la figura 2-16b.

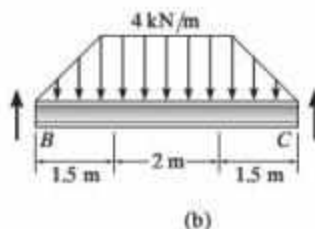


Figura 2-16

Este proceso de transmisión de la carga tributaria *también* debe calcularse para la región a la derecha de BC como se muestra en la fotografía; además, esta carga *también* debe colocarse en BC . Vea el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.3

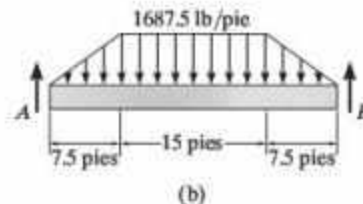
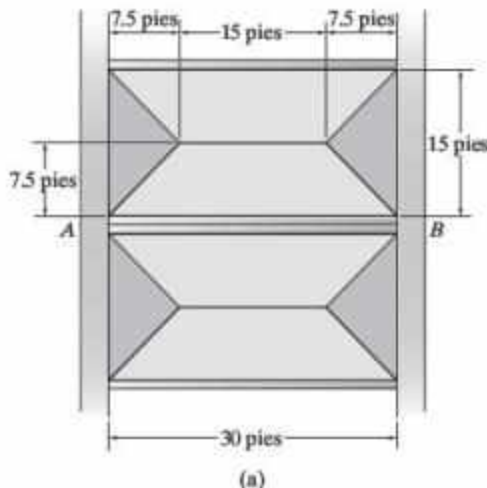
Las traveses de concreto que se muestran en la fotografía del estacionamiento para automóviles de pasajeros miden 30 pies y entre sus centros hay una separación de 15 pies. Si la losa del piso tiene 5 pulgadas de espesor, está hecha de concreto de piedra reforzado y la carga viva especificada es de 50 lb/pie² (vea la tabla 1.4), determine la carga distribuida que el sistema de piso transmite a cada travesa interior.

**SOLUCIÓN**

Aquí, $L_2 = 30$ pies y $L_1 = 15$ pies, de modo que $L_2/L_1 = 2$. Se tiene una losa en dos direcciones. De la tabla 1-2, para el concreto de piedra reforzado, el peso específico del concreto es 150 lb/pie³. Así, la carga de diseño para el piso es

$$p = 150 \text{ lb/pie}^3 \left(\frac{5}{12} \text{ pie} \right) + 50 \text{ lb/pie}^2 = 112.5 \text{ lb/pie}^2$$

Una carga distribuida trapezoidal se transmite a cada travesa interior AB desde cada uno de sus lados. La intensidad máxima de cada una de estas cargas distribuidas es $(112.5 \text{ lb/pie}^2)(7.5 \text{ pies}) = 843.75 \text{ lb/pie}$, de modo que en la travesa esta intensidad se convierte en $2(843.75 \text{ lb/pie}) = 1687.5 \text{ lb/pie}$, figura 2-17b. *Nota:* Para efectos de diseño, también debe tenerse en cuenta el peso de la travesa.

**Figura 2-17**

2.2 Principio de superposición

El principio de superposición es la base de gran parte de la teoría del análisis estructural. Es posible afirmar lo siguiente: *El desplazamiento total o las cargas internas (esfuerzos) en un punto de una estructura sometida a varias cargas externas puede determinarse al sumar los desplazamientos o cargas internas (esfuerzos) causados por cada una de las cargas externas que actúan por separado.* Para que este enunciado sea válido es necesario que exista una *relación lineal* entre las cargas, los esfuerzos y los desplazamientos.

Para aplicar el principio de superposición deben imponerse dos requisitos:

1. El material debe comportarse de una manera elástica lineal, de modo que la ley de Hooke sea válida y, por lo tanto, la carga será proporcional al desplazamiento.
2. La geometría de la estructura no debe experimentar un cambio significativo al aplicar las cargas; es decir, se aplica la teoría de los pequeños desplazamientos. Si se dan grandes desplazamientos, la posición y la orientación de las cargas cambiarán en forma significativa. Un ejemplo podría ser una barra delgada en voladizo sometida a una fuerza en su extremo.

A lo largo del presente texto deben cumplirse estos dos requisitos. Aquí, los materiales sólo presentan un comportamiento lineal elástico y los desplazamientos producidos por las cargas no cambian significativamente las direcciones de las cargas aplicadas ni las dimensiones usadas para calcular los momentos de las fuerzas.



Las paredes laterales de este edificio se utilizan para reforzar su estructura cuando la construcción está sujeta a grandes cargas de vientos huracanados, las cuales se aplican en las partes frontal o trasera del edificio. Estas paredes laterales se denominan "muros cortantes".

2.3 Ecuaciones de equilibrio

De la estática, debe recordarse que una estructura o uno de sus elementos está en equilibrio cuando se mantiene un balance de fuerzas y momentos. En general, esto requiere que se satisfagan las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas y de los momentos a lo largo de tres ejes independientes, a saber,

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{array} \quad (2-1)$$

No obstante, las partes principales que soportan carga en la mayoría de las estructuras se encuentran en un solo plano, y como las cargas también son coplanares, los requisitos anteriores para el equilibrio se reducen a

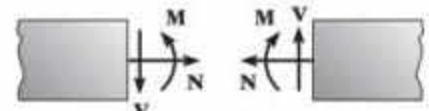
$$\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_O = 0 \end{array} \quad (2-2)$$

Aquí, ΣF_x y ΣF_y representan respectivamente las sumas algebraicas de las componentes x y y de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura o uno de sus elementos, y ΣM_O representa la suma algebraica de los momentos de estos componentes de fuerza alrededor de un eje que es perpendicular al plano x - y (el eje z) y que pasa a través del punto O .

Siempre que se apliquen estas ecuaciones, *primero es necesario dibujar un diagrama de cuerpo libre de la estructura o de sus elementos*. Si se selecciona un elemento, debe *aíslarse* de sus soportes y entorno para dibujar sólo su contorno. Es necesario mostrar todas las fuerzas y momentos de par que actúan *sobre el elemento*. A este respecto, los tipos de reacciones en los soportes pueden determinarse usando la tabla 2-1. También, debe recordarse que las fuerzas comunes a dos elementos actúan con magnitudes iguales pero en direcciones opuestas en los respectivos diagramas de cuerpo libre de los elementos.

Si es necesario determinar las *cargas internas* en un punto específico de un elemento, debe emplearse el *método de las secciones*. Esto requiere hacer un "corte" o sección perpendicular al eje del elemento en el punto donde se determinarán las cargas internas. Después se aísla un diagrama de cuerpo libre de cualquier segmento del "corte" del elemento y entonces se determinan las cargas internas a partir de las ecuaciones de equilibrio aplicadas a este segmento. Por lo general, las cargas internas que actúan en la sección consisten en una fuerza normal N , una fuerza cortante V y un momento flexionante M , como se muestra en la figura 2-18.

En la sección 2-5 se estudiarán los principios de la estática que se emplean para determinar las reacciones externas sobre las estructuras. Las cargas internas en los elementos estructurales se analizarán en el capítulo 4.



Cargas internas

Figura 2-18

2.4 Determinación y estabilidad

Antes de iniciar el análisis de fuerzas de una estructura, es necesario establecer la determinación y la estabilidad de la estructura.

Determinación. Las ecuaciones de equilibrio proporcionan las *condiciones necesarias y suficientes* para el equilibrio. Cuando todas las fuerzas en una estructura pueden determinarse estrictamente a partir de estas ecuaciones, la estructura se denomina *estáticamente determinada*. Las estructuras que tienen más fuerzas desconocidas que ecuaciones de equilibrio disponibles se llaman *estáticamente indeterminadas*. Como regla general, una estructura puede identificarse como estáticamente determinada o indeterminada al dibujar diagramas de cuerpo libre de todos sus elementos, o partes seleccionadas de sus elementos, para después comparar el total de fuerzas de reacción y componentes de momento desconocidos con el total de ecuaciones de equilibrio disponibles.* Para una estructura coplanar existen a lo sumo *tres* ecuaciones de equilibrio para cada parte, por lo que si hay un total de n partes y r componentes de fuerzas y momentos de reacción, se tiene que

$$r = 3n, \text{ es estáticamente determinada}$$

$$r > 3n, \text{ es estáticamente indeterminada}$$

(2-3)

En particular, si una estructura es *estáticamente indeterminada*, las ecuaciones adicionales necesarias para resolver las reacciones desconocidas se obtienen al relacionar las cargas aplicadas y las reacciones con el desplazamiento o la pendiente en diferentes puntos de la estructura. Estas ecuaciones, que se conocen como *ecuaciones de compatibilidad*, deben ser iguales en número al *grado de indeterminación* de la estructura. Las ecuaciones de compatibilidad incluyen las propiedades geométricas y físicas de la estructura y se estudiarán más adelante en el capítulo 10.

A continuación se considerarán algunos ejemplos para mostrar la forma de clasificar la determinación de una estructura. El primer ejemplo trata sobre vigas, el segundo sobre estructuras articuladas y el tercero sobre marcos. La clasificación de armaduras se estudiará en el capítulo 3.

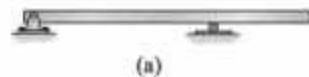
*El trazado de diagramas de cuerpo libre no es estrictamente necesario, puesto que también puede hacerse un "conteo mental" del número de incógnitas para compararlo con el número de ecuaciones de equilibrio.

EJEMPLO 2.4

Clasifique cada una de las vigas que se muestran en las figuras 2-19a a 2-19d como estáticamente determinada o estáticamente indeterminada. Si son estáticamente indeterminadas, indique el número de grados de indeterminación. Se supone que las vigas están sometidas a cargas externas conocidas que pueden actuar en cualquier lugar de las vigas.

SOLUCIÓN

Las *vigas compuestas*, es decir las de las figuras 2-19c y 2-19d, que se componen de elementos articulados, deben desensamblarse. Considere que en estos casos las fuerzas de reacción desconocidas que actúan entre cada elemento deben mostrarse en parejas iguales pero opuestas. En las figuras se muestran los diagramas de cuerpo libre de cada elemento. Después de aplicar $r = 3n$ o $r > 3n$, se indican las clasificaciones resultantes.



(a)

$$r = 3, n = 1, 3 = 3(1)$$



Estáticamente determinada

Resp.



(b)

$$r = 5, n = 1, 5 > 3(1)$$



Estáticamente indeterminada de segundo grado

Resp.



(c)

$$r = 6, n = 2, 6 = 3(2)$$



Estáticamente determinada

Resp.



(d)

$$r = 10, n = 3, 10 > 3(3)$$



Estáticamente indeterminada de primer grado

Resp.

Figura 2-19

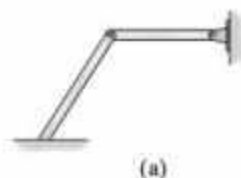
EJEMPLO 2.5

2

Clasifique cada una de las estructuras articuladas que se muestran en las figuras 2-20a a 2-20d como estáticamente determinada o estáticamente indeterminada. Si es estáticamente indeterminada, indique el número de grados de indeterminación. Se supone que las estructuras están sometidas a cargas externas arbitrarias conocidas y que pueden actuar en cualquier punto de las estructuras.

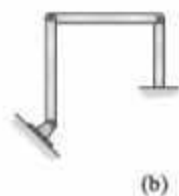
SOLUCIÓN

La clasificación de estructuras articuladas es semejante a la de las vigas. En las figuras se muestran los diagramas de cuerpo libre de los elementos. Al aplicar $r = 3n$ o $r > 3n$, se indican las clasificaciones resultantes.



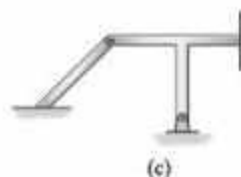
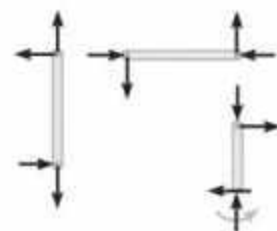
$r = 7, n = 2, 7 > 6$
Estaticamente indeterminada de primer grado

Resp.



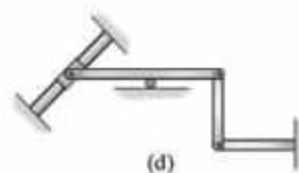
$r = 9, n = 3, 9 = 9$,
Estaticamente determinada

Resp.



$r = 10, n = 2, 10 > 6$,
Estaticamente indeterminada de cuarto grado

Resp.



$r = 9, n = 3, 9 = 9$,
Estaticamente determinada

Resp.

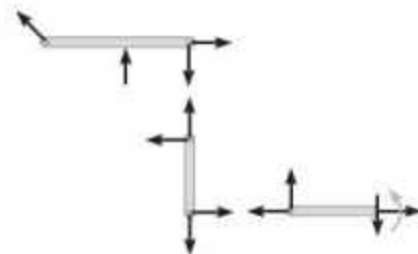


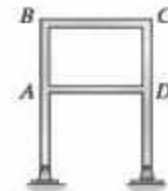
Figura 2-20

EJEMPLO 2.6

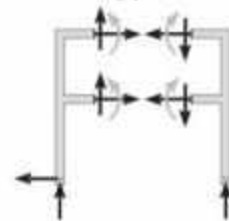
Clasifique cada uno de los marcos que se muestran en las figuras 2-21a y 2-21b como estáticamente determinado o estáticamente indeterminado. Si es estáticamente indeterminado, indique el número de grados de indeterminación. Se supone que los marcos están sometidos a cargas externas conocidas, las cuales pueden actuar en cualquier punto de los marcos.

SOLUCIÓN

A diferencia de las vigas y las estructuras articuladas que se mostraron en los ejemplos anteriores, los marcos están compuestos por elementos que se conectan entre sí mediante juntas rígidas. En ocasiones, los elementos forman circuitos (crujías) internos como en la figura 2-21a. Aquí $ABCD$ forma un circuito cerrado. Para clasificar estas estructuras es necesario emplear el método de las secciones y “cortar” el circuito en dos. En la figura se muestran los diagramas de cuerpo libre de las partes seccionadas, de manera que es posible clasificar el marco. Tenga en cuenta que sólo se necesita *una sección* a través del circuito, puesto que al determinar las incógnitas en la sección es posible encontrar las fuerzas internas en cualquier punto de los elementos, empleando el método de las secciones y las ecuaciones de equilibrio. En la figura 2-21b se muestra un segundo ejemplo de esto. Si bien el marco de la figura 2-21c no tiene circuitos cerrados, es posible emplear el mismo método con secciones verticales para clasificarlo. En este caso, *también* se puede dibujar su diagrama de cuerpo libre completo. La clasificación resultante se indica en cada figura.

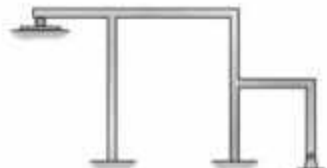
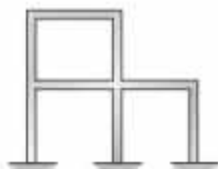


(a)

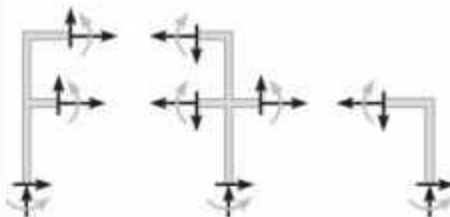


$r = 9, n = 2, 9 > 6$
Estáticamente indeterminado de
tercer grado *Resp.*

(a)

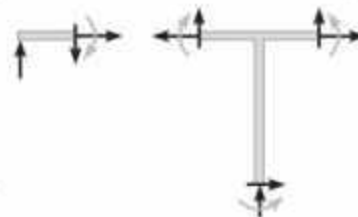


(Este marco no tiene circuitos cerrados.)

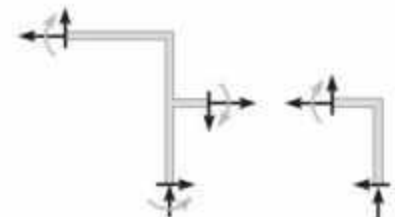


$r = 18, n = 3, 18 > 9$
Estáticamente indeterminado de
novenos grado *Resp.*

(b)



$r = 9, n = 1, 9 > 3$
Estáticamente indeterminado de
sexto grado *Resp.*



$r = 18, n = 4, 18 > 12$
Estáticamente indeterminado de
sexto grado *Resp.*

(c)

Figura 2-21

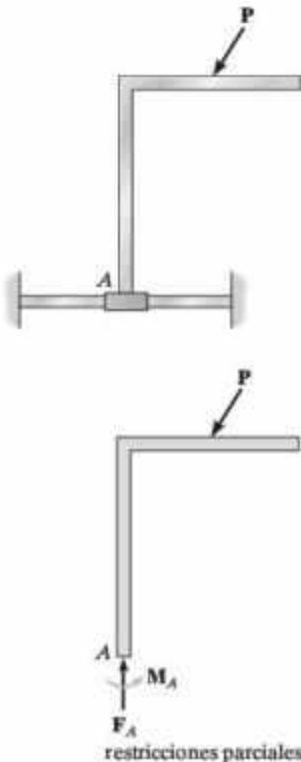


Figura 2-22

Estabilidad. Para garantizar el equilibrio de una estructura o de sus elementos, no sólo es necesario satisfacer las ecuaciones de equilibrio, sino que los elementos también deben estar correctamente sujetos o restringidos por sus soportes. Cuando no se han cumplido las condiciones adecuadas de restricción pueden presentarse dos situaciones distintas.

Restricciones parciales. En algunos casos, una estructura o uno de sus elementos pueden tener *menos* fuerzas reactivas que ecuaciones de equilibrio a satisfacer. Entonces la estructura se convierte sólo en *parcialmente restringida*. Por ejemplo, considere el elemento de la figura 2-22 con su correspondiente diagrama de cuerpo libre. Aquí, la ecuación $\Sigma F_x = 0$ no será satisfecha por las condiciones de carga y, por lo tanto, el elemento será inestable.

Restricciones impropias. En algunos casos puede haber tantas fuerzas desconocidas como ecuaciones de equilibrio; sin embargo, la *inestabilidad* o el movimiento de una estructura o sus elementos pueden desarrollarse debido a la *restricción impropia* de los soportes. Esto puede ocurrir si todas las *reacciones en los soportes son concurrentes* en un punto. En la figura 2-23 se muestra un ejemplo de esta situación. A partir del diagrama de cuerpo libre de la viga puede observarse que la suma de los momentos alrededor del punto *O* no será igual a cero ($Pd \neq 0$), por lo que se presentará rotación alrededor del punto *O*.

Otra forma en la cual la restricción impropia conduce a la inestabilidad ocurre cuando todas las *fuerzas reactivas son paralelas*. Un ejemplo de este caso se muestra en la figura 2-24. Aquí, cuando se aplica una fuerza inclinada *P*, la suma de fuerzas en la dirección horizontal no será igual a cero.

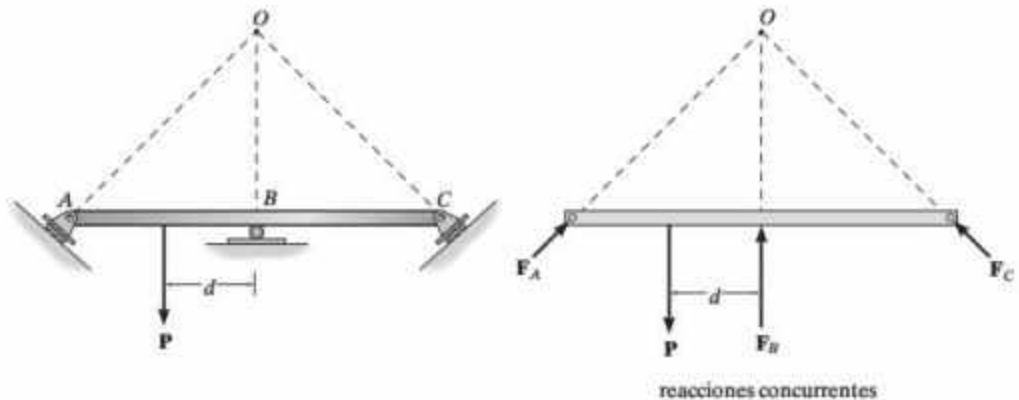


Figura 2-23

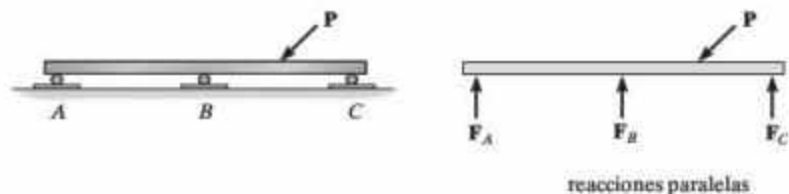


Figura 2-24

En general, una estructura será geoméricamente inestable —es decir, se moverá ligeramente o colapsará— si hay menos fuerzas de reacción que ecuaciones de equilibrio; o, si hay suficientes reacciones, se producirá inestabilidad si las líneas de acción de las fuerzas de reacción se cruzan en un punto común o son paralelas entre sí. Si la estructura se compone de varios elementos o componentes, la inestabilidad local de uno o varios de estos elementos puede determinarse generalmente mediante inspección. Si los elementos forman un mecanismo colapsable, la estructura será inestable. A continuación se formalizarán estos enunciados para una estructura coplanar con n elementos o componentes y r reacciones desconocidas. Dado que hay tres ecuaciones de equilibrio disponibles para cada elemento o componente, se tiene que

$r < 3n$	es inestable	(2-4)
$r \geq 3n$	es inestable si las reacciones de los elementos son concurrentes o paralelos o algunos de los componentes forman un mecanismo colapsable	

Si la estructura es inestable, *no importa* si es estáticamente determinada o indeterminada. En todos los casos, ese tipo de estructuras debe evitarse en la práctica.

Los siguientes ejemplos ilustran la forma en que las estructuras o sus elementos pueden clasificarse como estables o inestables. En el capítulo 3 se analizarán las estructuras en la forma de una armadura.



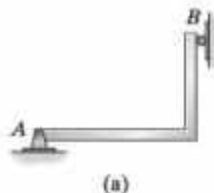
El refuerzo en K sobre este marco proporciona soporte lateral contra el viento y soporte vertical de las traveses del piso. Observe el uso de la lechada de concreto, que se aplica para aislar el acero y evitar que pierda su rigidez en caso de presentarse un incendio.

EJEMPLO 2.7

Clasifique cada una de las estructuras que se muestran en la figura 2-25a a 2-25d como estable o inestable. Se supone que las estructuras están sometidas a cargas externas arbitrarias conocidas.

SOLUCIÓN

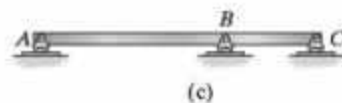
Las estructuras se clasifican de la manera indicada.

**Figura 2-25**

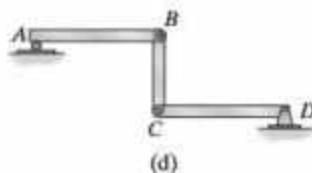
El elemento es *estable* puesto que las reacciones no son concurrentes ni paralelas. También es estáticamente determinado. **Resp.**



El elemento es *inestable* puesto que las tres reacciones son concurrentes en B. **Resp.**



La viga es *inestable* puesto que las tres reacciones son paralelas. **Resp.**

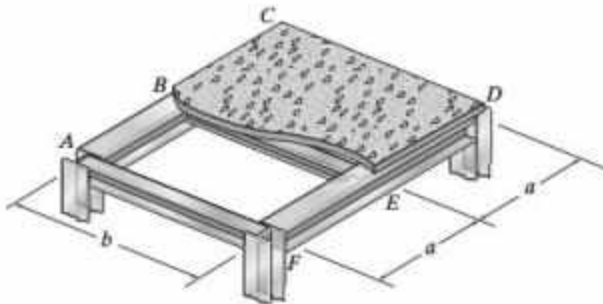


La estructura es *inestable* puesto que $r = 7$, $n = 3$, por lo que según la ecuación 2-4, $r < 3n$, $7 < 9$. Además, esto puede observarse por inspección, ya que AB puede desplazarse horizontalmente sin restricción. **Resp.**

PROBLEMAS

2-1. La estructura de acero se usa para sostener una losa de concreto de piedra reforzada que se emplea en una oficina. La losa tiene 200 mm de espesor. Dibuje las cargas que actúan a lo largo de los elementos BE y FED . Considere $a = 2$ m, $b = 5$ m. *Sugerencia:* Vea las tablas 1-2 y 1-4.

2-2. Resuelva el problema 2-1 con $a = 3$ m, $b = 4$ m.

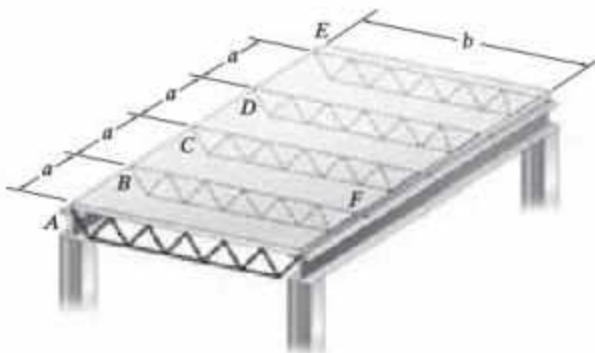


Probs. 2-1/2-2

2-3. El sistema de piso empleado en un aula consiste en una losa de concreto de piedra reforzada de 4 pulgadas. Dibuje las cargas que actúan a lo largo de la viga BF y la trabe lateral $ABCDE$. Considere $a = 10$ pies, $b = 30$ pies. *Sugerencia:* Vea las tablas 1-2 y 1-4.

***2-4.** Resuelva el problema 2-3 con $a = 10$ pies, $b = 15$ pies.

2-5. Resuelva el problema 2-3 con $a = 7.5$ pies, $b = 20$ pies.

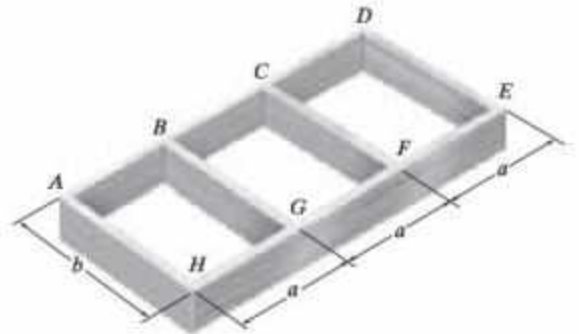


Probs. 2-3/2-4/2-5

2-6. El marco se usa para soportar un piso de madera de 2 pulgadas de espesor en una vivienda residencial. Dibuje las cargas que actúan a lo largo de los elementos BG y $ABCD$. Considere $a = 5$ pies, $b = 15$ pies. *Sugerencia:* Vea las tablas 1-2 y 1-4.

2-7. Resuelva el problema 2-6, con $a = 8$ pies, $b = 8$ pies.

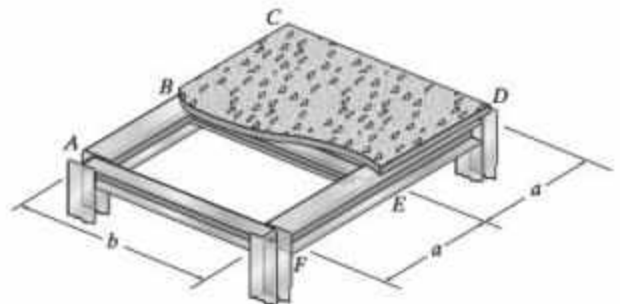
***2-8.** Resuelva el problema 2-6, con $a = 9$ pies y $b = 15$ pies.



Probs. 2-6/2-7/2-8

2-9. La estructura de acero se usa para soportar una losa de concreto de piedra reforzada de 4 pulgadas, la cual sostiene una carga viva uniforme de 500 lb/pie^2 . Dibuje las cargas que actúan a lo largo de los elementos BE y FED . Considere $b = 10$ pies y $a = 7.5$ pies. *Sugerencia:* Consulte la tabla 1-2.

2-10. Resuelva el problema 2-9, con $b = 12$ pies, $a = 4$ pies.



Probs. 2-9/2-10

2-11. Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable. Si es indeterminada, especifique el grado de indeterminación. Los soportes o conexiones deben sujetarse a los supuestos indicados.



(a)



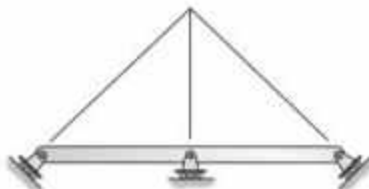
(b)



(c)



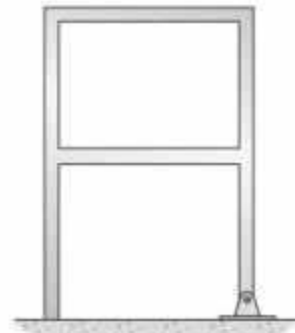
(d)



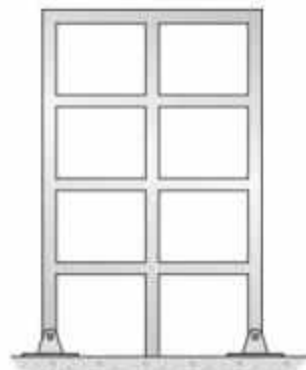
(e)

Prob. 2-11

***2-12.** Clasifique cada uno de los marcos como estáticamente determinados o indeterminados. Si es indeterminado, especifique el grado de indeterminación. Todas las juntas internas están conectadas fijamente.



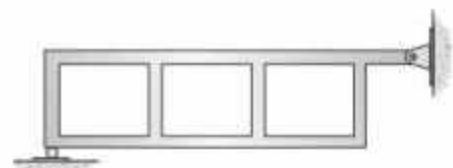
(a)



(b)



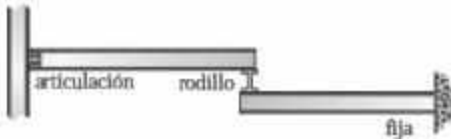
(c)



(d)

Prob. 2-12

2-13. Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada, estable o inestable. Si es indeterminada, especifique el grado de indeterminación. Los soportes o conexiones deben sujetarse a los supuestos indicados.



(a)



(b)



(c)

Prob. 2-13

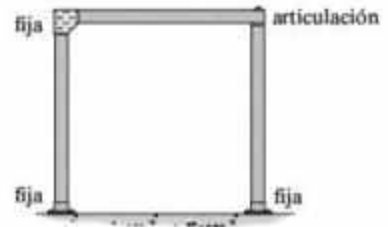
2-14. Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada, estable o inestable. Si es indeterminada, especifique el grado de indeterminación. Los soportes o conexiones deben sujetarse a los supuestos indicados.



(a)



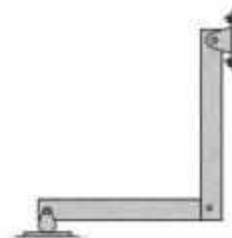
(b)



(c)

Prob. 2-14

2-15. Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable. Si es indeterminada, especifique el grado de indeterminación.



(a)



(b)



(c)

Prob. 2-15

***2-16.** Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable. Si es indeterminada, especifique el grado de indeterminación.



(a)



(b)



(c)



(d)

Prob. 2-16

2-17. Clasifique cada una de las estructuras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada, estable o inestable. Si es indeterminada, especifique el grado de indeterminación.



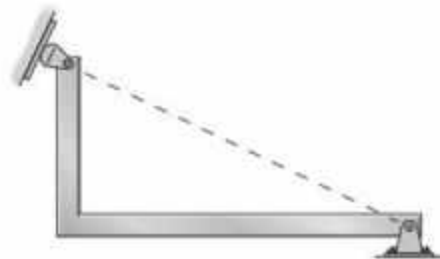
(a)



(b)



(c)



(d)

Prob. 2-17

2.5 Aplicación de las ecuaciones de equilibrio

En forma ocasional, los elementos de una estructura se conectan entre sí de modo que las juntas pueden asumirse como articulaciones. Los marcos y las armaduras para construcción son ejemplos típicos que suelen formarse de esta manera. Si una estructura coplanar articulada está bien restringida y no contiene ningún soporte o elemento adicional necesario para evitar el colapso, las fuerzas que actúan en las juntas y soportes pueden determinarse mediante la aplicación a cada elemento de las tres ecuaciones de equilibrio ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_O = 0$). Es comprensible que, una vez que se hayan calculado las fuerzas en las juntas, será posible determinar el tamaño de los elementos, las conexiones y los soportes con base en las especificaciones de los códigos de diseño.

Para ilustrar el método de análisis de fuerzas, considere el marco de tres elementos que se muestra en la figura 2-26a, el cual está sometido a las cargas P_1 y P_2 . En la figura 2-26b se muestran los diagramas de cuerpo libre de cada elemento. En total hay nueve incógnitas; sin embargo, pueden escribirse nueve ecuaciones de equilibrio, tres para cada elemento, por lo que el problema es *estáticamente determinado*. Para la solución real *también* es posible, y conveniente a veces, considerar una porción del marco o su totalidad al momento de aplicar alguna de estas nueve ecuaciones. Por ejemplo, en la figura 2-26c se muestra un diagrama de cuerpo libre de todo el marco. Se podrían determinar las tres reacciones A_x , A_y y C_x sobre este sistema articulado "rígido", para después analizar *dos* de *cualquiera* de sus elementos, figura 2-26b, y obtener las otras seis incógnitas. Además, las respuestas pueden comprobarse, en parte mediante la aplicación de las tres ecuaciones de equilibrio en el "tercer" elemento restante. En resumen, este problema puede resolverse al escribir *un máximo* de nueve ecuaciones de equilibrio usando diagramas de cuerpo libre de cualesquier elementos y/o combinaciones de elementos conectados. Si se escriben más de nueve ecuaciones, habría redundancia sobre las nueve ecuaciones originales y algunas de éstas sólo servirían para comprobar resultados.

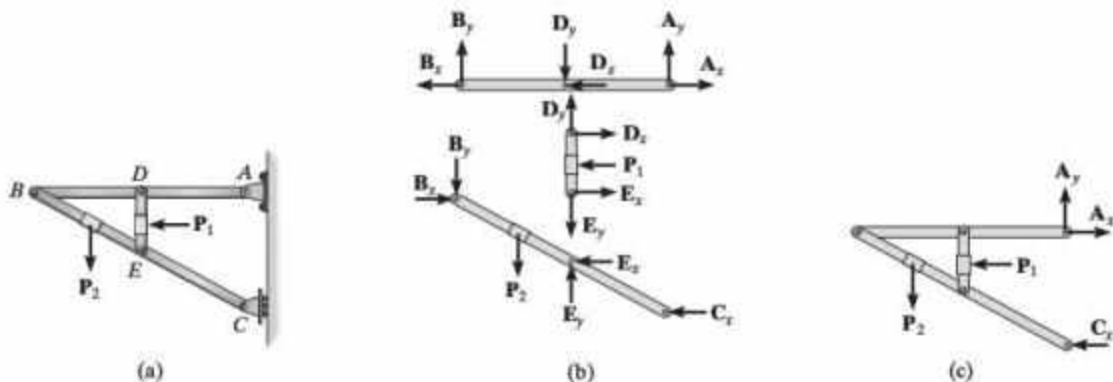


Figura 2-26

Considere ahora el marco de dos elementos que se muestra en la figura 2-27a. Aquí, los diagramas de cuerpo libre de los elementos muestran seis incógnitas, figura 2-27b; sin embargo, es posible escribir seis ecuaciones de equilibrio, tres para cada elemento, por lo que de nuevo el problema es estáticamente determinado. Al igual que en el caso anterior, también puede emplearse un diagrama de cuerpo libre de todo el marco para una parte del análisis, figura 2-27c. Aunque, como se muestra, el marco tiene tendencia al colapso si no cuenta con sus soportes, al girar sobre la articulación en B , esto no sucederá puesto que el sistema de fuerzas que actúan sobre el marco todavía pueden mantenerlo en equilibrio. Por lo tanto, si así se desea, las seis incógnitas pueden determinarse mediante la aplicación de las tres ecuaciones de equilibrio a todo el marco, figura 2-27c, y también al aplicar estas ecuaciones a uno de sus elementos.

Los dos ejemplos anteriores muestran que si una estructura está bien soportada y no contiene ningún apoyo o elemento adicional que sea necesario para evitar el colapso, el marco se convierte en estáticamente determinado y, por lo tanto, las fuerzas desconocidas en los soportes y conexiones pueden determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio aplicadas a cada elemento. Además, si la estructura se mantiene rígida (no colapsable) al retirar los soportes (figura 2-26c), las tres reacciones en los soportes pueden determinarse mediante la aplicación de las tres ecuaciones de equilibrio a toda la estructura. Sin embargo, si la estructura no parece ser rígida (colapsable) después de retirar los soportes (figura 2-27c), será necesario desmembrar la estructura y considerar el equilibrio de los elementos individuales a fin de obtener suficientes ecuaciones para determinar *todas* las reacciones en los soportes.

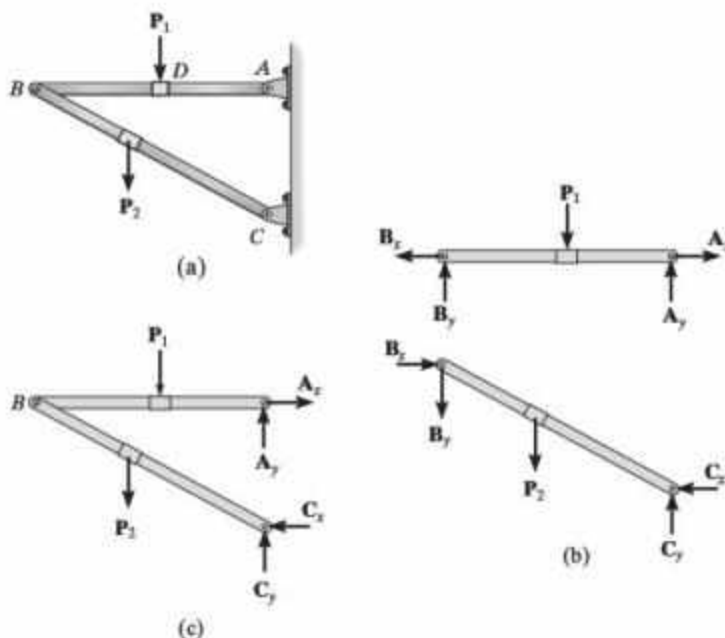


Figura 2-27

Procedimiento de análisis

2

El siguiente procedimiento proporciona un método para determinar las *reacciones en las juntas* de estructuras compuestas por elementos articulados.

Diagramas de cuerpo libre

- Desensamble la estructura y dibuje un diagrama de cuerpo libre de cada elemento. Además, puede ser conveniente complementar el diagrama de cuerpo libre de un elemento con el diagrama de cuerpo libre de *toda la estructura*. Con este diagrama es posible determinar todas o algunas de las reacciones en los soportes.
- Recuerde que las fuerzas de reacción comunes a dos elementos actúan con magnitudes iguales pero con direcciones opuestas en los respectivos diagramas de cuerpo libre de los elementos.
- Deben identificarse todos los elementos de dos fuerzas. Sobre estos elementos, independientemente de su forma, no actúan cargas externas y, por lo tanto, sus diagramas de cuerpo libre se representan con las fuerzas colineales iguales pero opuestas actuando en sus extremos.
- En muchos casos es posible establecer por inspección el sentido correcto de la flecha que indica la dirección de una fuerza o momento desconocido; sin embargo, si esto parece difícil, el sentido de la fuerza puede suponerse arbitrariamente.

Ecuaciones de equilibrio

- Cuente el número total de incógnitas para asegurar que se pueda escribir un número equivalente de ecuaciones de equilibrio para su solución. A excepción de los elementos de dos fuerzas, recuerde que generalmente pueden escribirse tres ecuaciones de equilibrio para cada elemento.
- En muchas ocasiones la solución de las incógnitas será sencilla, si la ecuación de momento $\Sigma M_O = 0$ se aplica alrededor de un punto (O) que se encuentre en la intersección de las líneas de acción de tantas fuerzas desconocidas como sea posible.
- Al aplicar las ecuaciones de fuerza $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, oriente los ejes x y y a lo largo de las líneas que ofrecen la reducción de fuerzas más simple en sus componentes x y y .
- Si la solución de las ecuaciones de equilibrio proporciona una magnitud *negativa* para una fuerza o momento desconocido, esto indica que el sentido de la fuerza es opuesto al que se supuso en el diagrama de cuerpo libre.

EJEMPLO 2.8

Determine las reacciones sobre la viga que se muestra en la figura 2-28a.

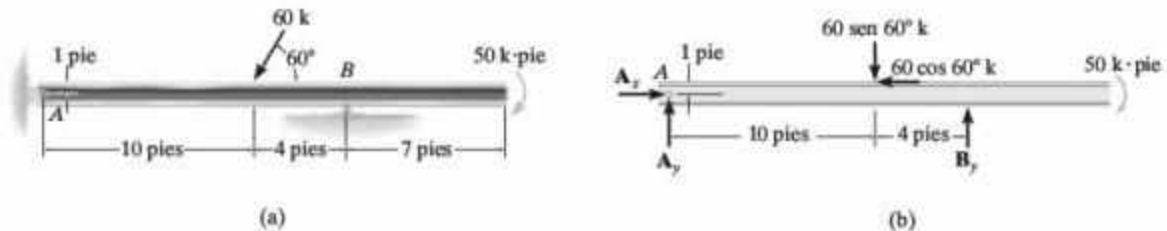


Figura 2-28

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 2-28b, la fuerza de 60 k se resuelve en sus componentes x y y . Por otra parte, la línea dimensional de 7 pies no es necesaria puesto que un momento de par es un *vector libre* y, por lo tanto, puede actuar en cualquier punto de la viga para los fines de calcular las reacciones externas.

Ecuaciones de equilibrio. Al aplicar las ecuaciones 2-2 en una secuencia y al emplear los resultados calculados previamente, se tiene

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & A_x - 60 \cos 60^\circ &= 0 & A_x &= 30.0 \text{ k} & \text{Resp.} \\
 \downarrow + \Sigma M_A &= 0; & -60 \sin 60^\circ(10) + 60 \cos 60^\circ(1) + B_y(14) - 50 &= 0 & B_y &= 38.5 \text{ k} & \text{Resp.} \\
 \uparrow + \Sigma F_y &= 0; & -60 \sin 60^\circ + 38.5 + A_y &= 0 & A_y &= 13.4 \text{ k} & \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.9

Determine las reacciones sobre la viga que se muestra en la figura 2-29a.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 2-29b, la carga trapezoidal distribuida se divide en una carga triangular y una carga uniforme. Las áreas bajo el triángulo y el rectángulo representan las fuerzas resultantes. Estas fuerzas actúan a través del centroide de sus áreas correspondientes.

Ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & A_x &= 0 & \text{Resp.} \\
 \uparrow + \Sigma F_y &= 0; & A_y - 60 - 60 &= 0 & A_y &= 120 \text{ kN} & \text{Resp.} \\
 \downarrow + \Sigma M_A &= 0; & -60(4) - 60(6) + M_A &= 0 & M_A &= 600 \text{ kN} \cdot \text{m} & \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

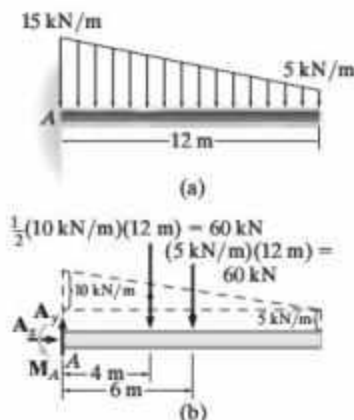


Figura 2-29

EJEMPLO 2.10

Determine las reacciones sobre la viga mostrada en la figura 2-30a. Suponga que A es una articulación y el soporte en B es un rodillo (superficie lisa).

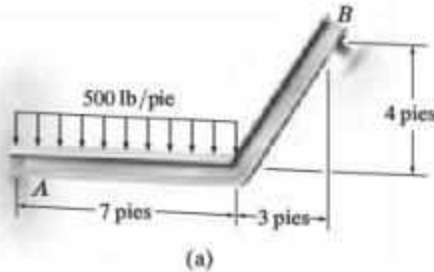
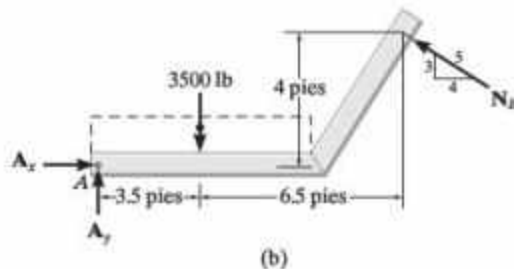
**Figura 2-30****SOLUCIÓN**

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 2-30b, el soporte ("rodillo") en B ejerce una *fuerza normal* sobre la viga en su punto de contacto. La línea de acción de esta fuerza está definida por el triángulo 3-4-5.



Ecuaciones de equilibrio. Al descomponer N_B en sus componentes x y y , y al sumar los momentos alrededor de A se obtiene una solución directa para N_B . ¿Por qué? Con este resultado es posible obtener A_x y A_y .

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad -3500(3.5) + \left(\frac{4}{5}\right)N_B(4) + \left(\frac{3}{5}\right)N_B(10) = 0 \quad \text{Resp.}$$

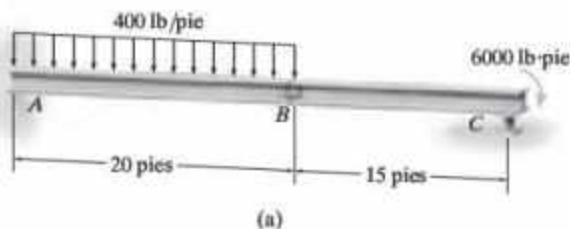
$$N_B = 1331.5 \text{ lb} = 1.33 \text{ k}$$

$$\rightarrow + \Sigma F_x = 0; \quad A_x - \frac{4}{5}(1331.5) = 0 \quad A_x = 1.07 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

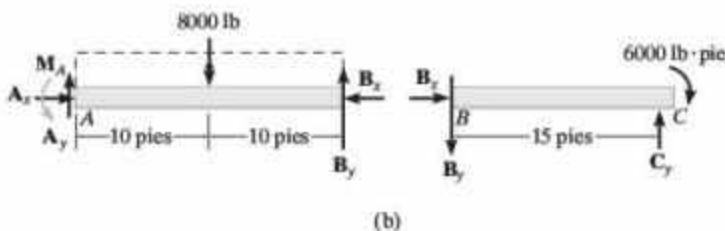
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 3500 + \frac{3}{5}(1331.5) = 0 \quad A_y = 2.70 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 2.11

La viga compuesta que se muestra en la figura 2-31a está fija en *A*. Determine las reacciones en *A*, *B* y *C*. Suponga que la conexión en *B* es una articulación y que *C* es un rodillo.

**Figura 2-31****SOLUCIÓN**

Diagramas de cuerpo libre. En la figura 2-31b se muestra el diagrama de cuerpo libre de cada segmento. ¿Por qué este problema es estáticamente determinado?



Ecuaciones de equilibrio. Hay seis incógnitas. Al aplicar las seis ecuaciones de equilibrio y emplear los resultados calculados previamente, se tiene

Segmento *BC*:

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad -6000 + B_y(15) = 0 \quad B_y = 400 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -400 + C_y = 0 \quad C_y = 400 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad B_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

Segmento *AB*:

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad M_A - 8000(10) + 400(20) = 0$$

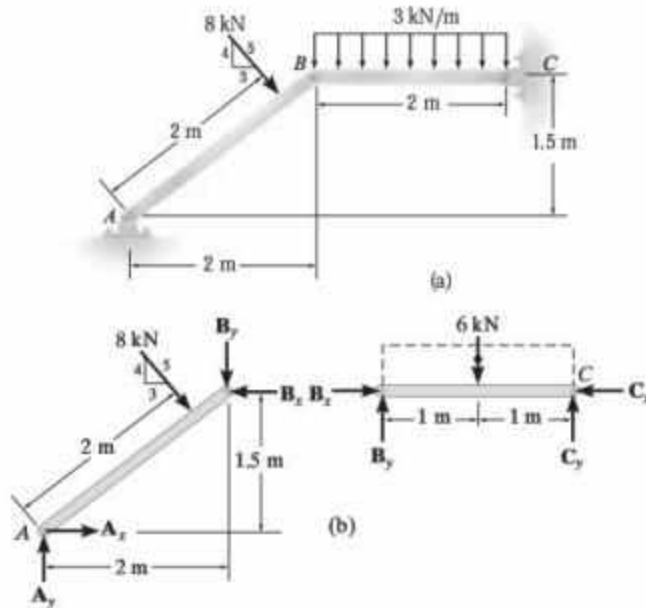
$$M_A = 72.0 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 8000 + 400 = 0 \quad A_y = 7.60 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x - 0 = 0 \quad A_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 2.12

Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en las articulaciones A , B y C del marco de dos elementos que se muestra en la figura 2-32a.

**Figura 2-32****SOLUCIÓN**

Diagramas de cuerpo libre. En la figura 2-32b se muestra el diagrama de cuerpo libre de cada elemento.

Ecuaciones de equilibrio. La aplicación de las seis ecuaciones de equilibrio en la siguiente secuencia permite una solución directa para cada una de las seis incógnitas.

Elemento BC :

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad -B_y(2) + 6(1) = 0 \quad B_y = 3 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Elemento AB :

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad -8(2) - 3(2) + B_x(1.5) = 0 \quad B_x = 14.7 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\rightarrow + \Sigma F_x = 0; \quad A_x + \frac{3}{5}(8) - 14.7 = 0 \quad A_x = 9.87 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\uparrow + \Sigma F_y = 0; \quad A_y - \frac{4}{5}(8) - 3 = 0 \quad A_y = 9.40 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Elemento BC :

$$\rightarrow + \Sigma F_x = 0; \quad 14.7 - C_x = 0 \quad C_x = 14.7 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\uparrow + \Sigma F_y = 0; \quad 3 - 6 + C_y = 0 \quad C_y = 3 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 2.13

2

El lado de la construcción que se muestra en la figura 2-33a está sometido a una carga de viento que crea una presión uniforme *normal* de 15 kPa sobre el lado en barlovento y una presión de succión de 5 kPa en el lado en sotavento. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en las conexiones articuladas *A*, *B* y *C* en el arco a dos aguas que da soporte a la construcción.

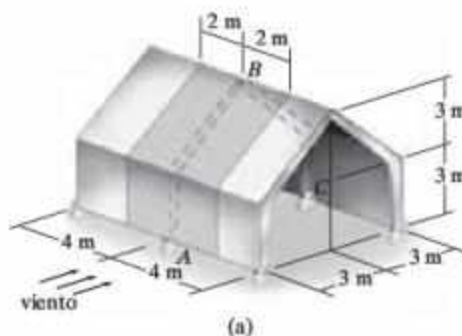
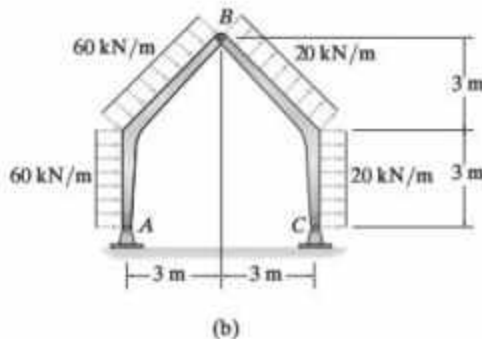


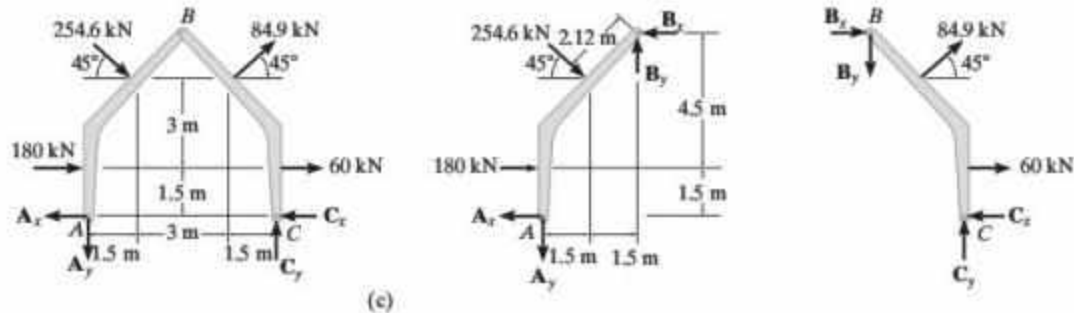
Figura 2-33

SOLUCIÓN

Como la carga está distribuida uniformemente, el arco central a dos aguas soporta una carga que actúa sobre las paredes y el techo del área tributaria que se muestra con un sombreado oscuro. Esto representa una carga distribuida uniforme de $(15 \text{ kN/m}^2)(4 \text{ m}) = 60 \text{ kN/m}$ en el lado de barlovento y $(5 \text{ kN/m}^2)(4 \text{ m}) = 20 \text{ kN/m}$ en el lado de sotavento, figura 2-33b.



Diagramas de cuerpo libre. Si se simplifican las cargas distribuidas, los diagramas de cuerpo libre de todo el marco y cada una de sus partes son como se muestran en la figura 2-33c.



Ecuaciones de equilibrio. La solución de ecuaciones simultáneas se evita al aplicar las ecuaciones de equilibrio en la secuencia siguiente y usando los resultados calculados previamente.*

Marco completo:

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_A = 0; & -(180 + 60)(1.5) - (254.6 + 84.9) \cos 45^\circ (4.5) \\ & - (254.6 \sin 45^\circ)(1.5) + (84.9 \sin 45^\circ)(4.5) + C_y(6) = 0 \\ & C_y = 240.0 \text{ kN} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0; & -A_y - 254.6 \sin 45^\circ + 84.9 \sin 45^\circ + 240.0 = 0 \\ & A_y = 120.0 \text{ kN} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Elemento AB:

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_B = 0; & -A_x(6) + 120.0(3) + 180(4.5) + 254.6(2.12) = 0 \\ & A_x = 285.0 \text{ kN} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; & -285.0 + 180 + 254.6 \cos 45^\circ - B_x = 0 \\ & B_x = 75.0 \text{ kN} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0; & -120.0 - 254.6 \sin 45^\circ + B_y = 0 \\ & B_y = 300.0 \text{ kN} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Elemento CB:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; & -C_x + 60 + 84.9 \cos 45^\circ + 75.0 = 0 \\ & C_x = 195.0 \text{ kN} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

*El problema también puede resolverse al aplicar las seis ecuaciones de equilibrio sólo a los dos elementos. Si se hace esto, es recomendable sumar primero los momentos alrededor del punto A sobre el elemento AB, después los del punto C sobre el elemento CB. De esta manera resultan dos ecuaciones que deben resolverse simultáneamente para obtener B_x y B_y .

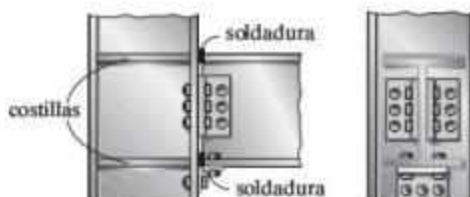
REPASO DEL CAPÍTULO

2

Soportes—A menudo se supone que los elementos estructurales deben estar conectados mediante articulaciones si entre ellos puede ocurrir una rotación relativa leve, y que deben estar conectados fijamente si la rotación no es posible.

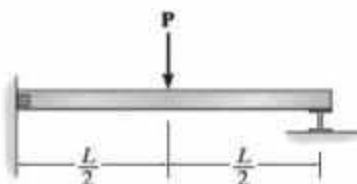


conexión "articulada" típica (de metal)

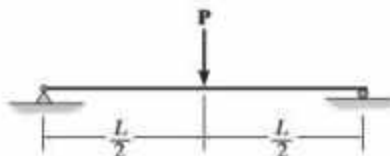


conexión "fija" típica (de metal)

Estructuras idealizadas—Cuando se realizan supuestos acerca de soportes y conexiones, al considerar por ejemplo que son rodillos, articulaciones o fijos, los elementos pueden representarse como líneas, por lo que es posible establecer un modelo idealizado que puede usarse en el análisis.

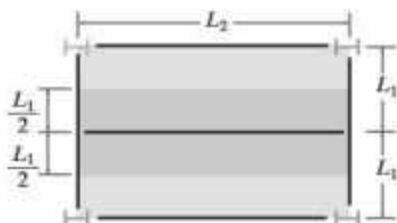


viga real

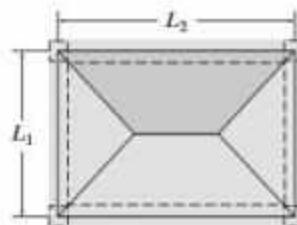


viga idealizada

Las cargas tributarias sobre losas pueden determinarse al clasificar, en primer lugar, la losa como en una dirección o en dos direcciones. Como regla general, si L_2 es la dimensión más grande y $L_2/L_1 > 2$, la losa se comportará como una losa en una dirección. Si $L_2/L_1 \leq 2$, la losa se comportará como una losa en dos direcciones.



la acción de una losa en una dirección requiere que $L_2/L_1 > 2$



la acción de una losa en dos direcciones requiere que $L_2/L_1 \leq 2$

Principio de superposición— Las cargas o los desplazamientos pueden sumarse siempre que el material sea elástico lineal y que sólo ocurran pequeños desplazamientos de la estructura.

Equilibrio— Las estructuras estáticamente determinadas pueden analizarse al desensamblarlas y al aplicar las ecuaciones de equilibrio a cada elemento. El análisis de una estructura estáticamente determinada requiere, primero, dibujar el diagrama de cuerpo libre de todos los elementos, para después aplicar las ecuaciones de equilibrio a cada elemento.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_O &= 0\end{aligned}$$

El número de ecuaciones de equilibrio para los n elementos de una estructura es $3n$. Si la estructura tiene r reacciones, entonces la estructura es *estáticamente determinada* si

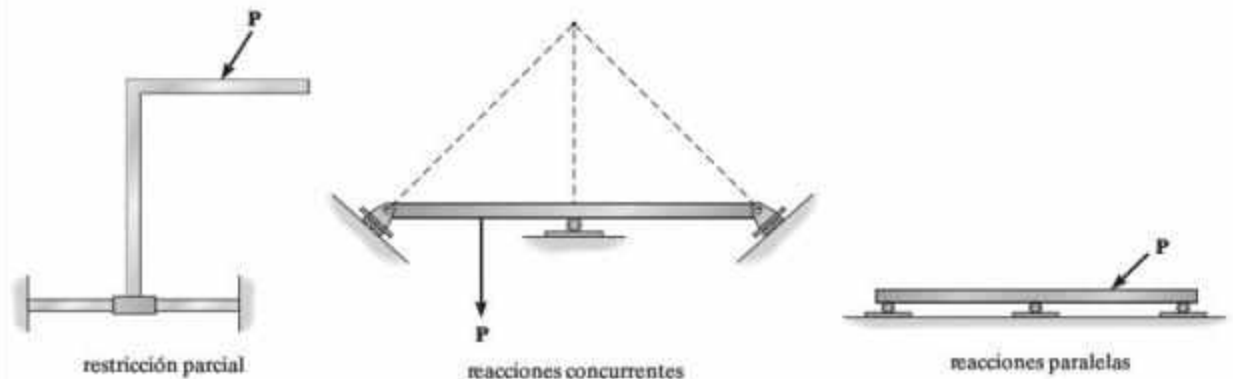
$$r = 3n$$

y *estáticamente indeterminada* si

$$r > 3n$$

El número adicional de ecuaciones necesarias para obtener la solución se conoce como el grado de indeterminación.

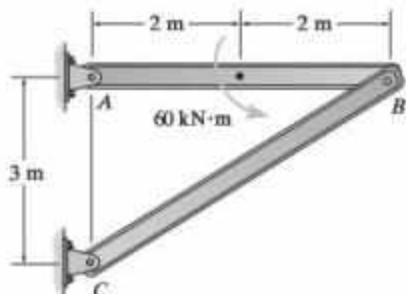
Estabilidad— Si hay menos reacciones que ecuaciones de equilibrio, entonces la estructura será inestable porque está restringida parcialmente. También puede presentarse una inestabilidad debida a las restricciones impropias, si las líneas de acción de las reacciones son concurrentes en un punto o paralelas entre sí.



PROBLEMAS FUNDAMENTALES

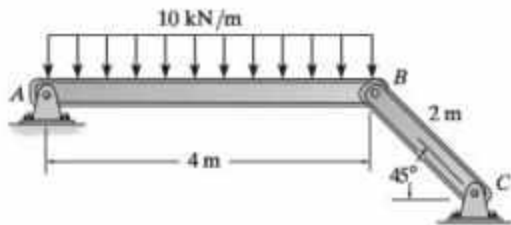
2

F2-1. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en las articulaciones A , B y C .



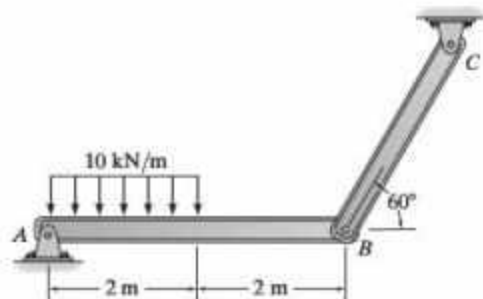
F2-1

F2-2. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en las articulaciones A , B y C .



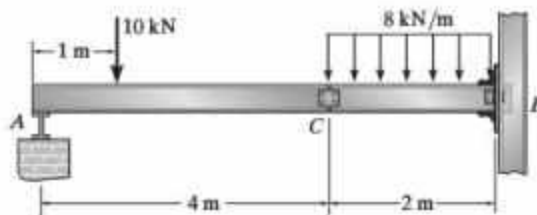
F2-2

F2-3. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en las articulaciones A , B y C .



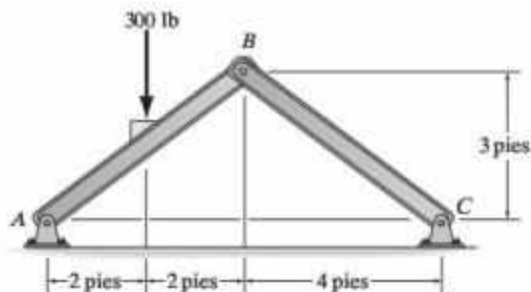
F2-3

F2-4. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el soporte de rodillos A y en el soporte fijo B .



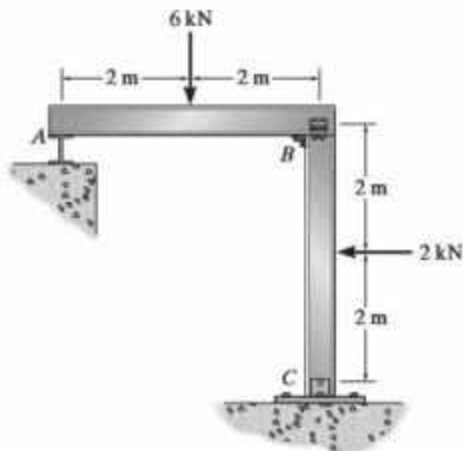
F2-4

F2-5. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en las articulaciones A , B y C del marco de dos elementos.



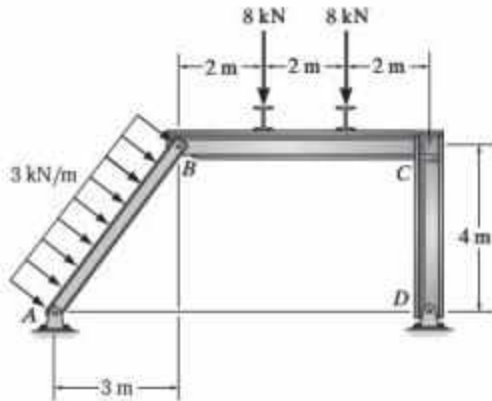
F2-5

F2-6. Determine las componentes de la reacción en el soporte de rodillos A y en la articulación C . La junta B está conectada fijamente.



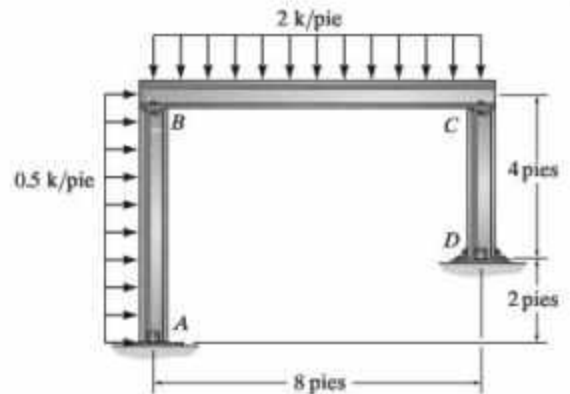
F2-6

F2-7. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en las articulaciones A , B y D del marco de tres elementos. La junta en C está conectada fijamente.



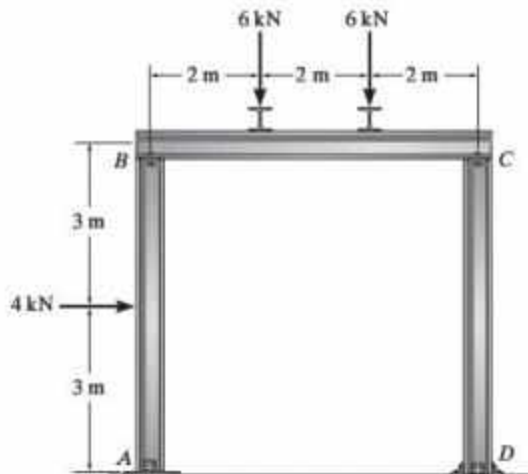
F2-7

F2-9. Determine las componentes de la reacción en el soporte fijo D y en las articulaciones A , B y C del marco de tres elementos. No tome en cuenta el espesor de los elementos.



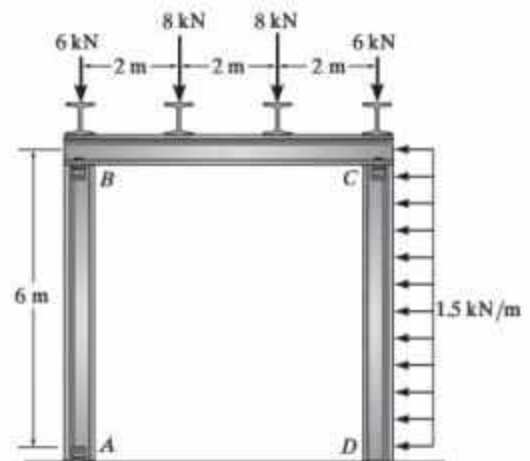
F2-9

F2-8. Determine las componentes de la reacción en el soporte fijo D y en las articulaciones A , B y C del marco de tres elementos. No tome en cuenta el espesor de los elementos.



F2-8

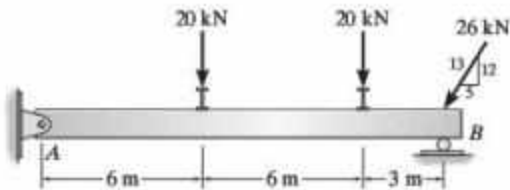
F2-10. Determine las componentes de la reacción en el soporte fijo D y en las articulaciones A , B y C del marco de tres elementos. No tome en cuenta el espesor de los elementos.



F2-10

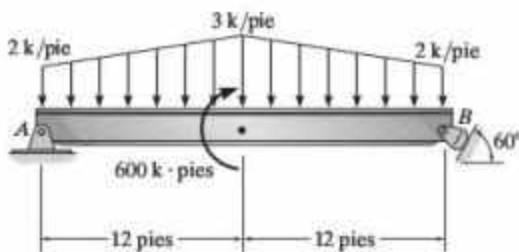
PROBLEMAS

2-18. Determine las reacciones sobre la viga. No tome en cuenta su espesor.



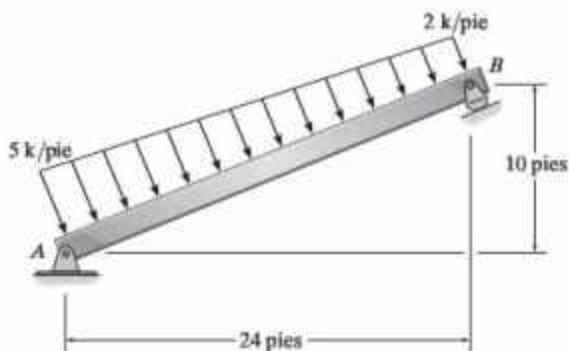
Prob. 2-18

2-19. Determine las reacciones sobre la viga.



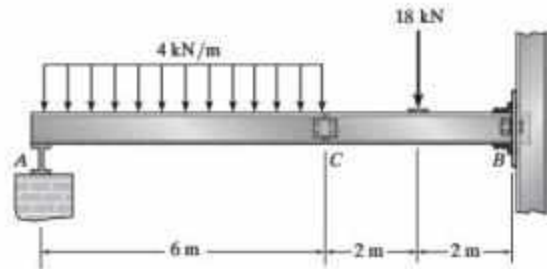
Prob. 2-19

*2-20. Determine las reacciones sobre la viga.



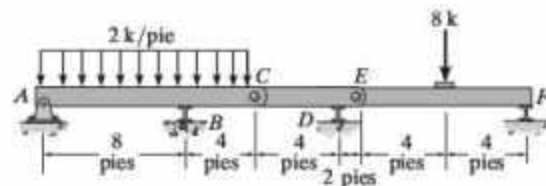
Prob. 2-20

2-21. Determine las reacciones en los soportes A y B de la viga compuesta. Suponga que en C hay una articulación.



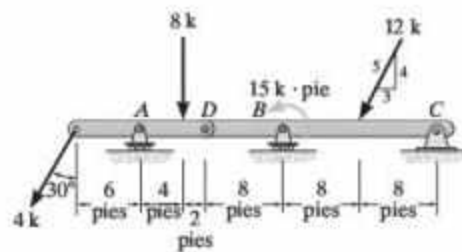
Prob. 2-21

2-22. Determine las reacciones en los soportes A, B, D y F.



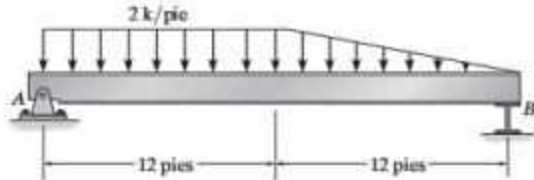
Prob. 2-22

2-23. La viga compuesta se sostiene mediante una articulación en C y está apoyada sobre un rodillo en A y B. Hay una bisagra (articulación) en D. Determine las reacciones en los soportes. No tome en cuenta el espesor de la viga.



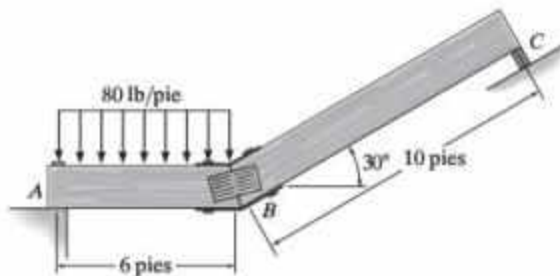
Prob. 2-23

*2-24. Determine las reacciones sobre la viga. Puede suponerse que el soporte en B es un rodillo.



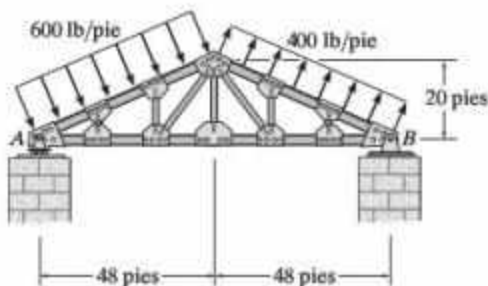
Prob. 2-24

2-25. Determine las reacciones en el soporte liso C y en el soporte articulado A . Suponga que la junta en B está conectada fijamente.



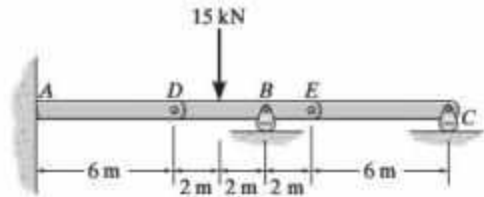
Prob. 2-25

2-26. Determine las reacciones en los soportes A y B de la armadura. La carga distribuida es causada por el viento.



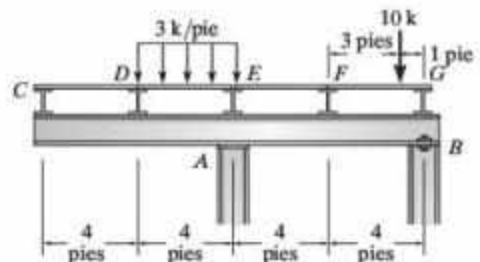
Prob. 2-26

2-27. La viga compuesta está fija en A y se sostiene mediante un oscilador en B y C . Hay bisagras (articulaciones) en D y E . Determine las reacciones en los soportes.



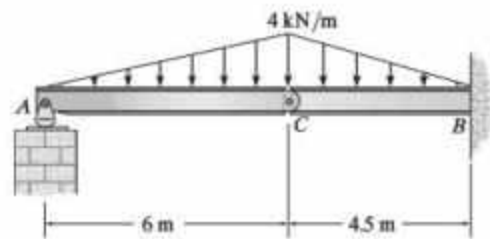
Prob. 2-27

*2-28. Determine las reacciones en los soportes A y B . Las cubiertas CD , DE , EF y FG del piso transmiten sus cargas a la trabe sobre soportes lisos. Suponga que A es un rodillo y que B es una articulación.



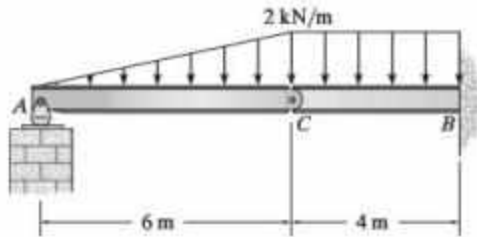
Prob. 2-28

2-29. Determine las reacciones en los soportes A y B de la viga compuesta. Hay una articulación en C .



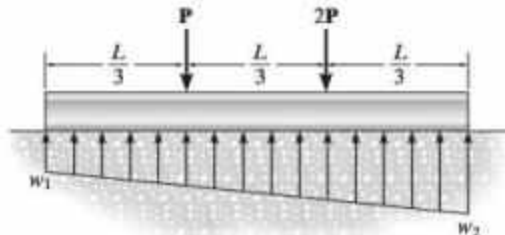
Prob. 2-29

2-30. Determine las reacciones en los soportes A y B de la viga compuesta. Hay una articulación en C .



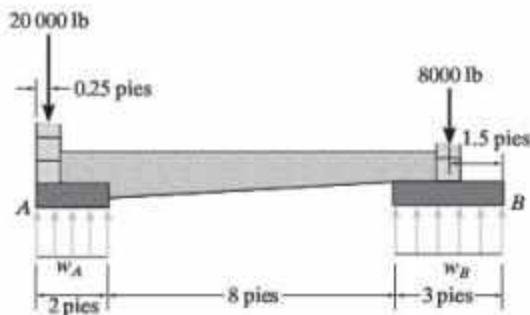
Prob. 2-30

2-31. La viga está sometida a las dos cargas concentradas como se muestran en la figura. Si se supone que el cimiento ejerce una distribución de carga que varía linealmente en el fondo, determine las intensidades de carga w_1 y w_2 necesarias para el equilibrio (a) en términos de los parámetros mostrados, y (b) considerando $P = 500$ lb, $L = 12$ pies.



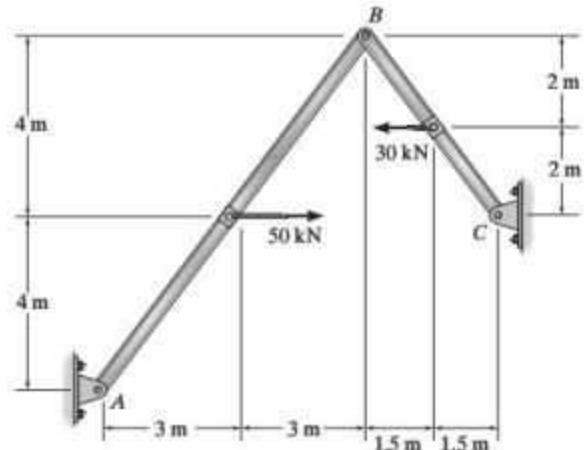
Prob. 2-31

***2-32.** La zapata superficial se usa para sostener una pared cerca de su borde A , de manera que causa una presión uniforme del suelo debajo de la zapata. Determine las cargas uniformemente distribuidas w_A y w_B medidas en lb/pie sobre las almohadillas A y B , necesarias para soportar las fuerzas de la pared de 8000 y 20 000 libras.



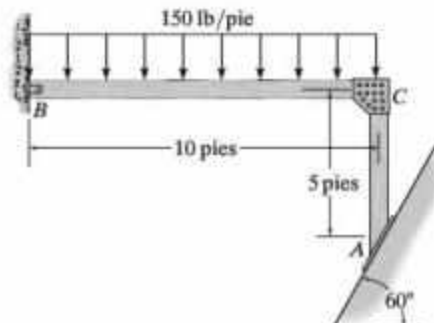
Prob. 2-32

2-33. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción que actúa en los soportes A y C .



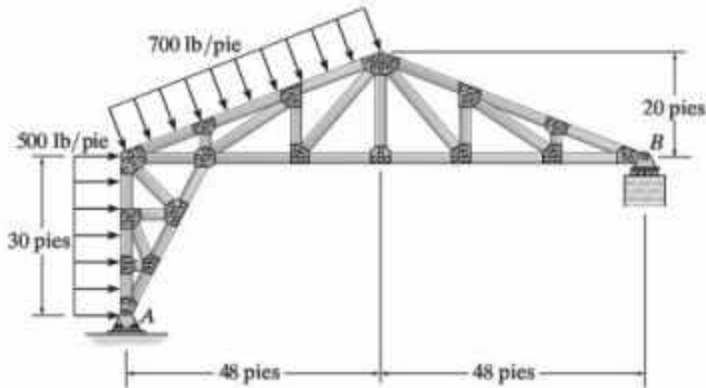
Prob. 2-33

2-34. Determine las reacciones en el soporte liso A y en el soporte articulado B . La junta en C está conectada fijamente.



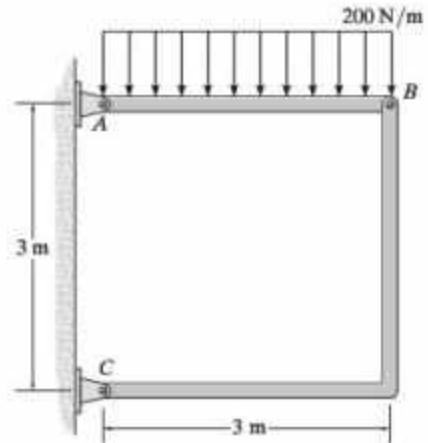
Prob. 2-34

2-35. Determine las reacciones en los soportes A y B .



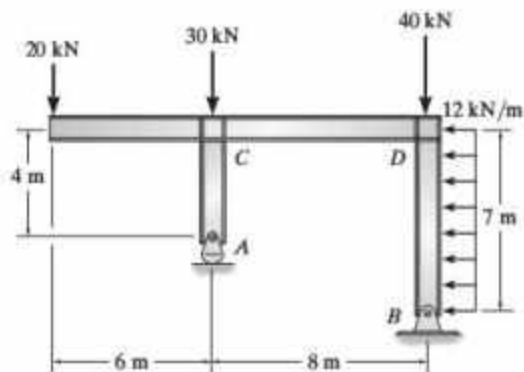
Prob. 2-35

2-37. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical en las articulaciones A y C del marco de dos elementos.



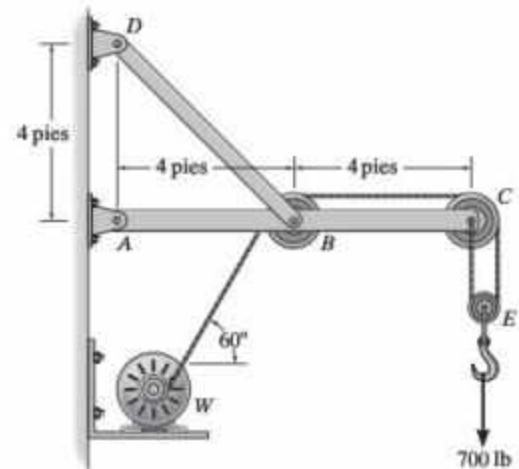
Prob. 2-37

*2-36. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en los soportes A y B . Suponga que las juntas en C y D son conexiones fijas.



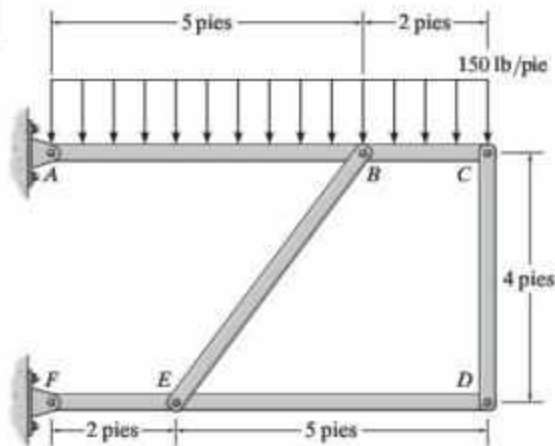
Prob. 2-36

2-38. La grúa de pared soporta una carga de 700 lb. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en las articulaciones A y D . Además, ¿cuál es la fuerza del cable en W sujeto al malacate?



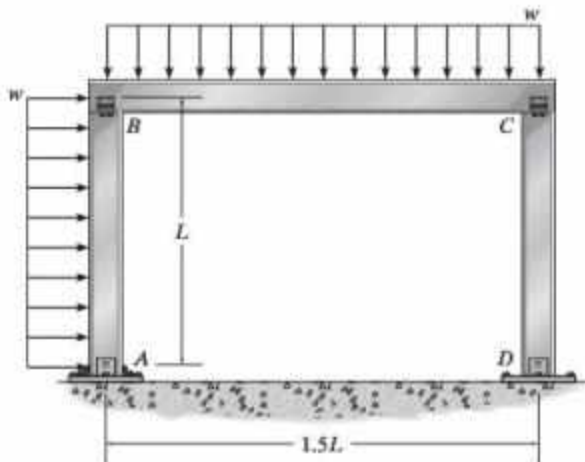
Prob. 2-38

2-39. Determine las fuerzas resultantes en las articulaciones B y C sobre el elemento ABC del marco de cuatro elementos.



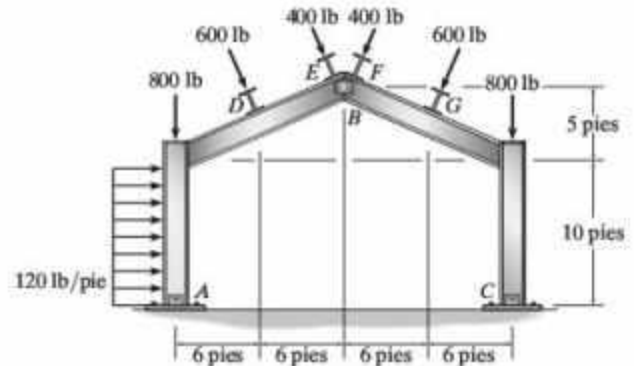
Prob. 2-39

***2-40.** Determine las reacciones en los soportes A y D . Suponga que A está fijo y que B , C y D están articuladas.



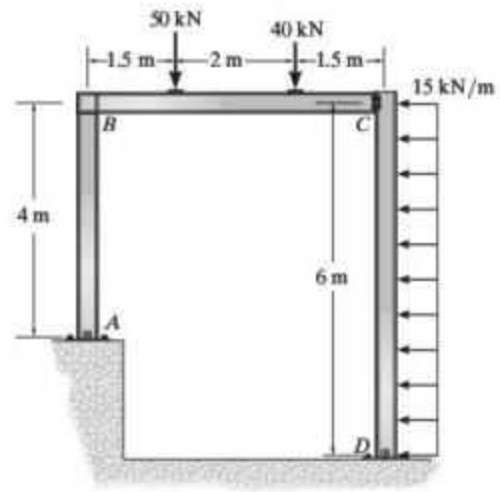
Prob. 2-40

2-41. Determine las reacciones verticales y horizontales en las conexiones A y C del marco a dos aguas. Suponga que A , B y C son conexiones articuladas. Las cargas concentradas, como D y E se aplican en forma perpendicular a la línea central de cada trabe.



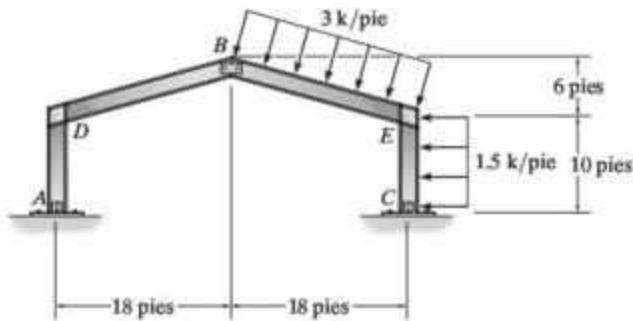
Prob. 2-41

2-42. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en A , C y D . Suponga que el marco está articulado en A , C y D , y que hay una junta conectada fijamente en B .



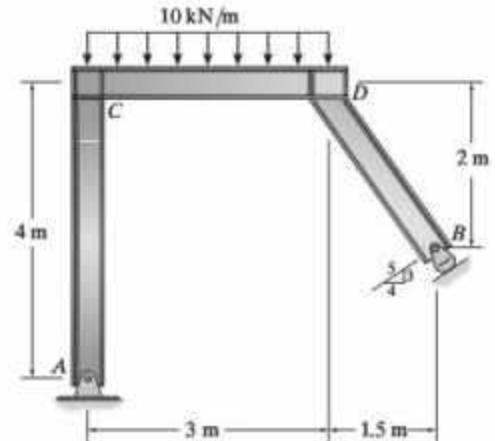
Prob. 2-42

2-43. Determine las componentes horizontal y vertical en A , B y C . Suponga que el marco está articulado en estos puntos. Las juntas en D y E están conectadas fijamente.



Prob. 2-43

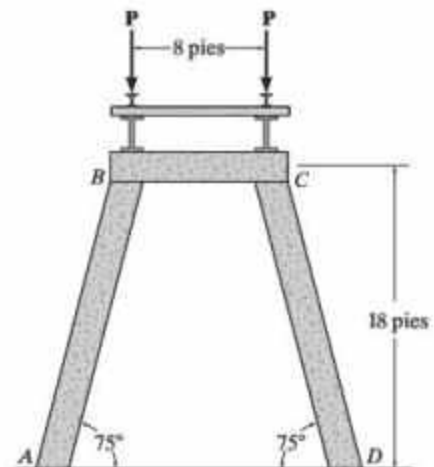
***2-44.** Determine las reacciones en los soportes A y B . Las juntas en C y D están conectadas fijamente.



Prob. 2-44

PROBLEMA DE PROYECTO

2-1P. El puente ferroviario de caballetes que se muestra en la fotografía se sostiene mediante pilas de concreto reforzado. Suponga que las dos traveses laterales simplemente apoyadas, la base de la vía y los dos carriles, tienen un peso de 0.5 k/pie y que la carga impuesta por un tren es de 7.2 k/pie (vea la figura 1-11). Cada viga tiene 20 pies de largo. Aplique la carga sobre todo el puente y determine la fuerza de compresión en las columnas de cada pila. Para el análisis, suponga que todas las juntas están articuladas y no tome en cuenta el peso de la pila. ¿Estos supuestos son reales?



Prob. proyecto 2-1P



Las fuerzas en los elementos de este puente pueden analizarse aplicando el método de los nodos o el método de las secciones.

Análisis de armaduras estáticamente determinadas

En este capítulo se desarrollarán los procedimientos para analizar armaduras estáticamente determinadas siguiendo el método de los nodos y el de las secciones. Sin embargo, primero se analizarán la determinación y la estabilidad de una armadura. Después se considerará el análisis de tres tipos de armaduras planas: simples, compuestas y complejas. Por último, al final del capítulo se realizará el análisis de una armadura espacial.

3.1 Tipos comunes de armaduras

Una *armadura* es una estructura compuesta de elementos delgados unidos en sus extremos. Los elementos que se usan comúnmente en la construcción consisten en puntales de madera, barras de metal, ángulos o canales. Las conexiones en las juntas suelen formarse al empernar o soldar los extremos de los elementos a una placa común, llamada *placa de empalme*, como se muestra en la figura 3-1, o simplemente pasando un perno o un pasador de gran tamaño a través de cada uno de los elementos. Las armaduras planas se ubican en un solo plano y a menudo se emplean como soporte (apoyo) de techos y puentes.



La placa de empalme se usa para conectar ocho elementos de la armadura que soporta la estructura de un tanque de agua.

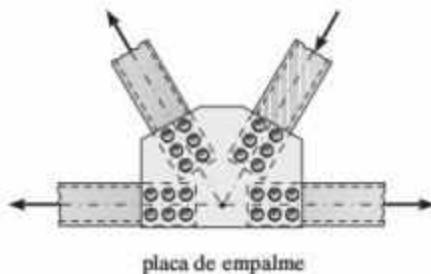


Figura 3-1

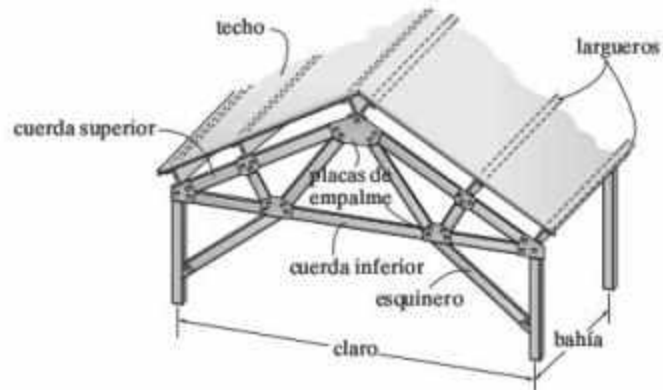


Figura 3-2

Armaduras de techo. Las armaduras de techo se suelen utilizar como parte de un marco de construcción industrial, como el que se muestra en la figura 3-2. En este caso, la carga del techo se transmite a la armadura en las juntas a través de una serie de *largueros*. La armadura de techo, junto con sus columnas de soporte se denomina *caballete*. Por lo general, las armaduras de techo se sostienen tanto por columnas de madera, acero o concreto reforzado, o por medio de muros de mampostería. Para mantener el *caballete* rígido y, por lo tanto, capaz de resistir las fuerzas horizontales del viento, en ocasiones se usan *esquineros* en las columnas de soporte. El espacio entre los *caballetes* adyacentes se conoce como *bahía*. Las *bahías* están económicamente espaciadas a unos 15 pies (4.6 m) para claros alrededor de 60 pies (18 m), y cerca de 20 pies (6.1 m) para claros de 100 pies (30 m). Con frecuencia, las *bahías* están unidas entre sí mediante refuerzos diagonales a fin de mantener la rigidez de la estructura del edificio.

Las armaduras empleadas para soportar techos se seleccionan con base en el claro, la pendiente y el material del techo. Algunos de los tipos de armaduras utilizados con mayor frecuencia se muestran en la figura 3-3. En particular, la armadura de tijeras, figura 3-3a, puede usarse para claros cortos que requieren un espacio superior. Las armaduras Howe y Pratt, figuras 3b y 3-3c, se usan para techos de claro moderado, aproximadamente entre 60 pies (18 m) y 100 pies (30 m). Si se requieren claros más grandes para sostener el techo pueden emplearse las armaduras de abanico o Fink, figuras 3-3d y 3-3e. Estas armaduras pueden construirse con una cuerda inferior convexa, como la que se muestra en la figura 3-3f. Si se selecciona un techo plano o casi plano, a menudo se usa la armadura Warren, figura 3-3g. Además, las armaduras Howe y Pratt también pueden modificarse para techos planos. Las armaduras de sierra, figura 3-3h, suelen emplearse donde el espacio entre columnas no es objetable y la iluminación uniforme es importante. Una fábrica textil sería un ejemplo. Las armaduras de cuerdas, figura 3-3i, se seleccionan en ocasiones para talleres y hangares de aviones pequeños; y la armadura de arco, figura 3-3j, aunque es relativamente costosa, puede usarse para construcciones con grandes alturas y claros amplios como en casas de campo, gimnasios, etcétera.



Aunque son más decorativas que estructurales, estas armaduras Pratt simples se usan para la entrada de un edificio.

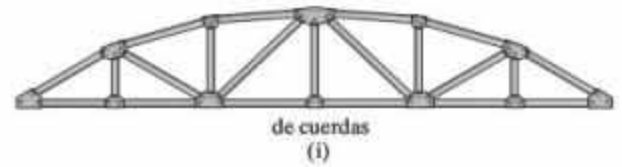
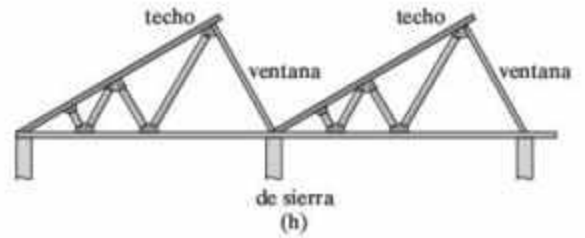
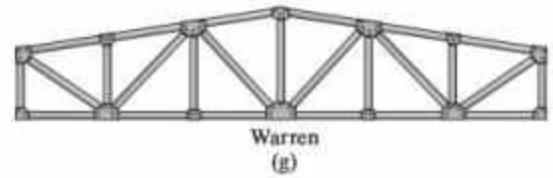
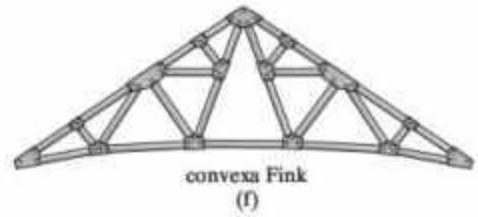
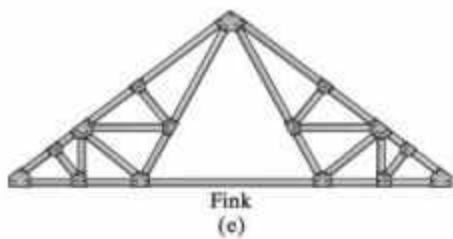
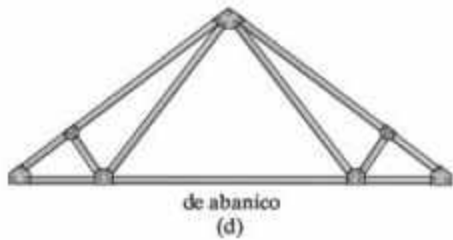
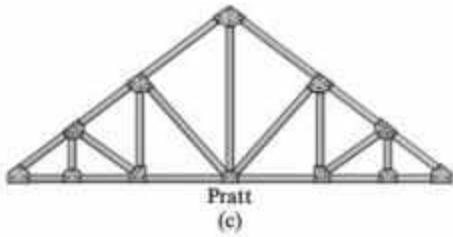
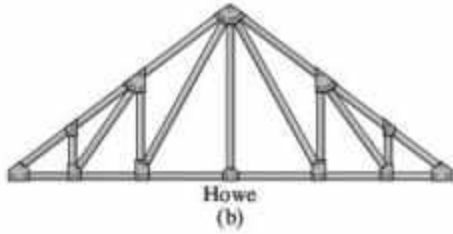
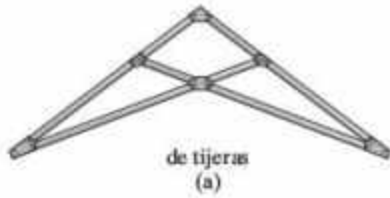


Figura 3-3

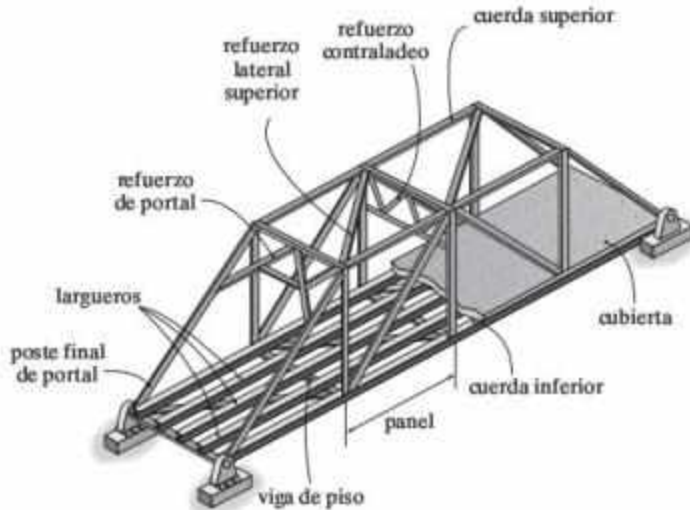


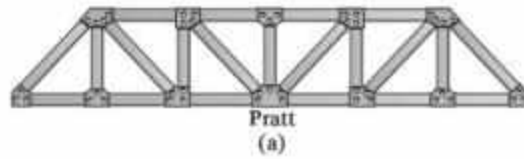
Figura 3-4



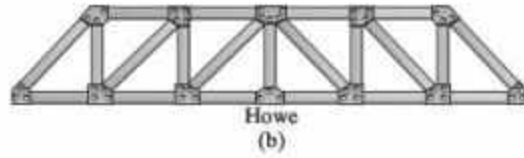
Para soportar este puente se usan armaduras Parker.

Armaduras de puente. En la figura 3-4 se muestran los principales elementos estructurales de una armadura de puente típica. Aquí puede observarse que una carga sobre la *cubierta* se transmite en primer lugar a los *largueros*, después a las *vigas de piso* y, finalmente, a las juntas de las dos armaduras laterales de soporte. Las cuerdas superior e inferior de las vigas laterales se conectan mediante los *refuerzos laterales superior e inferior*, que sirven para resistir las fuerzas laterales causadas por el viento y el desplazamiento lateral causado por los vehículos en movimiento sobre el puente. Los *soportes de portal y contraladeo* proporcionan estabilidad adicional. Al igual que en el caso de muchas armaduras de claro amplio, en un extremo de la armadura de puente se encuentra un rodillo para permitir la expansión térmica.

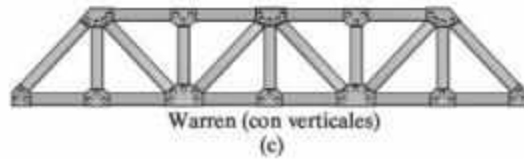
En la figura 3-5 se muestran algunas de las formas típicas de armaduras de puente que se usan actualmente para claros individuales. En particular, las armaduras Pratt, Howe y Warren se usan normalmente para claros de hasta 200 pies (61 m) de longitud. La forma más común es la armadura Warren con verticales, figura 3-5c. Para claros mayores se usa una armadura con una cuerda superior poligonal, como la armadura Parker, figura 3-5d, a fin de lograr ahorros en material. La armadura Warren con verticales también puede fabricarse de esta manera para claros de hasta 300 pies (91 m). La mayor economía en material se obtiene si las diagonales tienen una inclinación entre 45° y 60° respecto a la horizontal. Si esta regla se mantiene, entonces para claros de más de 300 pies (91 m), la profundidad de la armadura debe aumentar y, en consecuencia, el panel se alargará. Esto se traduce en un sistema de cubierta pesada y, para mantener el peso de la cubierta dentro de los límites tolerables, se han desarrollado armaduras *subdivididas*. Entre los ejemplos más comunes están las armaduras Baltimore y Warren subdivididas, figuras 3-5e y 3-5f. Por último, la armadura K que se muestra en la figura 3-5g también puede utilizarse en lugar de una armadura subdividida, dado que cumple el mismo propósito.



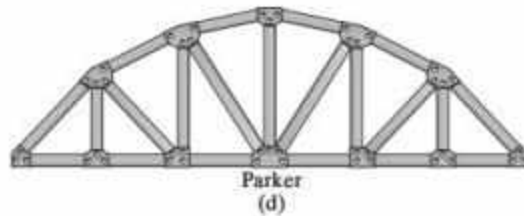
Pratt
(a)



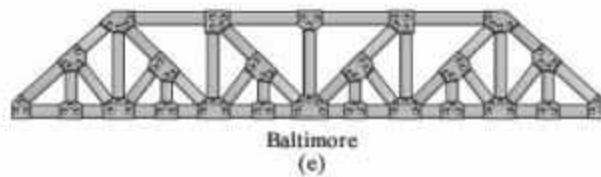
Howe
(b)



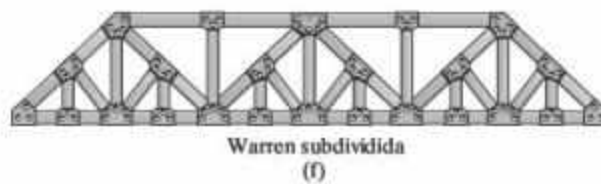
Warren (con verticales)
(c)



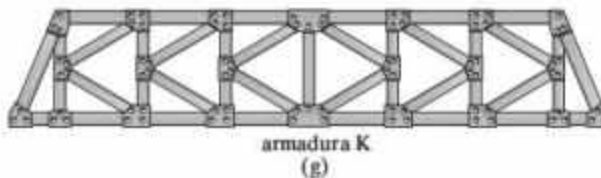
Parker
(d)



Baltimore
(e)



Warren subdivida
(f)



armadura K
(g)

Figura 3-5

Supuestos para el diseño. Para diseñar tanto los elementos como las conexiones de una armadura, antes hay que determinar la fuerza desarrollada en cada elemento cuando la viga está sometida a una carga dada. A este respecto se harán dos supuestos importantes con el fin de idealizar la armadura.

1. *Los elementos están unidos mediante pasadores lisos.* En los casos en que se usan conexiones atornilladas o soldadas, este supuesto suele ser satisfactorio siempre que las líneas centrales de los elementos unidos sean concurrentes en un punto, como en la figura 3-1. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que las conexiones reales le dan un poco de rigidez a la articulación y esto a su vez introduce la flexión de los elementos conectados cuando la viga está sometida a una carga. El esfuerzo flexionante (o de flexión) desarrollado en los elementos se denomina *esfuerzo secundario*, mientras que el esfuerzo en los elementos de la armadura idealizada, que tienen juntas articuladas, se llama *esfuerzo primario*. Un análisis del esfuerzo secundario de una armadura se puede efectuar utilizando una computadora, como se explica en el capítulo 16. Para algunos tipos de geometrías de armadura estos esfuerzos pueden ser grandes.
2. *Todas las cargas se aplican en las juntas.* En la mayoría de situaciones, como en el caso de armaduras para puentes y techos, este supuesto es verdadero. Con frecuencia en el análisis de fuerzas, el peso de los elementos se desprecia, dado que la fuerza soportada por los elementos es grande en comparación con su peso. Si el peso se va a incluir en el análisis, por lo general resulta satisfactorio aplicarlo como una fuerza vertical, donde la mitad de su magnitud se aplica en cada extremo del elemento.

Debido a estos dos supuestos, *cada elemento de una armadura actúa como un miembro de fuerza axial* y, por lo tanto, las fuerzas que actúan en los extremos del elemento deben estar dirigidas a lo largo de su eje. Si la fuerza tiende a *dargar* el elemento, se trata de una *fuerza de tensión* (T), figura 3-6a; mientras que si la fuerza tiende a *acortar* el elemento, es una *fuerza de compresión* (C), figura 3-6b. En el diseño real de una armadura es importante establecer si la fuerza es de tensión o de compresión. Muy a menudo, los elementos sujetos a compresión deben estar fabricados *más gruesos* que los sometidos a tensión, debido al pandeo o la inestabilidad súbita que puede ocurrir en los elementos sujetos a compresión.



Figura 3-6

3.2 Clasificación de armaduras coplanares

Antes de comenzar el análisis de fuerzas de una armadura, es importante clasificar la armadura como simple, compuesta o compleja, para entonces tener la capacidad de especificar su determinación y su estabilidad.

Armadura simple. Para evitar el colapso, el marco de una armadura debe ser rígido. Obviamente, el marco de cuatro barras $ABCD$ de la figura 3-7 se colapsará a menos que se añada una diagonal de soporte, como AC . El marco más simple que es rígido o estable tiene la forma de un triángulo. En consecuencia, una *armadura simple* se construye a partir de un elemento básico triangular, como el ABC de la figura 3-8, conectando dos elementos (AD y BD) para formar un elemento adicional. De esta manera, se observa que al colocar cada elemento adicional de dos elementos en la armadura, el número de articulaciones se incrementa en uno.

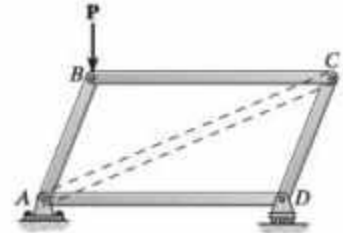


Figura 3-7

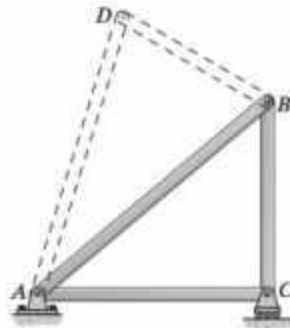
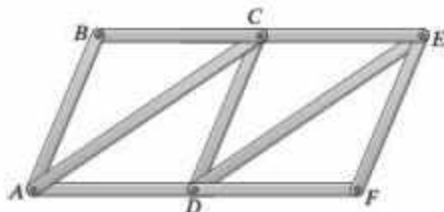


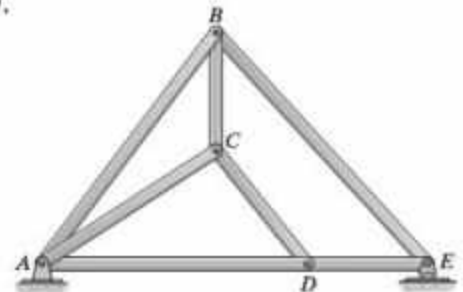
Figura 3-8

En la figura 3-9 se muestra un ejemplo de una armadura simple, donde el elemento triangular “estable” básico es ABC , a partir del cual se establece el resto de las articulaciones D , E y F en orden alfabético. Sin embargo, para este método de construcción es importante tomar en cuenta que las armaduras simples *no tienen* que consistir enteramente en triángulos. En la figura 3-10 se muestra un ejemplo de esto, donde a partir de un triángulo ABC se agregan las barras CD y AD para formar la junta D . Por último, se agregan las barras BE y DE para formar la junta E .



armadura simple

Figura 3-9



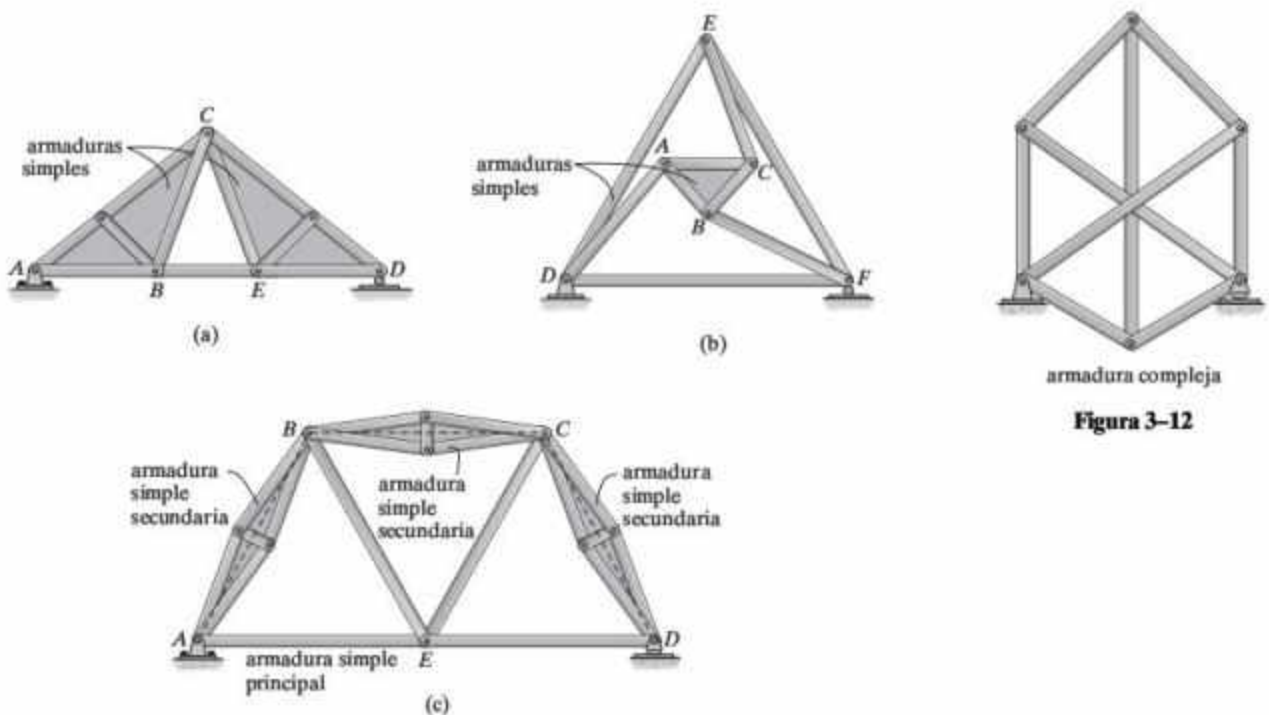
armadura simple

Figura 3-10

Armadura compuesta. Una *armadura compuesta* se forma al conectar dos o más armaduras simples entre sí. Con mucha frecuencia este tipo de armadura se usa para soportar las cargas que actúan sobre un *claro amplio*, puesto que es más barato construir una armadura compuesta un poco más ligera que utilizar sólo una armadura simple más pesada.

Hay tres formas en que las armaduras simples se unen para formar una armadura compuesta. Las armaduras pueden estar conectadas mediante una junta común y una barra. En la figura 3-11a se proporciona un ejemplo, donde la armadura sombreada *ABC* está conectada a la armadura sombreada *CDE* de esta manera. Las armaduras pueden unirse mediante tres barras, como en el caso de la armadura sombreada *ABC* conectada a la armadura *DEF* más grande, figura 3.11b. Y, por último, las armaduras pueden unirse en los puntos donde las barras de una armadura simple de gran tamaño, llamada *armadura principal*, se han sustituido por armaduras simples, llamadas *armaduras secundarias*. En la figura 3-11c se muestra un ejemplo, donde los elementos sombreados de la armadura principal *ABCDE* han sido sustituidos por las armaduras secundarias sombreadas. Si esta armadura soporta cargas de techo, el uso de armaduras secundarias podría resultar más económico, ya que los elementos trazados con líneas discontinuas pueden estar sometidos a flexión excesiva, mientras que las armaduras secundarias pueden transferir mejor la carga.

Armadura compleja. Una *armadura compleja* es aquella que no puede clasificarse como simple o compuesta. La armadura de la figura 3-12 es un ejemplo.



Diferentes tipos de armaduras compuestas

Figura 3-11

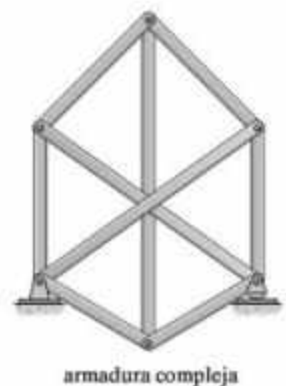


Figura 3-12

Determinación. Para cualquier problema en el análisis de armaduras debe tenerse en cuenta que el número total de *incógnitas* incluye las fuerzas en el número b de barras de la armadura y el número total r de reacciones externas en los soportes. Como los elementos de la armadura son todos miembros rectos de fuerza axial que se ubican en el mismo plano, el sistema de fuerzas que actúa en cada junta es *coplanar y concurrente*. En consecuencia, el equilibrio rotacional o de momento se satisface de manera automática en la junta (o articulación), y sólo es necesario satisfacer $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para asegurar el equilibrio de traslación o de fuerzas. Por lo tanto, sólo pueden escribirse dos ecuaciones de equilibrio para cada junta, y si hay un número j de juntas, el total de ecuaciones disponibles para la solución es $2j$. Si simplemente se compara el total de incógnitas ($b + r$) con el de ecuaciones de equilibrio disponibles, es posible especificar la determinación de una armadura simple, compuesta o compleja. Se tiene

$b + r = 2j$	estáticamente determinada	(3-1)
$b + r > 2j$	estáticamente indeterminada	

En particular, el *grado de indeterminación* se especifica por la diferencia en los números $(b + r) - 2j$.

Estabilidad. Si $b + r < 2j$, una armadura será *inestable*, es decir, se colapsará porque habrá una cantidad insuficiente de barras o reacciones para restringir todas las juntas. Además, una estructura puede ser inestable si es estáticamente determinada o estáticamente indeterminada. En este caso, la estabilidad tendrá que determinarse por inspección o mediante un análisis de fuerzas.

Estabilidad externa. Como se estableció en la sección 2-4, una *estructura (o armadura)* es *externamente inestable* si todas sus reacciones son concurrentes o paralelas. Por ejemplo, las dos armaduras de la figura 3-13 son externamente inestables porque las reacciones en los soportes tienen líneas de acción que son o concurrentes o paralelas.

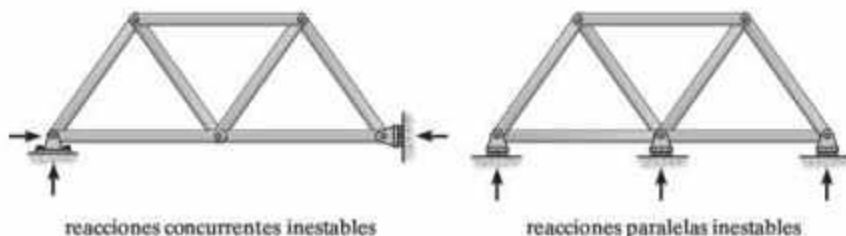


Figura 3-13

Estabilidad interna. Con frecuencia la estabilidad interna de una armadura puede comprobarse mediante una inspección cuidadosa de la disposición de sus elementos. Si es posible determinar que cada junta se mantiene fija de modo que no puede moverse en el sentido de un "cuerpo rígido" con respecto a las otras juntas, entonces la armadura será estable. Observe que una armadura simple siempre será internamente estable, dado que por la naturaleza de su construcción requiere partir de un elemento triangular básico para después agregar sucesivos "elementos rígidos", cada uno con dos elementos adicionales y una junta. La armadura de la figura 3-14 es un ejemplo de esta construcción, donde, a partir del elemento triangular sombreado ABC , se agregan sucesivamente las juntas D, E, F, G y H .

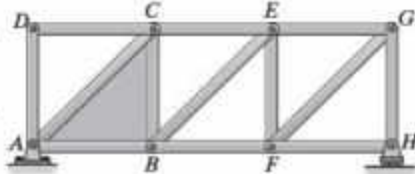


Figura 3-14

Si una armadura se construye de manera que sus juntas no se mantienen en una posición fija, será inestable o tendrá una "forma crítica". Un ejemplo claro de esto se muestra en la figura 3-15, donde puede observarse que no hay restricción o fijeza entre las juntas de C y F o B y E , por lo que la armadura colapsará bajo carga.

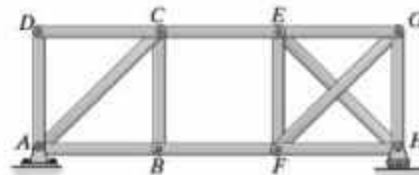


Figura 3-15

Para determinar la estabilidad interna de una armadura compuesta, es necesario identificar la forma en que las armaduras simples están conectadas entre sí. Por ejemplo, la armadura compuesta de la figura 3-16 es inestable puesto que la armadura simple interior ABC está conectada a la armadura simple exterior DEF mediante tres barras, AD, BE y CF , que son concurrentes en el punto O . Por lo tanto, puede aplicarse una carga externa a la junta A, B o C y ocasionar que la armadura ABC gire ligeramente.

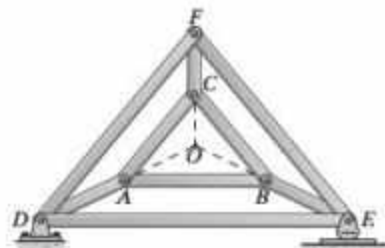


Figura 3-16

Si una armadura se identifica como *compleja*, es posible que no se pueda establecer por inspección si es estable. Por ejemplo, puede demostrarse, mediante el análisis presentado en la sección 3.7, que la armadura compleja de la figura 3-17 es inestable o tiene una "forma crítica" sólo si la dimensión $d = d'$. Si $d \neq d'$ la armadura es estable.

La inestabilidad de cualquier forma de armadura, ya sea simple, compuesta o compleja, también puede determinarse utilizando una computadora que resuelva las $2j$ ecuaciones simultáneas escritas para todas las juntas de la armadura. Si se obtienen resultados inconsistentes, la armadura será inestable o tendrá una forma crítica.

Si no se realiza un análisis con computadora, pueden utilizarse los métodos descritos anteriormente para comprobar la estabilidad de la armadura. A modo de resumen, si la armadura tiene b barras, r reacciones externas y j juntas, entonces si

$b + r = 2j$	es inestable	(3-2)
$b + r \geq 2j$	es inestable si las reacciones en los soportes de la armadura son concurrentes o paralelas o si algunos de los componentes de la armadura forman un mecanismo colapsable.	

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que si una armadura es inestable, no importa si es estáticamente determinada o indeterminada. Obviamente, el uso de una armadura inestable debe evitarse en la práctica.

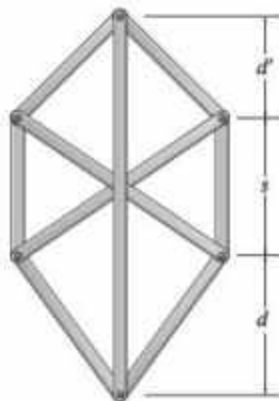


Figura 3-17

EJEMPLO 3.1

Clasifique cada una de las armaduras de la figura 3.18 como estable, inestable, estáticamente determinada o estáticamente indeterminada. Las armaduras están sometidas a cargas externas arbitrarias, las cuales se suponen conocidas y pueden actuar en cualquier punto de las vigas.

SOLUCIÓN

Figura 3-18a. *Estable externamente*, puesto que las reacciones no son concurrentes ni paralelas. Como $b = 19$, $r = 3$, $j = 11$, entonces $b + r = 2j$ o $22 = 22$. Por lo tanto, la armadura es *estáticamente determinada*. Por inspección, la armadura es *estable internamente*.

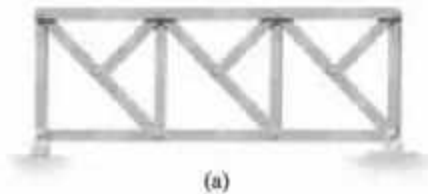
**Figura 3-18**

Figura 3-18b. *Estable externamente*. Como $b = 15$, $r = 4$, $j = 9$, entonces $b + r > 2j$ o $19 > 18$. La armadura es *estáticamente indeterminada* de primer grado. Por inspección, la armadura es *estable internamente*.

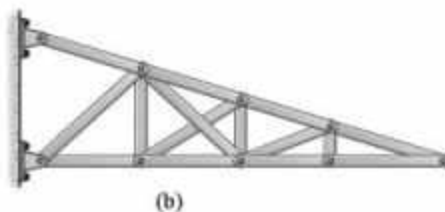


Figura 3-18c. *Estable externamente.* Como $b = 9, r = 3, j = 6$, entonces $b + r = 2j$ o $12 = 12$. La armadura es *estáticamente determinada*. Por inspección, la armadura es *estable internamente*.

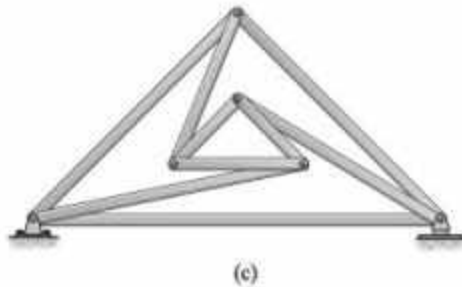
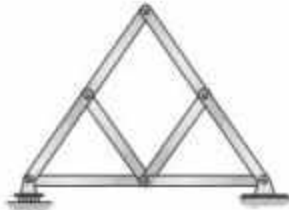


Figura 3-18d. *Estable externamente.* Como $b = 12, r = 3, j = 8$, entonces $b + r < 2j$ o $15 < 16$. La armadura es *inestable internamente*.



PROBLEMAS

3-1. Clasifique cada una de las armaduras siguientes como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable. Si es indeterminada, establezca su grado.



(a)



(b)



(c)



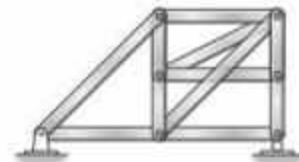
(d)

Prob. 3-1

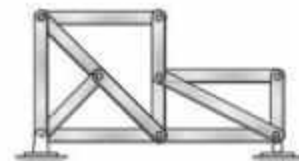
3-2. Clasifique cada una de las armaduras siguientes como estable, inestable, estáticamente determinada o estáticamente indeterminada. Si es indeterminada, establezca su grado.



(a)



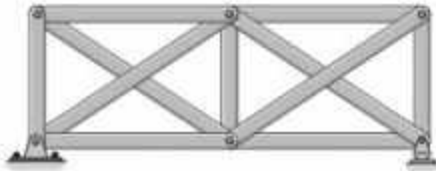
(b)



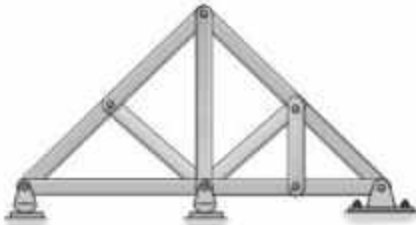
(c)

Prob. 3-2

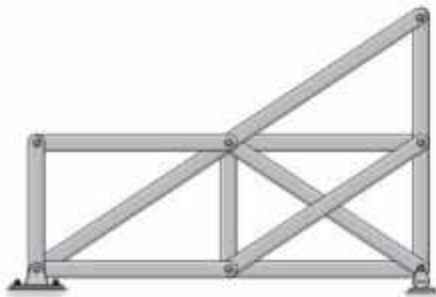
3-3. Clasifique cada una de las siguientes armaduras como estáticamente determinada, indeterminada o inestable. Si es indeterminada, establezca su grado.



(a)



(b)



(c)

Prob. 3-3

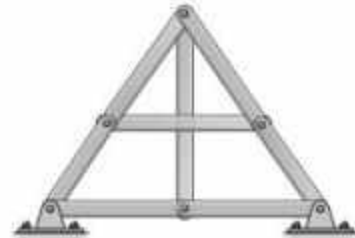
***3-4.** Clasifique cada una de las siguientes armaduras como estáticamente determinada, estáticamente indeterminada o inestable. Si es indeterminada, establezca su grado.



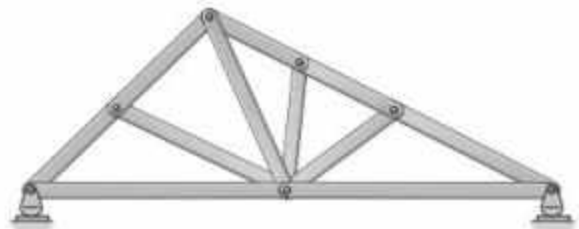
(a)



(b)



(c)



(d)

Prob. 3-4

3.3 El método de los nodos

Si una armadura está en equilibrio, entonces cada una de sus juntas o nodos también debe estar en equilibrio. Por consiguiente, el método de los nodos consiste en satisfacer las condiciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para las fuerzas ejercidas sobre el pasador en cada junta de la armadura.

Cuando se utiliza el método de los nodos, es necesario dibujar el diagrama de cuerpo libre de cada junta antes de aplicar las ecuaciones de equilibrio. Recuerde que la *línea de acción* de cada fuerza de un elemento que actúa sobre la junta se *especifica* a partir de la geometría de la armadura, puesto que la fuerza en un elemento pasa a lo largo de su eje. Como ejemplo, considere la junta B de la armadura que se muestra en la figura 3-19a. Con base en el diagrama de cuerpo libre, figura 3-19b, las únicas incógnitas son las *magnitudes* de las fuerzas en los elementos BA y BC . Como se muestra en la figura, F_{BA} está “jalando” el pasador, lo que indica que el elemento BA está en *tensión*, mientras que F_{BC} está “empujando” el pasador y, por consiguiente, el elemento BC está en *compresión*. Estos efectos se demuestran claramente al usar el método de las secciones y al aislar la junta con pequeños segmentos de los elementos conectados al pasador, figura 3-19c. Observe que el hecho de empujar o jalar estos pequeños segmentos indica el efecto de los elementos ya sea en compresión o en tensión.

En todos los casos, el análisis de las juntas debe comenzar en una junta contando con al menos una fuerza conocida y un máximo de dos fuerzas desconocidas, como en la figura 3-19b. De esta manera, la aplicación de $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ genera dos ecuaciones algebraicas que pueden resolverse para determinar las dos incógnitas. Al aplicar estas ecuaciones, el sentido correcto de una fuerza desconocida de un elemento puede determinarse mediante alguno de los dos métodos posibles.

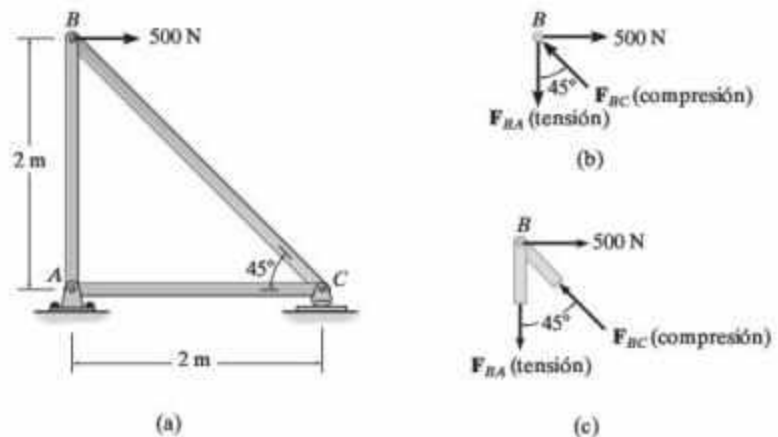


Figura 3-19

1. Siempre suponga que las fuerzas desconocidas de los elementos que actúan en el diagrama de cuerpo libre de la junta están en tensión, es decir, "jalando" el pasador. Si se hace esto, entonces la solución numérica de las ecuaciones de equilibrio producirá escalares positivos para los elementos en tensión y escalares negativos para los elementos en compresión. Una vez que se encuentre la fuerza desconocida de un elemento, debe utilizarse su magnitud y sentido correctos (T o C) en los diagramas de cuerpo libre de las juntas subsecuentes.
2. En muchos casos, el sentido correcto de la dirección de una fuerza desconocida de un elemento puede determinarse "mediante inspección". Por ejemplo, F_{BC} en la figura 3-19b debe empujar el pasador (compresión) ya que su componente horizontal, $F_{BC} \sin 45^\circ$, debe equilibrar la fuerza de 500 N ($\Sigma F_x = 0$). Del mismo modo, F_{BA} es una fuerza de tensión, dado que equilibra la componente vertical, $F_{BC} \cos 45^\circ$ ($\Sigma F_y = 0$). En casos más complicados, el sentido de una fuerza de elemento desconocida puede suponerse; entonces, después de aplicar las ecuaciones de equilibrio, el sentido supuesto puede verificarse a partir de los resultados numéricos. Una respuesta positiva indica que el sentido es correcto, mientras que una respuesta negativa indica que el sentido mostrado en el diagrama de cuerpo libre debe invertirse. Éste es el método que se utilizará en los problemas de ejemplo que se presentan a continuación.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un medio para analizar una armadura usando el método de los nudos.

- Dibuje el diagrama de cuerpo libre de una junta con al menos una fuerza conocida y un máximo de dos fuerzas desconocidas. (Si esta junta se encuentra en uno de los soportes, puede ser necesario calcular las reacciones externas en los soportes dibujando un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura).
- Utilice uno de los dos métodos descritos antes para establecer el sentido de una fuerza desconocida.
- Los ejes x y y deben orientarse de modo que las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre puedan descomponerse fácilmente en sus componentes x y y . Aplique las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, obtenga las dos fuerzas de elemento desconocidas y verifique su sentido de dirección correcto.
- Continuar con el análisis de cada una de las otras juntas, donde de nuevo es necesario elegir una junta que tenga como máximo dos incógnitas y por lo menos una fuerza conocida.
- Una vez que se encuentra la fuerza en un elemento a partir del análisis de una junta en uno de sus extremos, el resultado puede usarse para analizar las fuerzas que actúan sobre la junta ubicada en su otro extremo. Recuerde que un elemento en compresión "empuja" a la junta y un elemento en tensión "jala" a la articulación.

EJEMPLO 3.2

Determine la fuerza en cada elemento de la armadura que se muestra en la fotografía. Las dimensiones y las cargas se muestran en la figura 3-20a. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

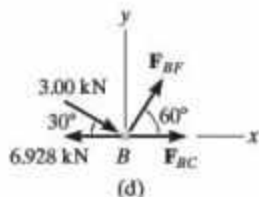
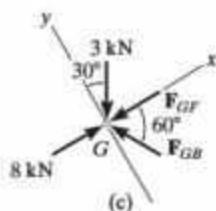
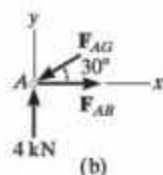
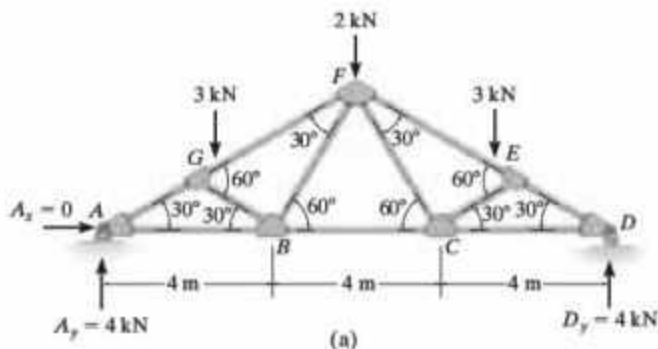


Figura 3-20

SOLUCIÓN

Sólo es necesario determinar las fuerzas en la mitad de los elementos, puesto que la armadura es simétrica tanto con respecto a la carga como a la geometría.

Junta A, figura 3-20b. El análisis puede iniciarse en la junta A. ¿Por qué? El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3-20b.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 4 - F_{AG} \sin 30^\circ = 0 \quad F_{AG} = 8 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{AB} - 8 \cos 30^\circ = 0 \quad F_{AB} = 6.928 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$

Junta G, figura 3-20c. En este caso, observe cómo la orientación de los ejes x y y evita la solución simultánea de ecuaciones.

$$+\nearrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{GB} \sin 60^\circ - 3 \cos 30^\circ = 0$$

$$F_{GB} = 3.00 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$+\nearrow \Sigma F_x = 0; \quad 8 - 3 \sin 30^\circ - 3.00 \cos 60^\circ - F_{GF} = 0$$

$$F_{GF} = 5.00 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.}$$

Junta B, figura 3-20d.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{BF} \sin 60^\circ - 3.00 \sin 30^\circ = 0$$

$$F_{BF} = 1.73 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{BC} + 1.73 \cos 60^\circ + 3.00 \cos 30^\circ - 6.928 = 0$$

$$F_{BC} = 3.46 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 3.3

Determine la fuerza en cada elemento de la armadura de tijeras que se muestra en la figura 3-21a. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Las reacciones en los soportes se proporcionan en la figura.

SOLUCIÓN

La armadura se analizará en la siguiente secuencia:

Junta E, figura 3-21b. Observe que la solución simultánea de ecuaciones no puede realizarse debido a la orientación de los ejes x y y .

$$+\nearrow \Sigma F_y = 0; \quad 191.0 \cos 30^\circ - F_{ED} \sin 15^\circ = 0$$

$$F_{ED} = 639.1 \text{ lb (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$+\searrow \Sigma F_x = 0; \quad 639.1 \cos 15^\circ - F_{EF} - 191.0 \sin 30^\circ = 0$$

$$F_{EF} = 521.8 \text{ lb (T)} \quad \text{Resp.}$$

Junta D, figura 3-21c.

$$+\swarrow \Sigma F_x = 0; \quad -F_{DF} \sin 75^\circ = 0 \quad F_{DF} = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$+\nwarrow \Sigma F_y = 0; \quad -F_{DC} + 639.1 = 0 \quad F_{DC} = 639.1 \text{ lb (C)} \quad \text{Resp.}$$

Junta C, figura 3-21d.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{CB} \sin 45^\circ - 639.1 \sin 45^\circ = 0$$

$$F_{CB} = 639.1 \text{ lb (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -F_{CF} - 175 + 2(639.1) \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{CF} = 728.8 \text{ lb (T)} \quad \text{Resp.}$$

Junta B, figura 3-21e.

$$+\nwarrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{BF} \sin 75^\circ - 200 = 0 \quad F_{BF} = 207.1 \text{ lb (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$+\swarrow \Sigma F_x = 0; \quad 639.1 + 207.1 \cos 75^\circ - F_{BA} = 0$$

$$F_{BA} = 692.7 \text{ lb (C)} \quad \text{Resp.}$$

Junta A, figura 3-21f.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{AF} \cos 30^\circ - 692.7 \cos 45^\circ - 141.4 = 0$$

$$F_{AF} = 728.9 \text{ lb (T)} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 125.4 - 692.7 \sin 45^\circ + 728.9 \sin 30^\circ = 0$$

comprobación

Observe que como ya se han calculado las reacciones, puede realizarse una comprobación adicional de los cálculos analizando la última junta F. Inténtelo y compruebe los resultados.

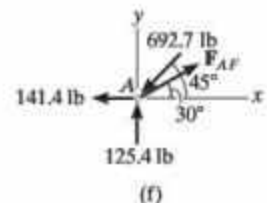
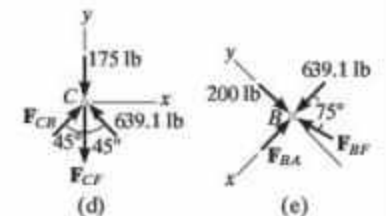
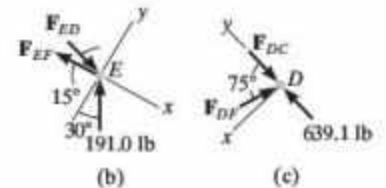
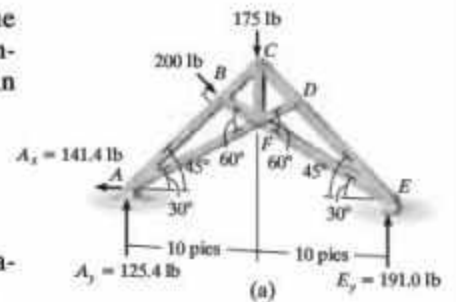
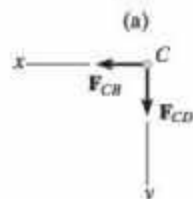
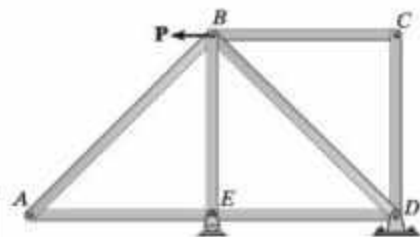
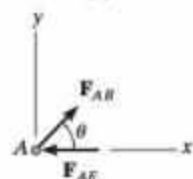


Figura 3-21

3.4 Elementos de fuerza cero



$$\begin{aligned} +\rightarrow \Sigma F_x = 0; F_{CB} &= 0 \\ +\downarrow \Sigma F_y = 0; F_{CD} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y = 0; F_{AB} \sin \theta &= 0 \\ F_{AB} &= 0 \text{ (pues } \sin \theta \neq 0) \\ +\rightarrow \Sigma F_x = 0; -F_{AE} + 0 &= 0 \\ F_{AE} &= 0 \end{aligned}$$

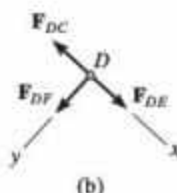
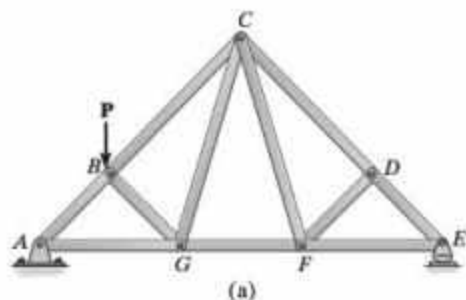
Figura 3-22

El análisis de armaduras mediante el método de los nodos se simplifica en gran medida si primero se determinan los elementos que *no soportan carga*. Estos *elementos de fuerza cero* pueden ser necesarios para la estabilidad de la armadura durante su construcción y para prestar apoyo si la carga aplicada cambia. Por lo general, los elementos de fuerza cero de una armadura pueden determinarse mediante la inspección de las articulaciones y se presentan en dos casos.

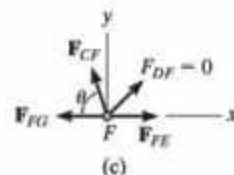
Caso 1. Considere la armadura de la figura 3-22a. Los dos elementos en la junta C se conectan entre sí en ángulo recto y no hay carga externa sobre la junta. El diagrama de cuerpo libre de la junta C, figura 3-22b, indica que la fuerza en cada elemento debe ser cero a fin de mantener el equilibrio. Además, como en el caso de la junta A, figura 3-22c, esto debe ser cierto sin importar el ángulo, digamos θ , entre los elementos.

Caso 2. Los elementos de fuerza cero también se presentan en las juntas con una geometría como la de la junta D en la figura 3-23a. Aquí *ninguna carga externa actúa sobre la junta*, de modo que una sumatoria de fuerzas en la dirección y, figura 3-23b, que es perpendicular a los dos elementos colineales, requiere que $F_{DF} = 0$. Si se usa este resultado, FC también es un elemento de fuerza cero, como lo indica el análisis de fuerzas de la junta F, figura 3-23c.

En resumen, si sólo dos elementos no colineales forman una junta de una armadura y no se aplica ninguna carga externa o reacción en los soportes sobre la junta, los elementos deben ser elementos de fuerza cero, Caso 1. Además, si tres elementos forman una junta de una armadura para la cual dos de los elementos son colineales, el tercer elemento es un elemento de fuerza cero, siempre y cuando no se aplique ninguna fuerza externa o reacción en los soportes sobre la junta, Caso 2. Se debe prestar atención especial a estas condiciones geométricas de la junta y la carga, puesto que el análisis de una armadura puede simplificarse considerablemente si *primero* se detectan los elementos de fuerza cero.



$$+\curvearrowright \Sigma F_y = 0; F_{DF} = 0$$

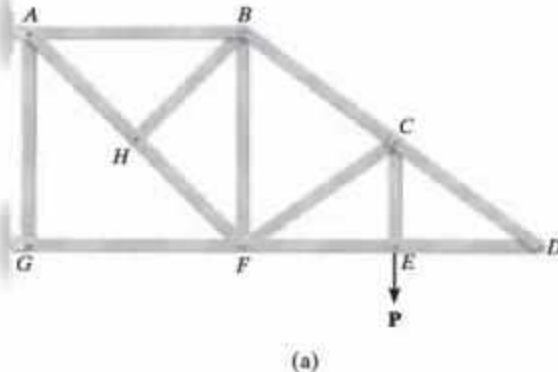
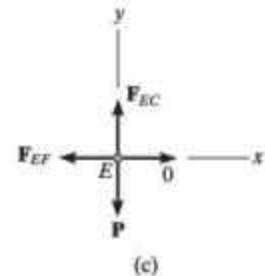
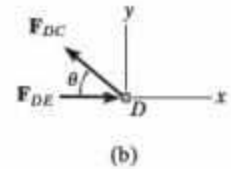


$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y = 0; F_{CF} \sin \theta + 0 &= 0 \\ F_{CF} &= 0 \text{ (pues } \sin \theta \neq 0) \end{aligned}$$

Figura 3-23

EJEMPLO 3.4

Utilizando el método de los nodos, indique todos los elementos de la armadura que se muestra en la figura 3-24a y cuya fuerza es cero.

**Figura 3-24****SOLUCIÓN**

Buscando juntas semejantes a las analizadas en las figuras 3.22 y 3.23, se tiene

Junta D, figura 3-24b.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{DC} \sin \theta = 0 \quad F_{DC} = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{DE} + 0 = 0 \quad F_{DE} = 0 \quad \text{Resp.}$$

Junta E, figura 3-24c.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{EF} = 0 \quad \text{Resp.}$$

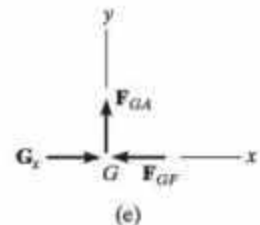
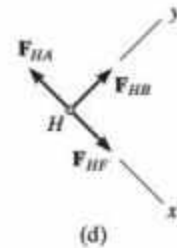
(Observe que $F_{EC} = P$ y un análisis de la junta C resultaría en una fuerza en el elemento CF.)

Junta H, figura 3-24d.

$$+\nearrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{HB} = 0 \quad \text{Resp.}$$

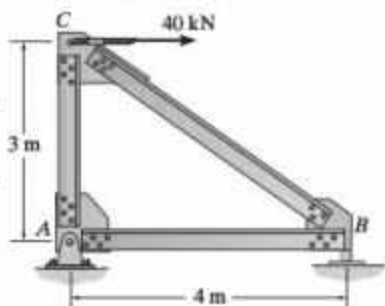
Junta G, figura 3-24e. El soporte de oscilador en G sólo puede ejercer un componente x de la fuerza sobre la junta; es decir, G_x . Por lo tanto,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{GA} = 0 \quad \text{Resp.}$$



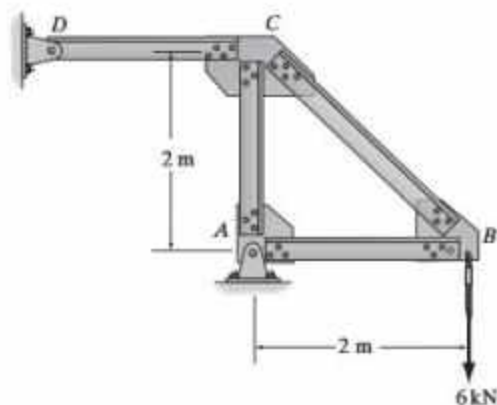
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F3-1. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura e indique si está en tensión o en compresión.



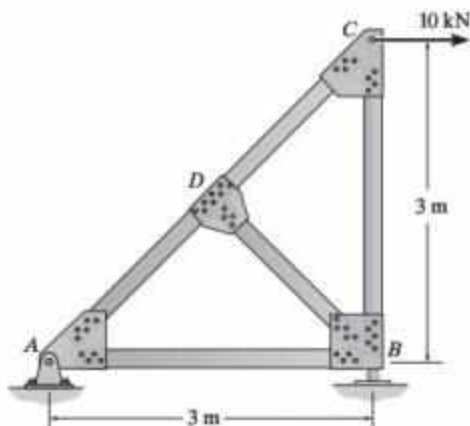
F3-1

F3-2. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura e indique si está en tensión o en compresión.



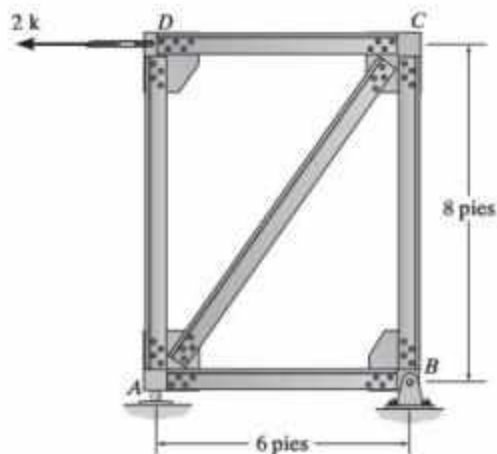
F3-2

F3-3. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura e indique si está en tensión o en compresión.



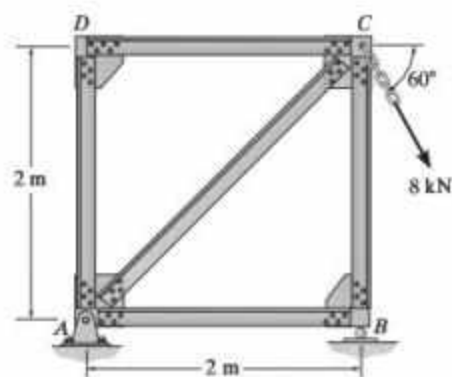
F3-3

F3-4. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura e indique si está en tensión o en compresión.



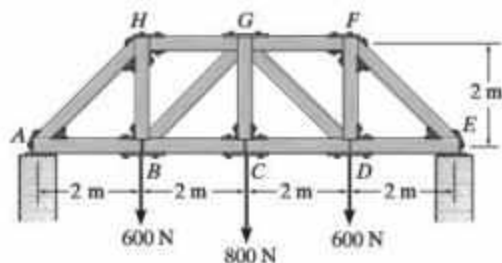
F3-4

F3-5. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura e indique si está en tensión o en compresión.



F3-5

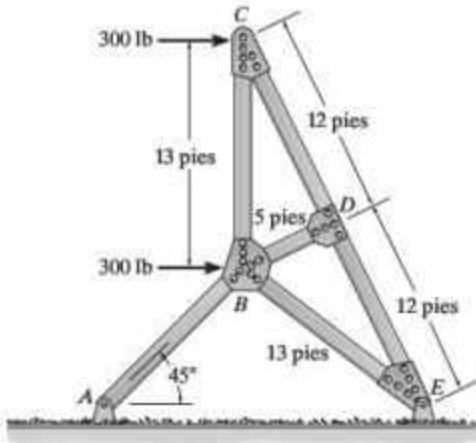
F3-6. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura e indique si está en tensión o en compresión.



F3-6

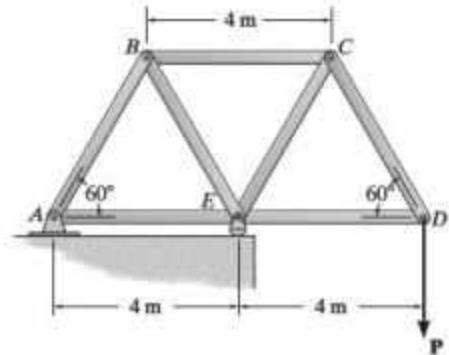
PROBLEMAS

3-5. Un señalamiento está sometido a una carga del viento que ejerce fuerzas horizontales de 300 lb en las juntas B y C de una de las armaduras laterales de soporte. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura e indique si los elementos están en tensión o en compresión.

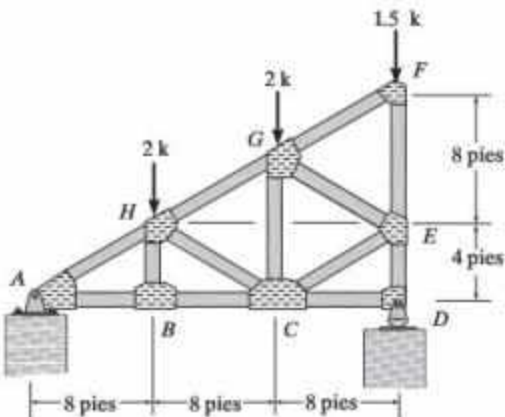
**Prob. 3–5**

3-7. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P = 8 \text{ kN}$.

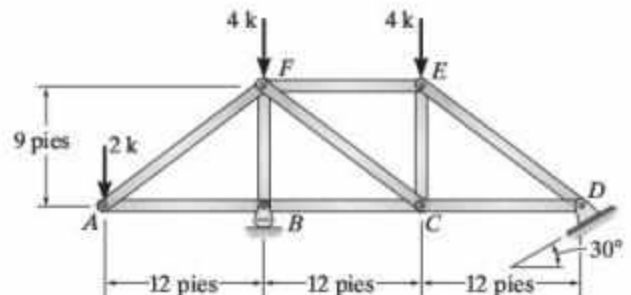
*3-8. Si la fuerza máxima que cualquier elemento puede soportar es de 8 kN en tensión y 6 kN en compresión, determine la fuerza P máxima que puede soportar la junta D .

**Probs. 3–7/3–8**

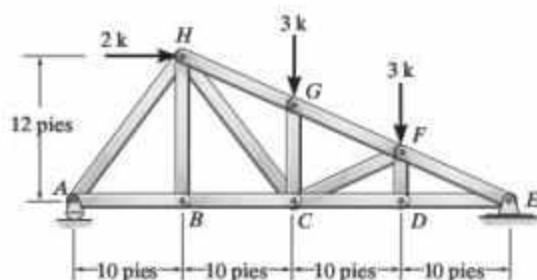
3-6. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Suponga que todos los elementos están conectados mediante articulaciones.

**Prob. 3-6**

3-9. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

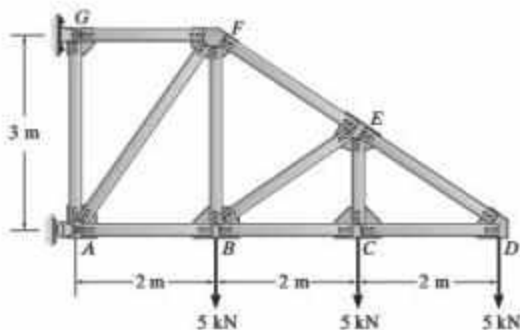
**Prob. 3-9**

3-10. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.



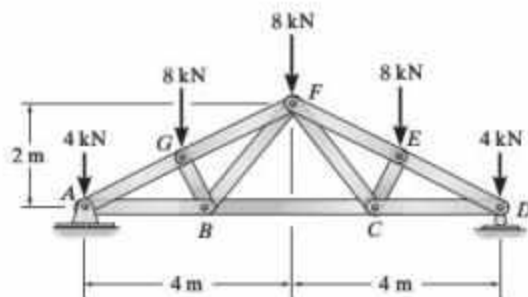
Prob. 3-10

3-11. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Suponga que todos los elementos están conectados mediante articulaciones.



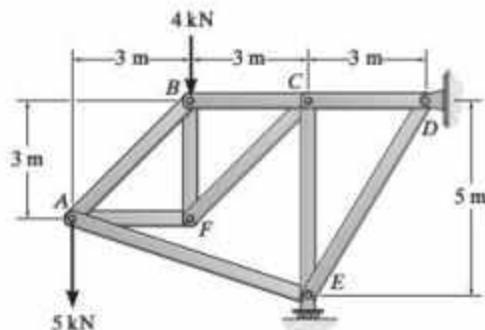
Prob. 3-11

***3-12.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Suponga que todos los elementos están conectados mediante articulaciones. $AG = GF = FE = ED$.



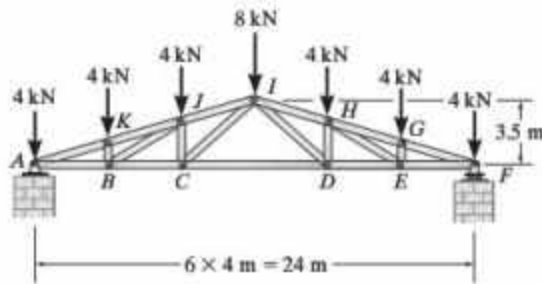
Prob. 3-12

3-13. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.



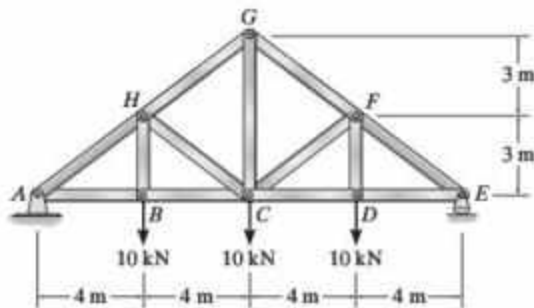
Prob. 3-13

3-14. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura de techo. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.



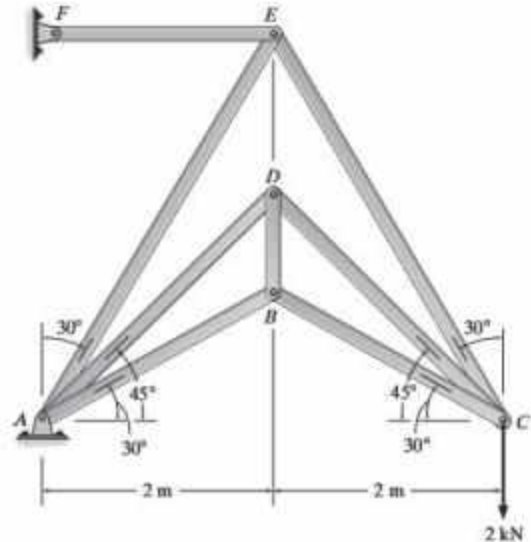
Prob. 3-14

3-15. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura de techo. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Suponga que todos los elementos están conectados mediante articulaciones.



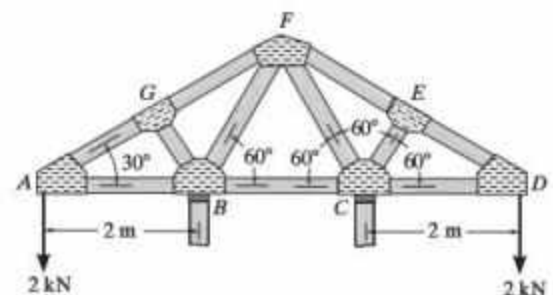
Prob. 3-15

***3-16.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.



Prob. 3-16

3-17. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura de techo. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Suponga que B es un pasador y que C es un soporte de rodillos.



Prob. 3-17

3.5 El método de las secciones

Si se deben determinar las fuerzas sólo en unos cuantos elementos de una armadura, por lo general el método de las secciones proporciona el medio más directo para obtener estas fuerzas. El *método de las secciones* consiste en hacer pasar una *sección imaginaria* a través de la armadura, de modo que la corta en dos partes. Siempre que toda la armadura esté en equilibrio, cada una de las dos partes también debe estar en equilibrio y, en consecuencia, las tres ecuaciones de equilibrio pueden aplicarse a cualquiera de estas dos partes para determinar las fuerzas en los elementos de la "sección cortada".

Cuando se emplea el método de las secciones para determinar la fuerza en un elemento en particular, debe tomarse una decisión sobre la forma de "cortar" o seccionar la armadura. Como sólo pueden aplicarse *tres* ecuaciones independientes de equilibrio ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_O = 0$) a la parte aislada de la armadura, trate de seleccionar una sección que, en general, no pase a través de más de *tres* elementos en los que las fuerzas sean desconocidas. Por ejemplo, considere la armadura de la figura 3-25a. Si se va a determinar la fuerza en el elemento GC , la sección aa sería adecuada. En las figuras 3-25b y 3-25c se muestran los diagramas de cuerpo libre de las dos partes. En particular, tenga en cuenta que la línea de acción de cada fuerza en un elemento seccionado se especifica a partir de la *geometría* de la armadura, puesto que la fuerza en un elemento pasa a lo largo del eje del elemento. Además, las fuerzas de un elemento que actúan sobre una parte de la armadura son iguales pero opuestas a las que actúan sobre la otra parte, lo que se debe a la tercera ley de Newton. Como puede observarse, los elementos que supuestamente están en *tensión* (BC y CG) están sometidos a un "jalón", mientras que el elemento en *compresión* (GF) está sometido a un "empujón".

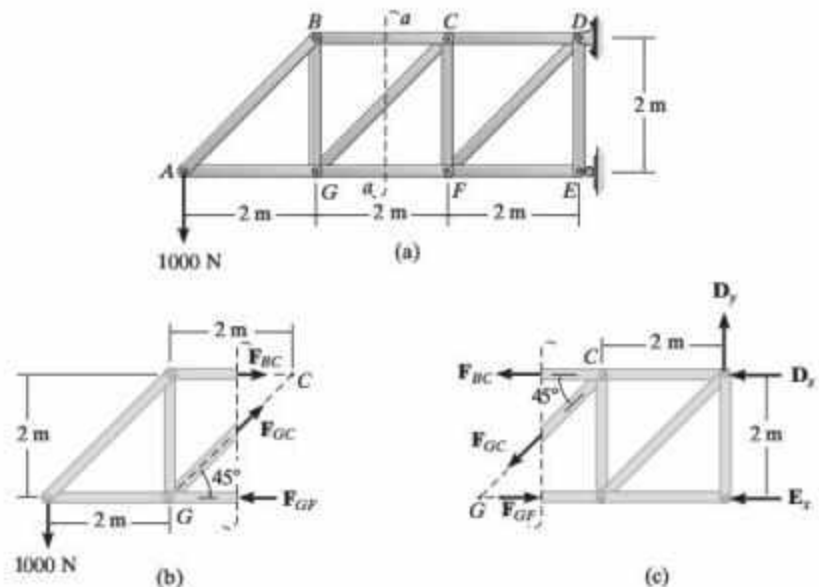


Figura 3-25

Las tres fuerzas de elemento desconocidas \mathbf{F}_{BC} , \mathbf{F}_{GC} y \mathbf{F}_{GF} pueden obtenerse mediante la aplicación de las tres ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre de la figura 3-25b. Sin embargo, si se considera el diagrama de cuerpo libre de la figura 3-25c, deberán determinarse en primer lugar las tres reacciones de soporte \mathbf{D}_x , \mathbf{D}_y y \mathbf{E}_x . ¿Por qué? (Por supuesto, esto se hace de la manera usual, considerando un diagrama de cuerpo libre de *toda la armadura*). Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, considere la manera de escribir las ecuaciones con el fin de obtener una *solución directa* para cada una de las incógnitas, en vez de tener que resolver ecuaciones simultáneas. Por ejemplo, si se suman momentos respecto a C en la figura 3-25b generaría una solución directa para \mathbf{F}_{GF} puesto que \mathbf{F}_{BC} y \mathbf{F}_{GC} crean momentos cero alrededor de C . Del mismo modo, \mathbf{F}_{BC} puede obtenerse directamente a partir de una sumatoria de momentos alrededor de G . Por último, \mathbf{F}_{GC} puede determinarse directamente a partir de una sumatoria de fuerzas en la dirección vertical, dado que \mathbf{F}_{GF} y \mathbf{F}_{BC} no tienen componentes verticales.

Como en el método de los nudos, hay dos formas de determinar el sentido correcto de una fuerza de elemento desconocida.

1. Siempre suponga que las fuerzas de elemento desconocidas en la sección cortada están en tensión, es decir, "jalando" el elemento. De esta manera, la solución numérica de las ecuaciones de equilibrio generará escalares positivos para los elementos en tensión y escalares negativos para los elementos en compresión.
2. En muchos casos, el sentido correcto de una fuerza de elemento desconocida puede determinarse "por inspección". Por ejemplo, \mathbf{F}_{BC} es una fuerza de tensión como se representa en la figura 3-25b, puesto que el equilibrio de momentos respecto a G requiere que \mathbf{F}_{BC} cree un momento opuesto al de la fuerza de 1000 N. Además, \mathbf{F}_{GC} es de tensión porque su componente vertical debe equilibrar la fuerza de 1000 N. En casos más complicados, el sentido de una fuerza de elemento desconocida puede suponerse. Si la solución resulta ser un escalar negativo, esto indicará que el sentido de la fuerza es opuesto al mostrado en el diagrama de cuerpo libre. Éste es el método que se utilizará en los siguientes problemas de ejemplo.



En el norte de California se construye una armadura de puente sobre el lago Shasta.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un medio para aplicar el método de las secciones a fin de determinar las fuerzas en los elementos de una armadura.

Diagrama de cuerpo libre

- Tome una decisión sobre la forma de “cortar” o seccionar la armadura a través de los elementos en los que deben determinarse las fuerzas.
- Antes de aislar la sección adecuada, quizá se requiera determinar las reacciones *externas* de la armadura, de modo que las tres ecuaciones de equilibrio *sólo* se usen para encontrar las fuerzas de elemento en la sección cortada.
- Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la parte de la armadura seccionada que tenga el menor número de fuerzas en ella.
- Utilice uno de los dos métodos descritos anteriormente para establecer el sentido de una fuerza desconocida.

Ecuaciones de equilibrio

- Los momentos deben sumarse alrededor de un punto que se encuentre en la intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas; de esta manera, la tercera fuerza desconocida se determina directamente a partir de la ecuación.
- Si dos de las fuerzas desconocidas son *paralelas*, las fuerzas pueden sumarse en forma *perpendicular* a la dirección de estas incógnitas a fin de determinar *directamente* la tercera fuerza desconocida.



Ejemplo de una armadura Warren (con verticales)

EJEMPLO 3.5

Determine la fuerza en los elementos GJ y CO de la armadura de techo que se muestra en la fotografía. Las dimensiones y las cargas se muestran en la figura 3-26a. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Las reacciones en los soportes ya se han calculado.

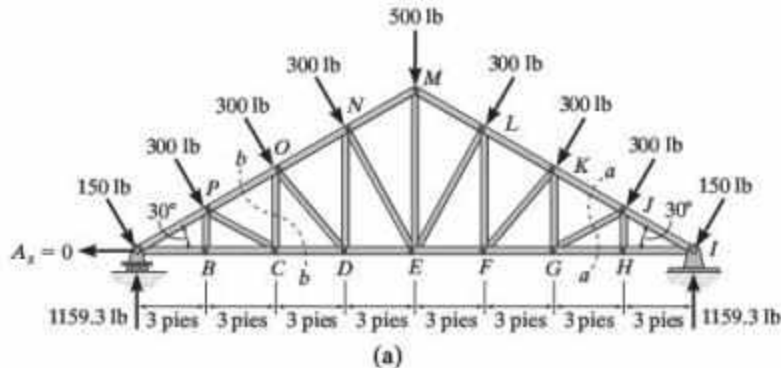


Figura 3-26

SOLUCIÓN**Elemento CF.**

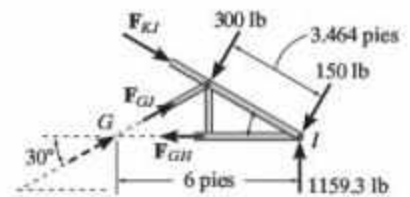
Diagrama de cuerpo libre. La fuerza en el elemento GJ puede obtenerse al considerar la sección aa de la figura 3-26a. En la figura 3-26b se muestra el diagrama de cuerpo libre de la parte derecha de esta sección.

Ecuaciones de equilibrio. Aplicando $\sum M_I = 0$ se puede obtener una solución directa para F_{GJ} . ¿Por qué? Para simplificar, deslice F_{GJ} hacia el punto G (principio de transmisibilidad), figura 3-26b. Por lo tanto,

$$\sum M_I = 0; \quad -F_{GJ} \sin 30^\circ (6) + 300(3.464) = 0$$

$$F_{GJ} = 346 \text{ lb (C)}$$

Resp.



(b)

Elemento GC.

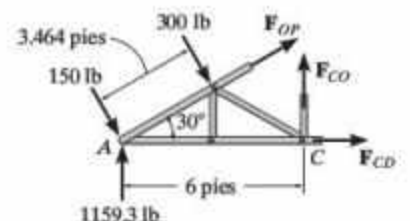
Diagrama de cuerpo libre. La fuerza en CO puede obtenerse usando la sección bb de la figura 3-26a. En la figura 3-26c se muestra el diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda de la sección.

Ecuaciones de equilibrio. Los momentos se sumarán respecto al punto A con el fin de eliminar las incógnitas F_{OP} y F_{CD} .

$$\sum M_A = 0; \quad -300(3.464) + F_{CO}(6) = 0$$

$$F_{CO} = 173 \text{ lb (T)}$$

Resp.



(c)

EJEMPLO 3.6

Determine la fuerza en los elementos GF y GD de la armadura que se muestra en la figura 3-27a. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Las reacciones en los soportes ya se han calculado.

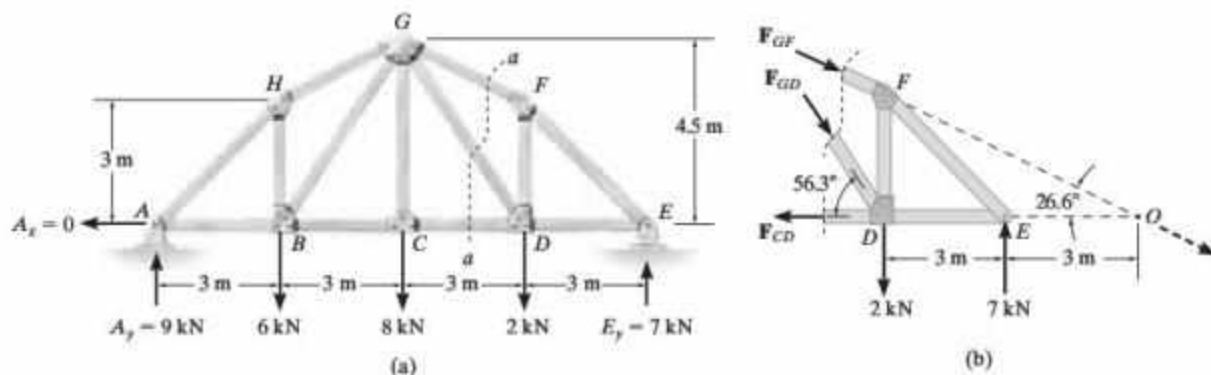


Figura 3-27

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se considerará la sección aa de la figura 3-27a. ¿Por qué? En la figura 3-27b se muestra el diagrama de cuerpo libre a la derecha de esta sección. La distancia EO puede determinarse mediante triángulos semejantes o al observar que el elemento GF cae verticalmente $4.5 - 3 = 1.5$ m en 3 m, figura 3-27a. Por consiguiente, para caer 4.5 m desde G , la distancia de C a O debe ser de 9 m. Además, los ángulos que forman F_{GD} y F_{GF} con la horizontal son $\tan^{-1}(4.5/3) = 56.3^\circ$ y $\tan^{-1}(4.5/9) = 26.6^\circ$, respectivamente.

Ecuaciones de equilibrio. La fuerza en GF puede determinarse directamente aplicando $\Sigma M_D = 0$. ¿Por qué? Para el cálculo aplique el principio de transmisibilidad y deslice F_{GF} hasta el punto O . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \zeta + \Sigma M_D = 0; \quad -F_{GF} \sin 26.6^\circ(6) + 7(3) &= 0 \\ F_{GF} &= 7.83 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

La fuerza en GD se determina directamente al aplicar $\Sigma M_O = 0$. Para simplificar aplique el principio de transmisibilidad y deslice F_{GD} hacia D . Así,

$$\begin{aligned} \zeta + \Sigma M_O = 0; \quad -7(3) + 2(6) + F_{GD} \sin 56.3^\circ(6) &= 0 \\ F_{GD} &= 1.80 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.7

Determine la fuerza en los elementos BC y MC de la armadura K que se muestra en la figura 3-28a. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Las reacciones en los soportes ya se han calculado.

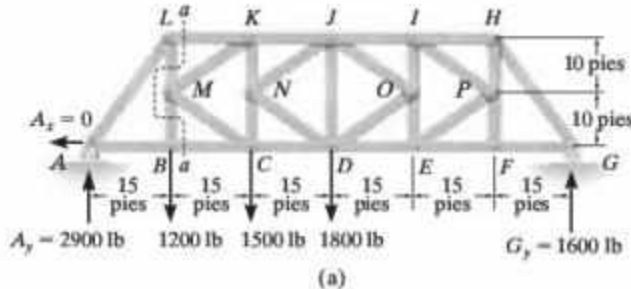
**SOLUCIÓN**

Diagrama de cuerpo libre. Aunque la sección aa que se muestra en la figura 3-28a realiza un corte a través de cuatro elementos, es posible descomponer la fuerza en el elemento BC usando esta sección. En la figura 3-28b se muestra el diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda de la armadura.

Ecuaciones de equilibrio. La suma de los momentos respecto al punto L elimina tres de las incógnitas, por lo que

$$\sum M_L = 0; \quad -2900(15) + F_{BC}(20) = 0$$

$$F_{BC} = 2175 \text{ lb (T)} \quad \text{Resp.}$$

Diagramas de cuerpo libre. La fuerza en MC puede obtenerse de manera indirecta al obtener primero la fuerza en MB a partir del equilibrio de fuerzas verticales en la junta B , figura 3-28c, es decir, $F_{MB} = 1200 \text{ lb (T)}$. Entonces, con base en el diagrama de cuerpo libre de la figura 3-28b,

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 2900 - 1200 + 1200 - F_{ML} = 0$$

$$F_{ML} = 2900 \text{ lb (T)}$$

En la figura 3-28d se muestra el diagrama de cuerpo libre de la junta M , en el cual se usan estos resultados.

Ecuaciones de equilibrio.

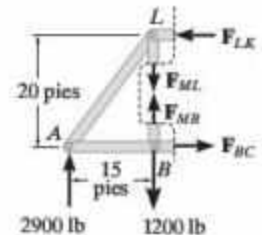
$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)F_{MC} - \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)F_{MK} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 2900 - 1200 - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)F_{MC} - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)F_{MK} = 0$$

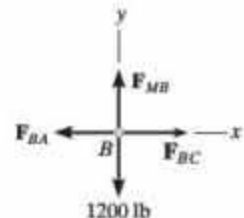
$$F_{MK} = 1532 \text{ lb (C)} \quad F_{MC} = 1532 \text{ lb (T)} \quad \text{Resp.}$$

En ocasiones, como en este ejemplo, la aplicación tanto del método de las secciones como del método de los nudos conduce a una solución más directa del problema.

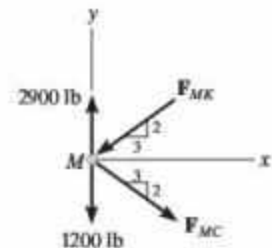
También es posible obtener la fuerza en MC usando el resultado de F_{BC} . En este caso, se pasa una sección vertical a través de LK , MK , MC y BC , figura 3-28a. Se aísla la sección izquierda y se aplica $\sum M_K = 0$.



(b)



(c)



(d)

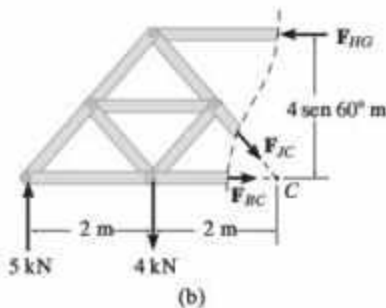
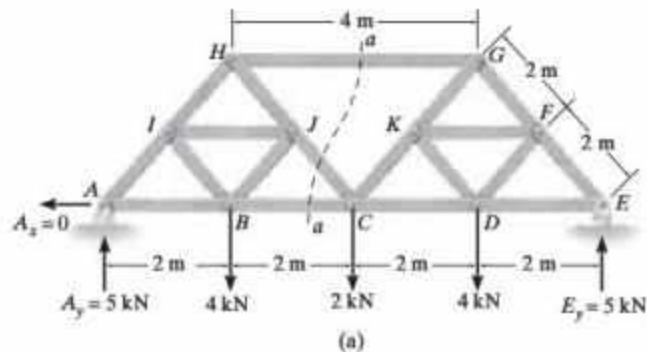
Figura 3-28

3.6 Armaduras compuestas

En la sección 3-2 se estableció que las armaduras compuestas se forman al conectar entre sí dos o más armaduras simples, ya sea mediante las barras o las juntas. De manera ocasional, este tipo de armadura se analiza de una mejor manera si se aplican *tanto* el método de los nudos *como* el de las secciones. Con frecuencia es conveniente reconocer antes el tipo de construcción, según la lista presentada en la sección 3-2, para después realizar el análisis aplicando el siguiente procedimiento.

EJEMPLO 3.8

Indique cómo analizar la armadura compuesta que se muestra en la figura 3-29a. Las reacciones en los apoyos ya se han calculado.



SOLUCIÓN

La armadura es compuesta puesto que las armaduras simples *ACH* y *CEG* están conectadas mediante el pasador en *C* y la barra *HG*.

La sección *aa* de la figura 3-29a corta la barra *HG* y otros dos elementos que tienen fuerzas desconocidas. En la figura 3-29b se muestra un diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda. La fuerza en *HG* se determina de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0; \quad -5(4) + 4(2) + F_{HG}(4 \sin 60^\circ) &= 0 \\ F_{HG} &= 3.46 \text{ kN (C)} \end{aligned}$$

Ahora se procede a determinar la fuerza en cada elemento de las armaduras simples siguiendo el método de los nudos. Por ejemplo, el diagrama de cuerpo libre de *ACH* se muestra en la figura 3-29c. Las juntas de esta armadura pueden analizarse en la siguiente secuencia:

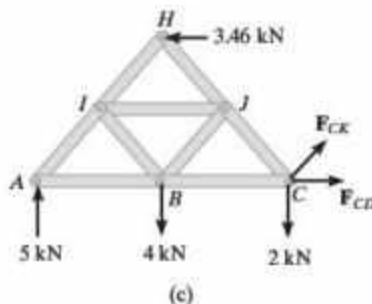


Figura 3-29

- Junta A:* Determine la fuerza en *AB* y *AI*.
- Junta H:* Determine la fuerza en *HI* y *HJ*.
- Junta I:* Determine la fuerza en *IJ* e *IB*.
- Junta B:* Determine la fuerza en *BC* y *BJ*.
- Junta J:* Determine la fuerza en *JC*.

EJEMPLO 3.9

Las armaduras de techo compuestas se usan en un vivero, como se muestra en la fotografía. Tienen las dimensiones y la carga que se muestran en la figura 3-30a. Indique la forma de analizar esta armadura.

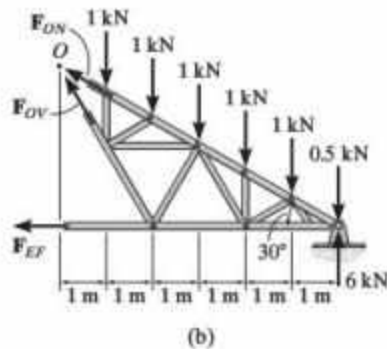
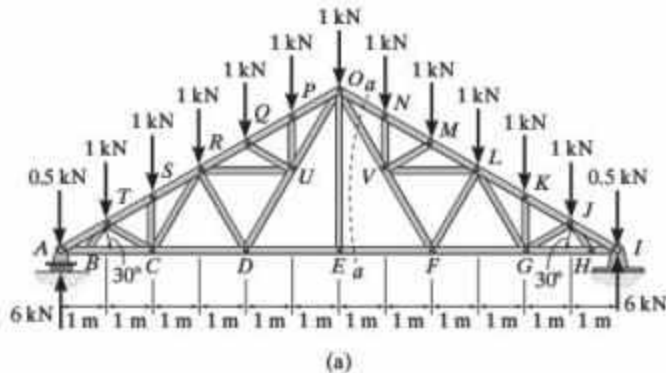


Figura 3-30

SOLUCIÓN

La fuerza en EF puede obtenerse usando la sección aa de la figura 3-30a. En la figura 3-30b se muestra el diagrama de cuerpo libre del segmento de la derecha.

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_O = 0; \quad & -1(1) - 1(2) - 1(3) - 1(4) - 1(5) - 0.5(6) + 6(6) - F_{EF}(6 \tan 30^\circ) = 0 \\ & F_{EF} = 5.20 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Por inspección, observe que BT , EO y HJ son elementos de fuerza cero puesto que $+\uparrow \Sigma F_y = 0$ en las juntas B , E y H , respectivamente. También, por aplicación $+\searrow \Sigma F_y = 0$ (perpendicular a AO) en las juntas de P , Q , S y T , puede determinarse directamente la fuerza en los elementos PU , QU , SC y TC , respectivamente.

EJEMPLO 3.10

Indique cómo analizar la armadura compuesta que se muestra en la figura 3-31a. Las reacciones en los soportes ya se han calculado.

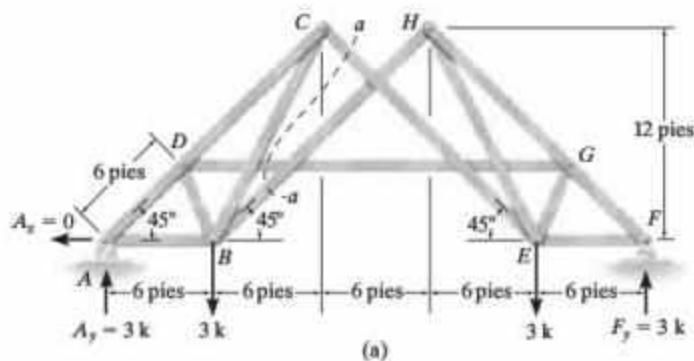
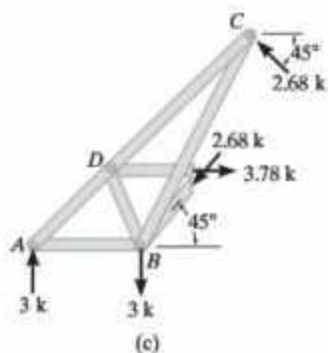
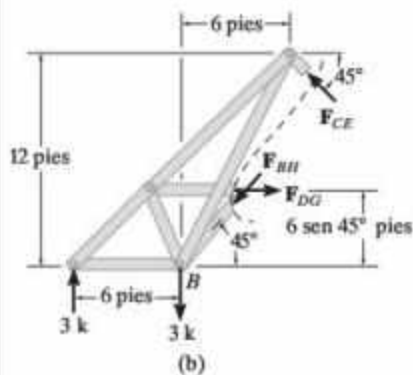


Figura 3-31



SOLUCIÓN

La armadura puede clasificarse como compuesta del tipo 2, puesto que las armaduras simples $ABCD$ y $FEHG$ están conectadas por tres barras que no son paralelas ni concurrentes, a saber, CE , BH y DG .

Si se usa la sección aa de la figura 3-31a, es posible determinar la fuerza en cada barra de conexión. En la figura 3-31b se muestra el diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda de esta sección. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad & -3(6) - F_{DG}(6 \sin 45^\circ) + F_{CE} \cos 45^\circ(12) \\ & + F_{CE} \sin 45^\circ(6) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 3 - 3 - F_{BH} \sin 45^\circ + F_{CE} \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad -F_{BH} \cos 45^\circ + F_{DG} - F_{CE} \cos 45^\circ = 0 \quad (3)$$

A partir de la ecuación (2), $F_{BH} = F_{CE}$; entonces, al resolver simultáneamente las ecuaciones (1) y (3) se obtiene

$$F_{BH} = F_{CE} = 2.68 \text{ k (C)} \quad F_{DG} = 3.78 \text{ k (T)}$$

Ahora puede realizarse el análisis de cada armadura simple conectada siguiendo el método de los nudos. Por ejemplo, con base en la figura 3-31c, esto puede hacerse en la siguiente secuencia.

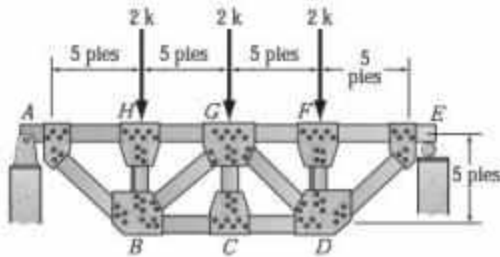
Junta A: Determine la fuerza en AB y AD .

Junta D: Determine la fuerza en DC y DB .

Junta C: Determine la fuerza en CB .

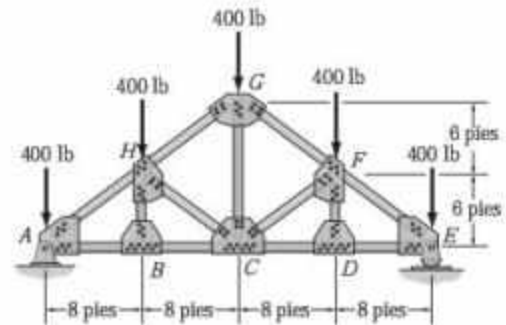
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F3-7. Determine la fuerza en los elementos HG , BG y BC e indique si están en tensión o en compresión.



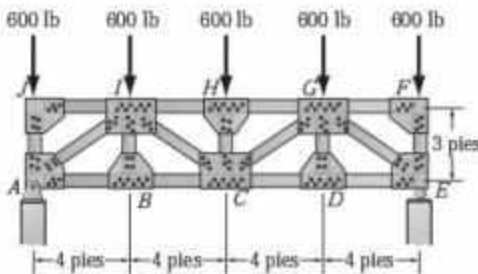
F3-7

F3-10. Determine la fuerza en los elementos GF , CF y CD e indique si están en tensión o en compresión.



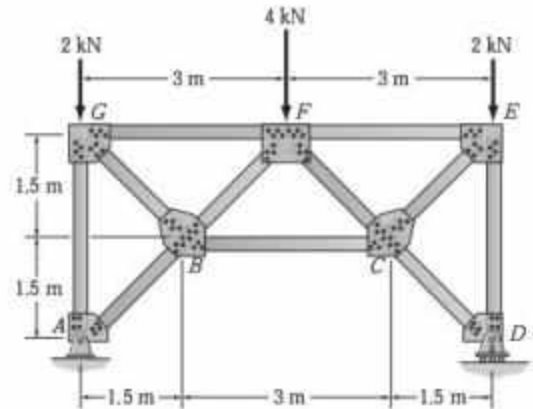
F3-10

F3-8. Determine la fuerza en los elementos HG , HC y BC e indique si están en tensión o en compresión.



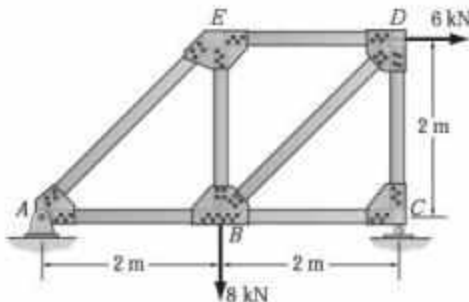
F3-8

F3-11. Determine la fuerza en los elementos FE , FC y BC e indique si están en tensión o en compresión.



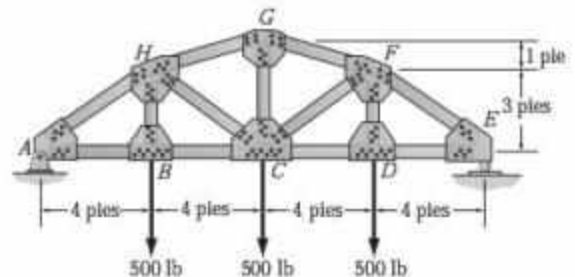
F3-11

F3-9. Determine la fuerza en los elementos ED , BD y BC e indique si están en tensión o en compresión.



F3-9

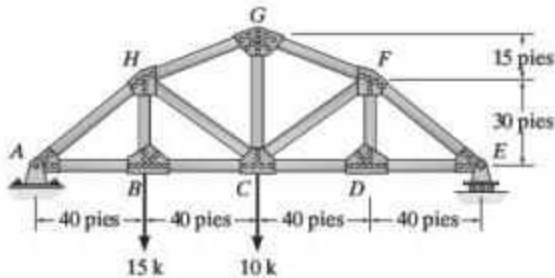
F3-12. Determine la fuerza en los elementos GF , CF y CD e indique si está en tensión o en compresión.



F3-12

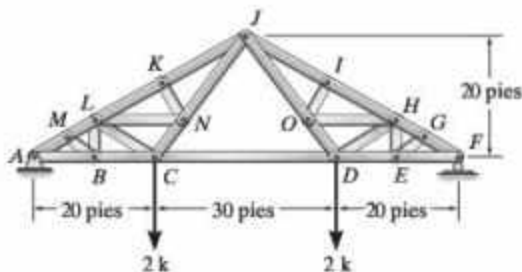
PROBLEMAS

3-18. Determine la fuerza en los elementos GF , FC y CD de la armadura de puente. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Suponga que todos los elementos están conectados mediante pasadores.



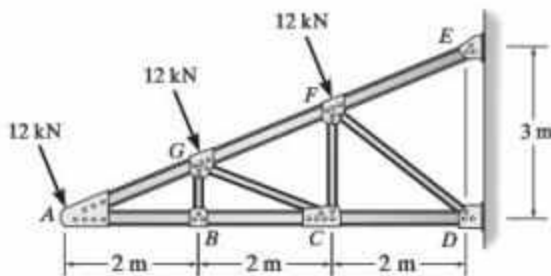
Prob. 3-18

3-19. Determine la fuerza en los elementos JK , JN y CD . Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Identifique todos los elementos de fuerza cero.



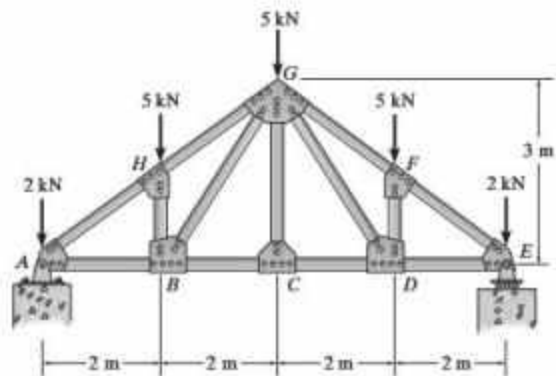
Prob. 3-19

***3-20.** Determine la fuerza en los elementos GF , FC y CD de la armadura en voladizo. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Suponga que todos los elementos están conectados mediante pasadores.



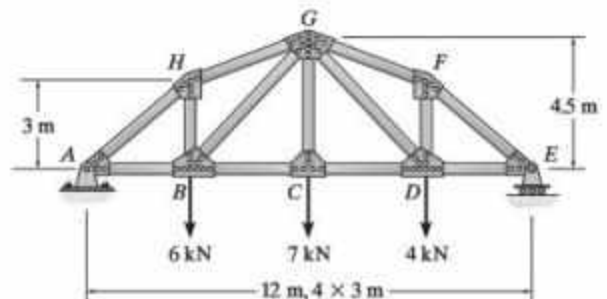
Prob. 3-20

3-21. La armadura *Howe* está sujeta a la carga que se muestra. Determine las fuerzas en los elementos GF , CD y GC . Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Suponga que todos los elementos están conectados mediante pasadores.



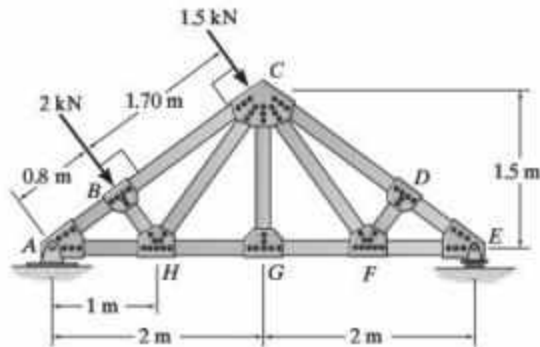
Prob. 3-21

3-22. Determine la fuerza en los elementos BG , HG y BC de la armadura e indique si los elementos están en tensión o en compresión.



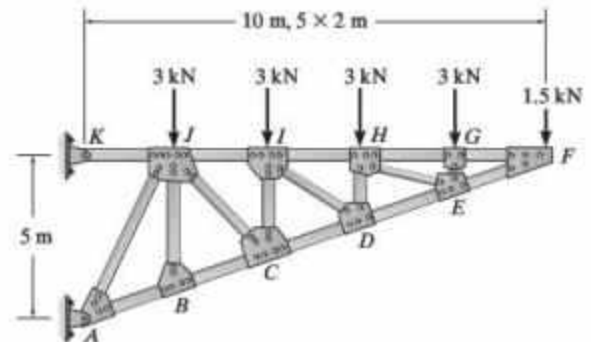
Prob. 3-22

3-23. Determine la fuerza en los elementos GF , CF y CD de la armadura de techo e indique si los elementos están en tensión o en compresión.



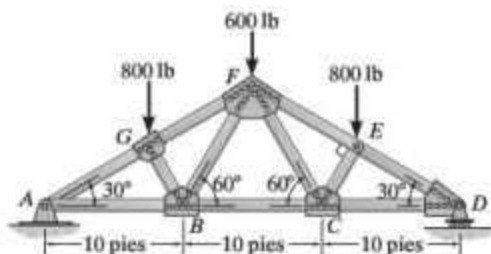
Prob. 3-23

3-25. Determine la fuerza en los elementos IH , ID y CD de la armadura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Suponga que todos los elementos están conectados mediante pasadores.



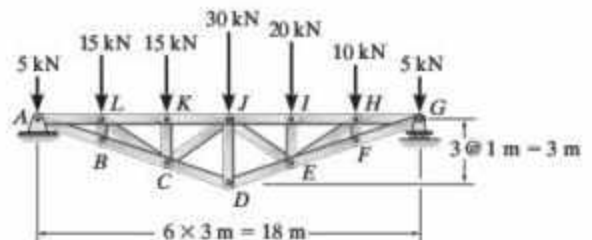
Probs. 3-25/3-26

***3-24.** Determine la fuerza en los elementos GF , FB y BC de la armadura *Fink* e indique si los elementos están en tensión o en compresión.



Prob. 3-24

3-27. Determine las fuerzas en los elementos KJ , CD y CI de la armadura. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.



Prob. 3-27

3.7 Armaduras complejas

Las fuerzas en los elementos de una armadura compleja pueden determinarse siguiendo el método de los nudos; sin embargo, la solución requerirá escribir las dos ecuaciones de equilibrio para cada una de las j juntas de la armadura y después resolver el conjunto completo de $2j$ ecuaciones *en forma simultánea*.* Este enfoque puede ser poco práctico si los cálculos se realizan manualmente, en especial cuando las armaduras son muy grandes. Por ello, a continuación se presenta un método más directo para analizar una armadura compleja, conocido como el método de los *elementos sustitutos*.

Procedimiento de análisis

Con referencia a la armadura de la figura 3-32a, se requieren los siguientes pasos para determinar las fuerzas en los elementos mediante el método de los elementos sustitutos.

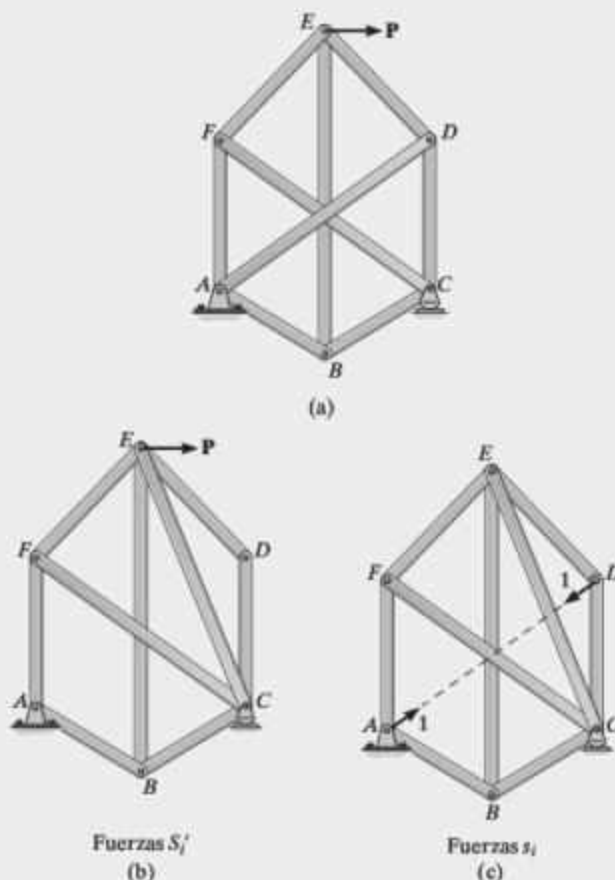


Figura 3-32

*Esto puede realizarse fácilmente empleando una computadora, como se muestra en el capítulo 14

Reducción a una armadura simple estable

Determine las reacciones en los soportes y comience por imaginar cómo analizaría la armadura aplicando el método de los nudos, es decir, pasando de una junta a otra y resolviendo para encontrar cada fuerza de elemento. Si se llega a una junta donde hay *tres incógnitas*, elimine uno de los elementos en la articulación y reemplácelo por un elemento *imaginario* en cualquier otra parte de la armadura. De esta manera, se reconstruye la armadura como una armadura simple estable.

Por ejemplo, en la figura 3-32a se observa que cada junta tendrá tres fuerzas de elemento *desconocidas* actuando sobre ella. Por lo tanto, se eliminará el elemento *AD* y se reemplazará con el elemento imaginario *CE*, figura 3-32b. Esta armadura puede analizarse ahora mediante el método de los nudos para los dos tipos de carga que siguen.

Carga externa sobre una armadura simple

Cargue la armadura simple con la carga real **P** y después determine la fuerza S'_i en cada elemento *i*. Cuando las reacciones ya han sido determinadas, en la figura 3-32b se puede comenzar en la junta *A* para determinar las fuerzas en *AB* y *AF*, después en la junta *F* para determinar las fuerzas en *FE* y *FC*; luego en la junta *D* para determinar las fuerzas en *DE* y *DC* (las cuales son iguales a cero); posteriormente, en la junta *E* para encontrar *EB* y *EC*, y finalmente la junta *B* para determinar la fuerza en *BC*.

Retiro de la carga externa de la armadura simple

Considere la armadura simple sin la carga externa **P**. Coloque *cargas unitarias* iguales pero opuestas alineadas sobre la armadura en las dos juntas de las cuales se retiró el elemento. Si estas fuerzas desarrollan una fuerza s_i en el *i*-ésimo elemento de una armadura, entonces por proporción una fuerza *x* desconocida en el elemento retirado ejercería una fuerza de xs_i en el *i*-ésimo elemento.

Con base en la figura 3-32c, las cargas unitarias iguales pero opuestas *no crearán reacciones* en *A* y *C* cuando se aplican las ecuaciones de equilibrio a toda la armadura. Las fuerzas s_i pueden determinarse mediante un análisis de las juntas en la misma secuencia anterior, es decir, primero la junta *A*, luego las juntas *F*, *D*, *E* y por último la junta *B*.

Superposición

Si los efectos de las dos cargas anteriores se combinan, la fuerza en el *i*-ésimo elemento de la armadura será

$$S_i = S'_i + xs_i \quad (1)$$

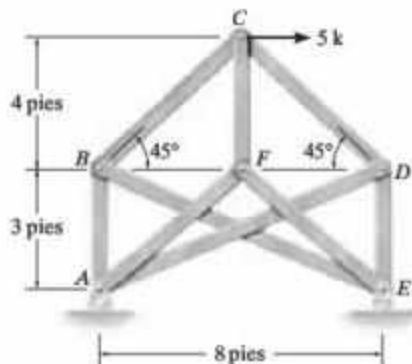
En particular, para el elemento sustituido *EC* en la figura 3-32b la fuerza $S_{EC} = S'_{EC} + xs_{EC}$. Como el elemento *EC* en realidad no existe en la armadura original, se elegirá *x* con una magnitud tal que produzca una *fuerza cero* en *EC*. Por consiguiente,

$$S'_{EC} + xs_{EC} = 0 \quad (2)$$

o $x = -S'_{EC}/s_{EC}$. Una vez que se ha determinado el valor de *x*, las fuerzas en los otros elementos *i* de la armadura compleja pueden determinarse a partir de la ecuación (1).

EJEMPLO 3.11

Determine la fuerza en cada elemento de la armadura compleja que se muestra en la figura 3-33a. Suponga que las juntas B , F y D se encuentran en la misma línea horizontal. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.



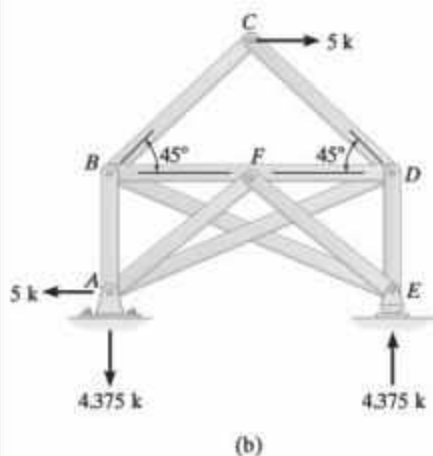
(a)

Figura 3-33

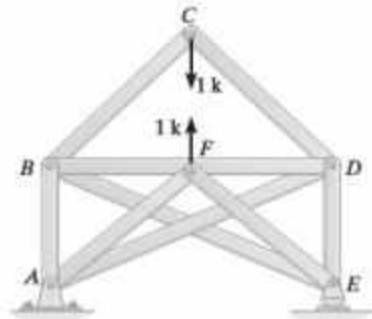
SOLUCIÓN

Reducción a una armadura simple estable. Por inspección, cada junta tiene tres fuerzas de elemento desconocidas. El análisis de las juntas puede realizarse en forma manual si, por ejemplo, se elimina el elemento CF y se sustituye por el elemento DB , figura 3-33b. La armadura resultante es estable y no colapsará.

Carga externa sobre la armadura simple. Como se muestra en la figura 3-33b, se han determinado las reacciones en los soportes de la armadura. Aplicando el método de los nudos, primero puede analizarse la junta C para encontrar las fuerzas en los elementos CB y CD ; luego la junta F , donde se observa que FA y FE son elementos de fuerza cero; después la junta E para determinar las fuerzas en los elementos EB y ED ; posteriormente, la junta D para determinar las fuerzas en DA y DB , y por último la junta B para determinar la fuerza en BA . Estas fuerzas S' se registran en la columna 2 de la tabla 1, donde se considera a la tensión como positiva y a la compresión como negativa.



(b)



(c)

Retiro de la carga externa de la armadura simple. En la figura 3-33c se muestra la carga unitaria que actúa sobre la armadura. Estas fuerzas iguales pero opuestas no crean reacciones externas sobre la armadura. El análisis de juntas sigue la misma secuencia indicada anteriormente; es decir, se analizan las juntas C, F, E, D y B. Los resultados del análisis de fuerzas s_i se registran en la columna 3 de la tabla 1.

Superposición. Se requiere

$$S_{DB} = S'_{DB} + x s_{DB} = 0$$

Al sustituir los datos en S'_{DB} y s_{DB} , donde S'_{DB} es negativa puesto que la fuerza es de compresión, se tiene

$$-2.50 + x(1.167) = 0 \quad x = 2.143$$

Los valores de $x s_i$ se registran en la columna 4 de la tabla 1, y las fuerzas de elemento reales $S_i = S'_i + x s_i$ se enlistan en la columna 5.

TABLA 1

Elemento	S'_i	s_i	$x s_i$	S_i
CB	3.54	-0.707	-1.52	2.02 (T)
CD	-3.54	-0.707	-1.52	5.05 (C)
FA	0	0.833	1.79	1.79 (T)
FE	0	0.833	1.79	1.79 (T)
EB	0	-0.712	-1.53	1.53 (C)
ED	-4.38	-0.250	-0.536	4.91 (C)
DA	5.34	-0.712	-1.53	3.81 (T)
DB	-2.50	1.167	2.50	0
BA	2.50	-0.250	-0.536	1.96 (T)
CB				2.14 (T)



Figura 3-34

3.8 Armaduras espaciales

Una *armadura espacial* consiste en elementos que están unidos entre sí por sus extremos para formar una estructura tridimensional estable. En la sección 3-2 se demostró que la forma más simple de una armadura bidimensional estable se compone de elementos dispuestos en forma de un triángulo. Después se construyó una armadura plana simple con base en este elemento triangular, añadiendo dos elementos a la vez para formar nuevos miembros. De manera similar, el miembro más simple de una armadura espacial estable es un *tetraedro*, formado por la conexión de seis elementos mediante cuatro juntas como se muestra en la figura 3-34. Todos los elementos adicionales añadidos a este elemento básico serían redundantes para soportar la fuerza **P**. Una armadura espacial simple puede construirse a partir de este miembro tetraédrico básico, agregando tres nuevos elementos y otra junta para así formar tetraedros multiconectados.

Determinación y estabilidad. Al observar que en tres dimensiones hay tres ecuaciones de equilibrio para cada junta ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$), entonces para una armadura espacial con un número j de juntas, hay $3j$ ecuaciones disponibles. Si la armadura tiene un número b de barras y un número r de reacciones, como es el caso de una armadura plana (ecuaciones 3-1 y 3-2), es posible escribir

$b + r < 3j$	armadura inestable	(3-3)
$b + r = 3j$	estáticamente determinada — comprobar estabilidad	
$b + r > 3j$	estáticamente indeterminada — comprobar estabilidad	

La *estabilidad externa* de la armadura espacial requiere que las reacciones en los soportes mantengan la armadura en equilibrio de fuerzas y momentos respecto de cualesquier ejes. En ocasiones esto puede comprobarse por inspección, pero si la armadura es inestable una solución de las ecuaciones de equilibrio dará resultados inconsistentes. La *estabilidad interna* puede comprobarse a veces mediante una inspección cuidadosa de la disposición de los elementos. Siempre que cada junta se mantenga fija por sus soportes o elementos conectados, de modo que no pueda moverse con respecto a las demás juntas, la estructura puede clasificarse como estable internamente. Además, si se hace un análisis de fuerzas de la armadura y se obtienen resultados inconsistentes, entonces la configuración de la armadura será inestable o tendrá una “forma crítica”.

Supuestos para el diseño. Los elementos de una armadura espacial pueden tratarse como elementos de fuerza axial, siempre que la carga externa se aplique en las juntas y éstas se formen mediante conexiones de rótula. Este supuesto se justifica suponiendo que los elementos unidos por una conexión se crucen en un punto común y el peso de los elementos pueda ignorarse. En los casos en que el peso de un elemento se incluya en el análisis, por lo general resulta satisfactorio aplicarlo como una fuerza vertical, con la mitad de su magnitud aplicada a cada extremo del elemento.

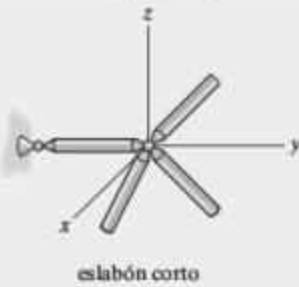
Para el análisis de fuerzas, los soportes de una armadura espacial suelen modelarse como un eslabón corto, una junta de rodillos plana, una junta de rodillos ranurada o una junta de rótula. En la tabla 3-1 se muestra cada uno de estos soportes y sus componentes de fuerza reactiva.



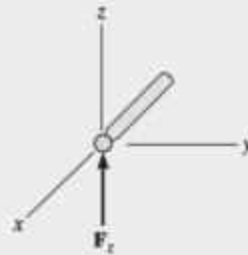
El techo de este pabellón se sostiene mediante un sistema de armaduras espaciales.

TABLA 3-1 Soportes y sus componentes de fuerza reactiva

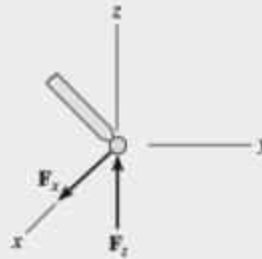
(1)



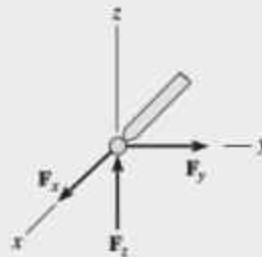
(2)



(3)



(4)



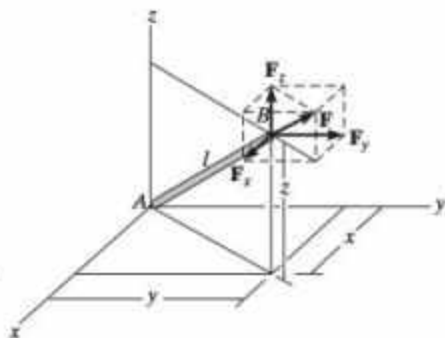


Figura 3-35

Componentes de fuerza x, y, z . Como el análisis de una armadura espacial es tridimensional, a menudo será necesario descomponer la fuerza F de un elemento en los componentes que actúan a lo largo de los ejes x, y, z . Por ejemplo, en la figura 3-35 el elemento AB tiene una longitud l y proyecciones conocidas x, y, z a lo largo de los ejes coordenados. Estas proyecciones pueden relacionarse con la longitud del elemento mediante la ecuación

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3-4)$$

Como la fuerza F actúa a lo largo del eje del elemento, las componentes de F pueden determinarse por *proporción* de la siguiente manera:

$$F_x = F\left(\frac{x}{l}\right) \quad F_y = F\left(\frac{y}{l}\right) \quad F_z = F\left(\frac{z}{l}\right) \quad (3-5)$$

Tenga en cuenta que esto requiere

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (3-6)$$

El uso de estas ecuaciones se ilustrará en el ejemplo 3-12.

Elementos de fuerza cero. En algunos casos, el análisis de las juntas de una armadura puede simplificarse si es posible detectar los elementos de fuerza cero al reconocer dos casos comunes en la geometría de las juntas.

Caso 1. Si todos los elementos conectados a una armadura menos uno están en el mismo plano y siempre que ninguna carga externa actúe sobre la junta, el elemento que no se encuentra en el plano de los demás elementos debe estar sometido a una fuerza cero. La prueba de esta afirmación se muestra en la figura 3-36, donde los elementos A, B y C están en el plano $x-y$. Como la componente z de F_D debe ser cero para satisfacer $\Sigma F_z = 0$, el elemento D debe ser un elemento de fuerza cero. Por el mismo razonamiento, el elemento D soportará una carga que puede determinarse a partir de $\Sigma F_z = 0$ si una fuerza externa actúa sobre la junta y tiene una componente que actúa a lo largo del eje z .

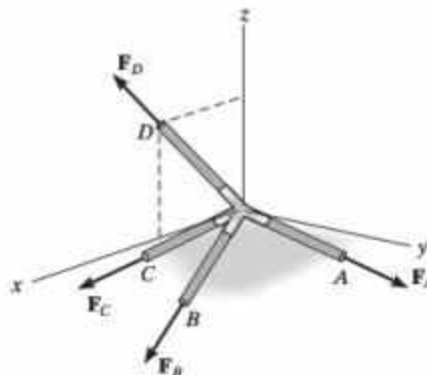


Figura 3-36



Debido a su eficiencia de costos, las torres de este tipo se usan para sostener varias líneas de transmisión eléctrica.

Caso 2. Si se ha determinado que todos menos dos de varios elementos conectados a una junta soportan fuerza cero, los dos elementos restantes también deben soportar fuerza cero, siempre que no se encuentran a lo largo de la misma línea. Esta situación se ilustra en la figura 3-37, donde se sabe que A y C son elementos de fuerza cero. Como F_D es colineal con el eje y , entonces la aplicación de $\Sigma F_x = 0$ o $\Sigma F_z = 0$ requiere que las componentes x o z de F_B sean cero. En consecuencia, $F_B = 0$. Si éste es el caso, $F_D = 0$ puesto que $\Sigma F_y = 0$.

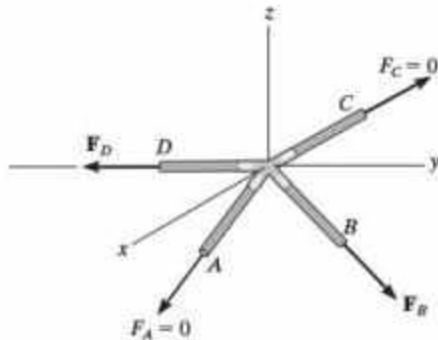


Figura 3-37

Debe prestarse atención especial a los dos casos anteriores de carga y geometría de las juntas, puesto que el análisis de una armadura espacial puede simplificarse considerablemente si se detectan primero los elementos de fuerza cero.

Procedimiento de análisis

Para determinar las fuerzas desarrolladas en los elementos de una armadura espacial puede usarse el método de las secciones o el método de los nudos.

Método de las secciones

Si sólo deben determinarse *algunas* fuerzas de elemento, puede usarse el método de las secciones. Cuando se pasa una sección imaginaria a través de una armadura y ésta se divide en dos partes, el sistema de fuerza que actúa en cada una de las partes debe satisfacer las seis ecuaciones escalares de equilibrio: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$. Mediante la elección adecuada de la sección y los ejes para sumar fuerzas y momentos, es posible calcular directamente muchas de las fuerzas de elemento desconocidas en una armadura espacial, empleando una sola ecuación de equilibrio. A este respecto, recuerde que el *momento* de una fuerza respecto a un eje es *cero* siempre que la fuerza sea paralela al eje o su línea de acción pase a través de un punto en el eje.

Método de los nudos

En general, si deben determinarse las fuerzas en *todos* los elementos de la armadura, el método de los nudos es el más adecuado para realizar el análisis. Cuando se utiliza el método de los nudos, es necesario resolver las tres ecuaciones de equilibrio escalares $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$ en cada junta. Como es relativamente fácil dibujar los diagramas de cuerpo libre y aplicar las ecuaciones de equilibrio, el método de los nudos es muy consistente en su aplicación.

EJEMPLO 3.12

Determine la fuerza en cada elemento de la armadura espacial que se muestra en la figura 3-38a. La armadura está soportada por una junta de rótula en A , una junta de rodillo ranurado en B y un cable en C .

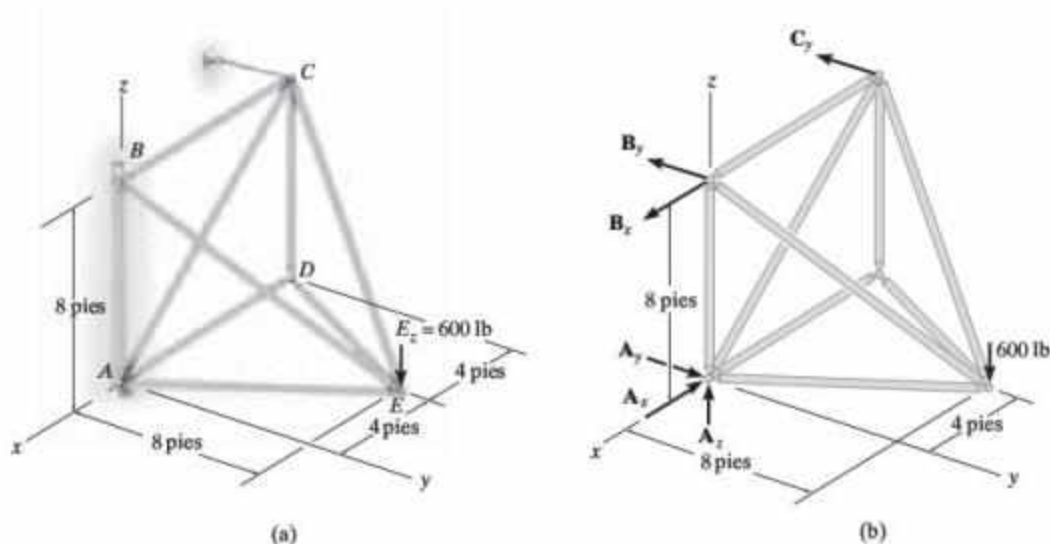


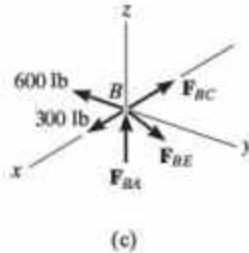
Figura 3-38

SOLUCIÓN

La armadura es estáticamente determinada puesto que $b + r = 3j$ o bien $9 + 6 = 3(5)$, figura 3-38b.

Reacciones en los soportes. Es posible obtener las reacciones en los soportes a partir del diagrama de cuerpo libre de toda la armadura, figura 3-38b, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll}
 \Sigma M_y = 0; & -600(4) + B_x(8) = 0 & B_x = 300 \text{ lb} \\
 \Sigma M_z = 0; & C_y = 0 & C_y = 0 \\
 \Sigma M_x = 0; & B_y(8) - 600(8) = 0 & B_y = 600 \text{ lb} \\
 \Sigma F_x = 0; & 300 - A_x = 0 & A_x = 300 \text{ lb} \\
 \Sigma F_y = 0; & A_y - 600 = 0 & A_y = 600 \text{ lb} \\
 \Sigma F_z = 0; & A_z - 600 = 0 & A_z = 600 \text{ lb}
 \end{array}$$



Junta B. El método de los nudos puede empezar en *B*, puesto que hay tres fuerzas de elemento desconocidas en esta junta, figura 3-38c. Las componentes de F_{BE} pueden determinarse por proporción a la longitud del elemento *BE*, como se indica en las ecuaciones 3-5. Se tiene que

$$\Sigma F_y = 0; \quad -600 + F_{BE}\left(\frac{8}{12}\right) = 0 \quad F_{BE} = 900 \text{ lb (T)} \quad \text{Resp.}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad 300 - F_{BC} - 900\left(\frac{4}{12}\right) = 0 \quad F_{BC} = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad F_{BA} - 900\left(\frac{8}{12}\right) = 0 \quad F_{BA} = 600 \text{ lb (C)} \quad \text{Resp.}$$

Junta A. Usando el resultado para $F_{BA} = 600 \text{ lb (C)}$, el diagrama de cuerpo libre de la junta *A* se muestra en la figura 3-38d. Se tiene

$$\Sigma F_z = 0; \quad 600 - 600 + F_{AC} \sin 45^\circ = 0 \\ F_{AC} = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad -F_{AE}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + 600 = 0 \\ F_{AE} = 670.8 \text{ lb (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad -300 + F_{AD} + 670.8\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ F_{AD} = 0 \quad \text{Resp.}$$

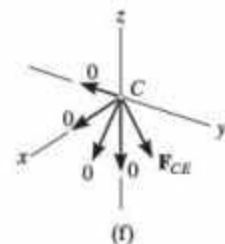
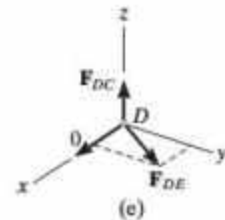
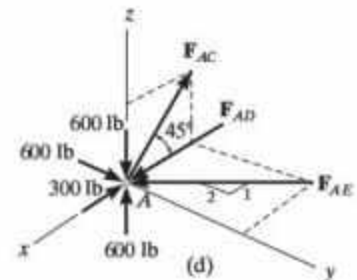
Junta D. Por inspección, los elementos en la junta *D*, figura 3-38a, soportan fuerza cero, ya que la disposición de los elementos es similar a cualquiera de los dos casos analizados en referencia a las figuras 3-36 y 3-37. Además, a partir de la figura 3-38e,

$$\Sigma F_x = 0; \quad F_{DE} = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad F_{DC} = 0 \quad \text{Resp.}$$

Junta C. Por observación del diagrama de cuerpo libre, figura 3-38f,

$$F_{CE} = 0 \quad \text{Resp.}$$



EJEMPLO 3.13

Determine los elementos de fuerza cero de la armadura que se muestra en la figura 3-39a. Los soportes ejercen las componentes de reacción en la armadura como se indica en la figura.

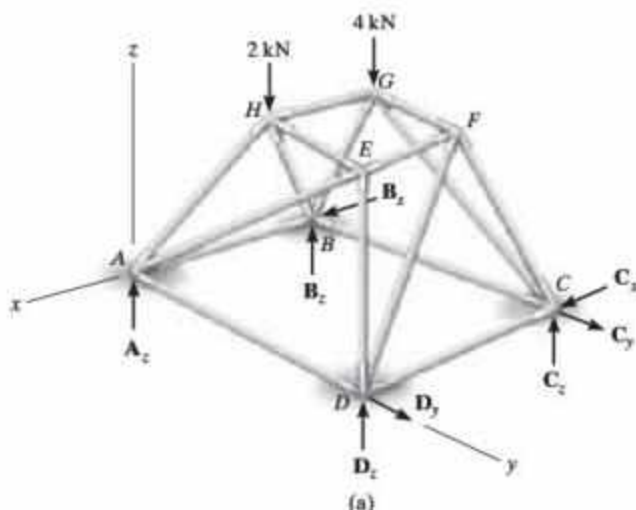
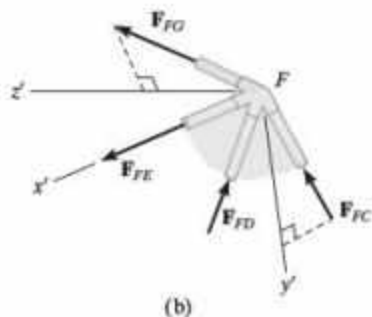
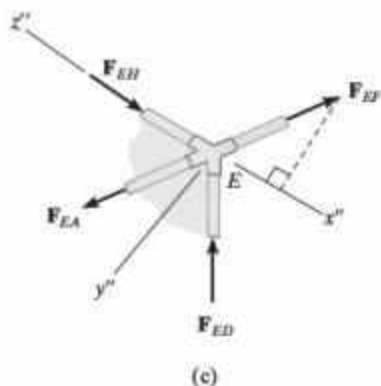


Figura 3-39



(b)



(c)

SOLUCIÓN

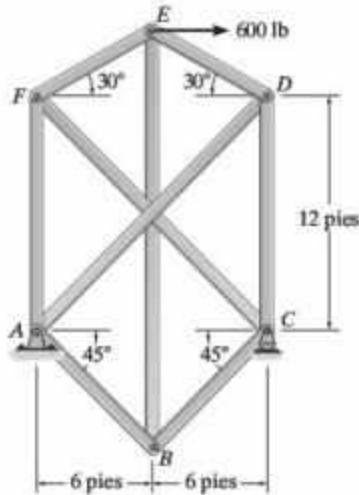
El diagrama de cuerpo libre, figura 3-39a, indica que hay ocho reacciones desconocidas para cuya solución sólo hay disponibles seis ecuaciones de equilibrio. Aunque éste sea el caso, las reacciones pueden determinarse, puesto que $b + r = 3j$ o $16 + 8 = 3(8)$.

Para detectar los elementos de fuerza cero, es necesario comparar las condiciones de la geometría de las juntas y la carga con las incluidas en las figuras 3-36 y 3-37. Considere la junta F , figura 3-39b. Como los elementos FC , FD y FE se encuentran en el plano $x'y'$ y FG no está en este plano, FG es un elemento de fuerza cero. (Debe satisfacerse $\Sigma F_{z'} = 0$.) De la misma manera, a partir de la junta E , figura 3-39c, EF es un elemento de fuerza cero, puesto que no se encuentra en el plano $y''z''$. (Debe satisfacerse $\Sigma F_{x''} = 0$.) Volviendo a la junta F , figura 3-39b, puede observarse que $F_{FD} = F_{FC} = 0$ puesto que $F_{FE} = F_{FG} = 0$, y no hay fuerzas externas que actúen sobre la junta. Use este procedimiento para demostrar que AB es un elemento de fuerza cero.

El análisis numérico de fuerzas en las juntas puede proceder ahora a analizar la junta G ($F_{GF} = 0$) para determinar las fuerzas en GH , GB , GC . Después se analiza la junta H para determinar las fuerzas en HE , HB y HA ; la junta E para determinar las fuerzas en EA , ED ; la junta A para determinar las fuerzas en AB , AD y A_z ; la junta B para determinar la fuerza en BC y B_x , B_z ; la junta D para determinar la fuerza en DC y D_y , D_z y, por último, la junta C para determinar C_x , C_y , C_z .

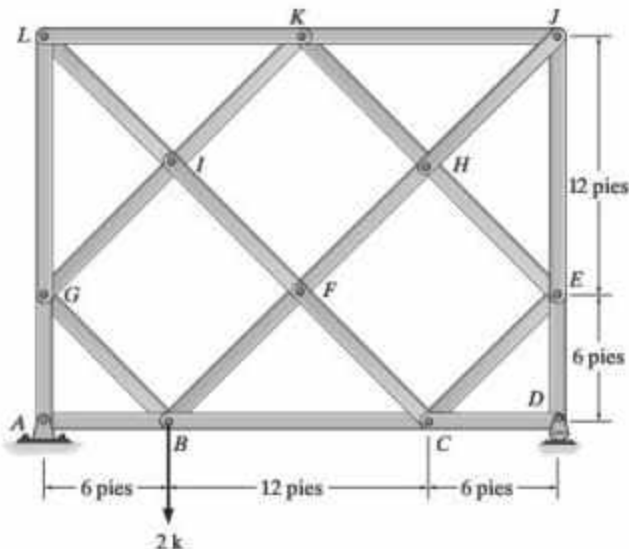
PROBLEMAS

***3-28.** Determine las fuerzas en todos los elementos de la armadura compleja. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. *Sugerencia:* Sustituya AD por un elemento ubicado entre E y C .



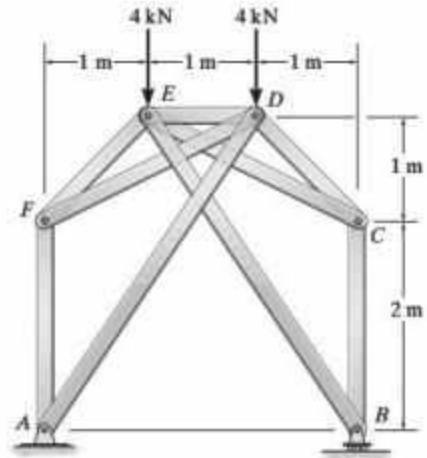
Prob. 3-28

3-29. Determine las fuerzas en todos los elementos de la armadura (compleja) en forma de red. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. *Sugerencia:* Sustituya JE por un elemento ubicado entre K y F .



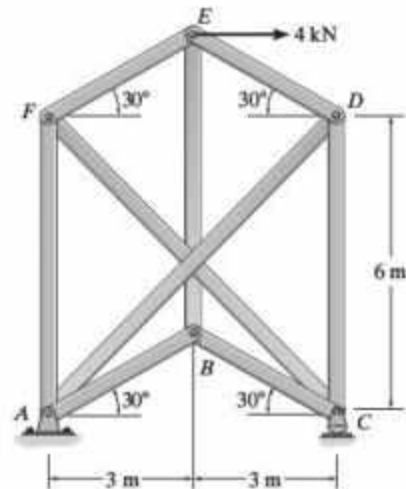
Prob. 3-29

3-30. Determine la fuerza en cada elemento e indique si los elementos están en tensión o en compresión.



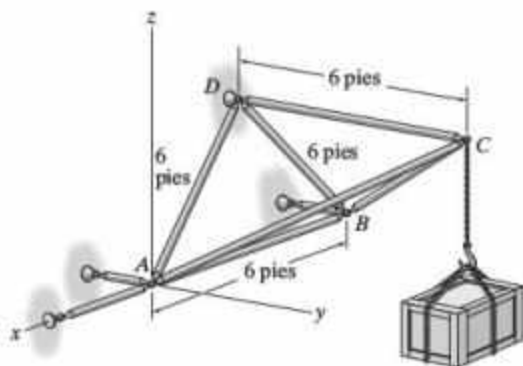
Prob. 3-30

3-31. Determine la fuerza en todos los elementos de la armadura compleja. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.



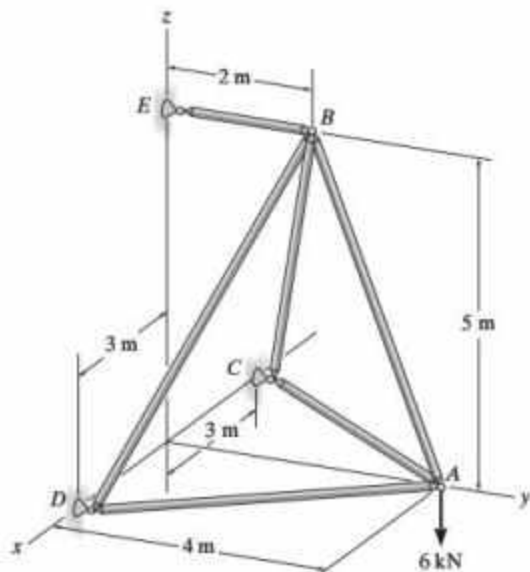
Prob. 3-31

***3-32.** Determine la fuerza desarrollada en cada elemento de la armadura espacial e indique si los elementos están en tensión o en compresión. La caja tiene un peso de 150 lb.



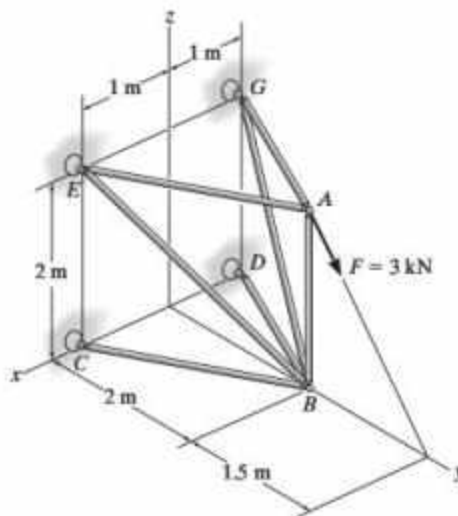
Prob. 3-32

3-33. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura espacial e indique si los elementos están en tensión o en compresión. *Sugerencia:* La reacción del soporte en E actúa a lo largo del elemento EB. ¿Por qué?



Prob. 3-33

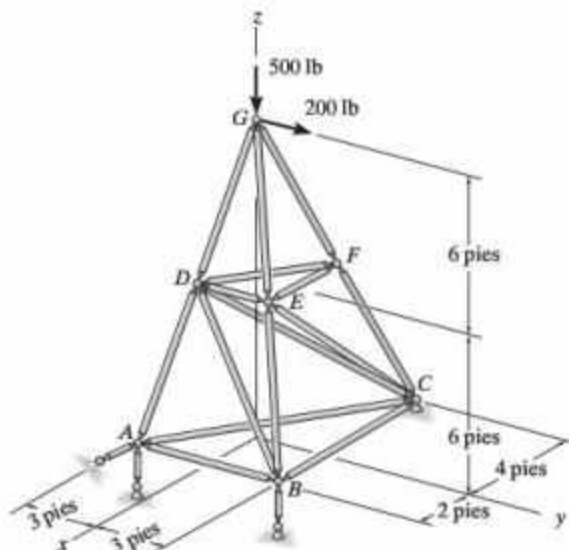
3-34. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura espacial e indique si los elementos están en tensión o en compresión. La armadura se sostiene mediante articulaciones de rótula en C, D, E y G. *Nota:* A pesar de que esta armadura es indeterminada de primer grado, es posible una solución debido a la simetría de la carga y la geometría.



Prob. 3-34

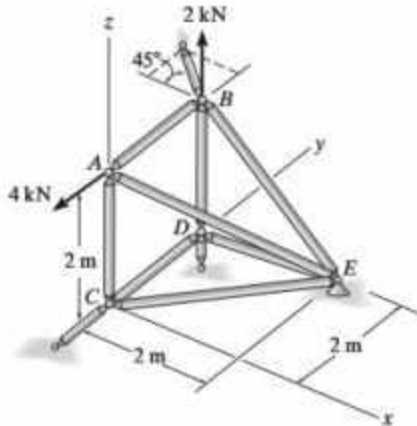
3-35. Determine la fuerza en los elementos FE y ED de la armadura espacial e indique si los elementos están en tensión o en compresión. La armadura se sostiene mediante una articulación de rótula en C y eslabones cortos en A y B.

***3-36.** Determine la fuerza en los elementos GD, GE y FD de la armadura espacial e indique si los elementos están en tensión o en compresión.



Probs. 3-35/3-36

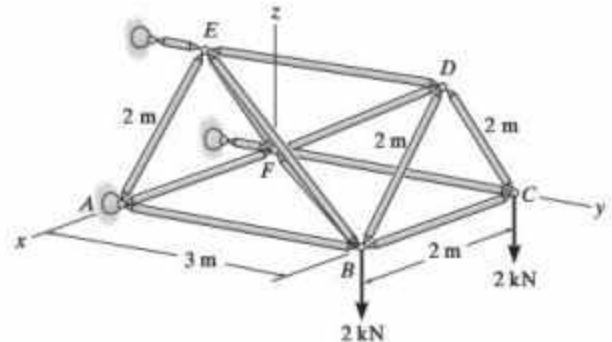
3-37. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura espacial. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.



Prob. 3-37

3-38. Determine la fuerza en los elementos BE , BF y BC de la armadura espacial e indique si los elementos están en tensión o en compresión.

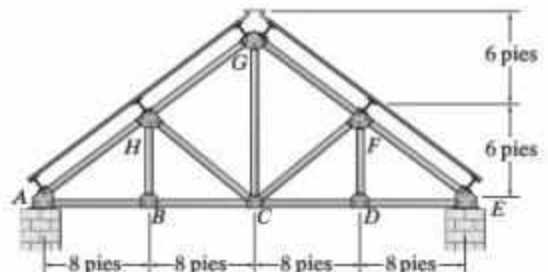
3-39. Determine la fuerza en los elementos CD , ED y CF de la armadura espacial e indique si los elementos están en tensión o en compresión.



Probs. 3-38/3-39

PROBLEMAS DE PROYECTO

3-1P. Las armaduras Pratt de techo están espaciadas uniformemente a cada 15 pies. La cubierta, el material del techo y los largueros tienen un peso promedio de 5.6 lb/pie^2 . El edificio está situado en Nueva York, donde la carga de nieve prevista es de 20 lb/pie^2 y la carga de hielo pronosticada es de 8 lb/pie^2 . Estas cargas se producen en el área horizontal proyectada del techo. Determine la fuerza en cada elemento debida a la carga muerta y a las cargas de la nieve y el hielo. Desprecie el peso de los elementos de la armadura y suponga que A es una articulación y que F es un rodillo.



Problema de proyecto 3-1P

REPASO DEL CAPÍTULO

Las armaduras se componen de elementos delgados unidos en sus extremos para formar una serie de triángulos.

Para el análisis se supone que los elementos están conectados mediante pasadores y que las cargas se aplican en las juntas. Por lo tanto, los elementos estarán en tensión o en compresión.



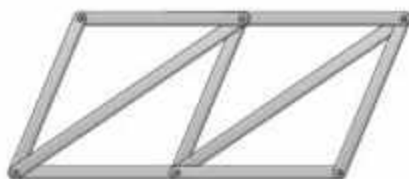
3

Las armaduras pueden clasificarse en tres formas:

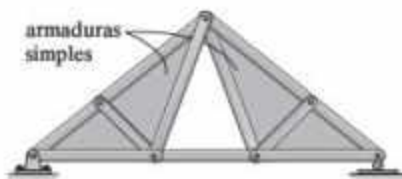
Las *armaduras simples* se forman comenzando con un elemento triangular inicial, después se conecta a dos elementos más y una junta para así formar un segundo triángulo, etcétera.

Las *armaduras compuestas* se forman al conectar entre sí dos o más armaduras simples usando una junta común y/o un elemento adicional.

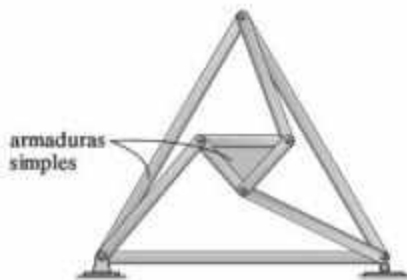
Las *armaduras complejas* son aquellas que no pueden clasificarse como simples o compuestas.



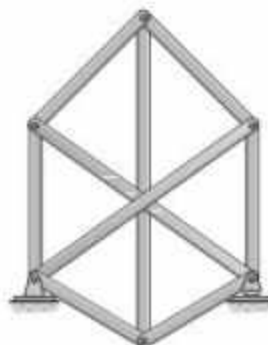
armadura simple



armadura compuesta



armadura compuesta



armadura compleja

Si el número de barras o elementos de una armadura es b , se tienen r reacciones y hay j juntas, entonces si

$b + r = 2j$, la armadura es estáticamente determinada

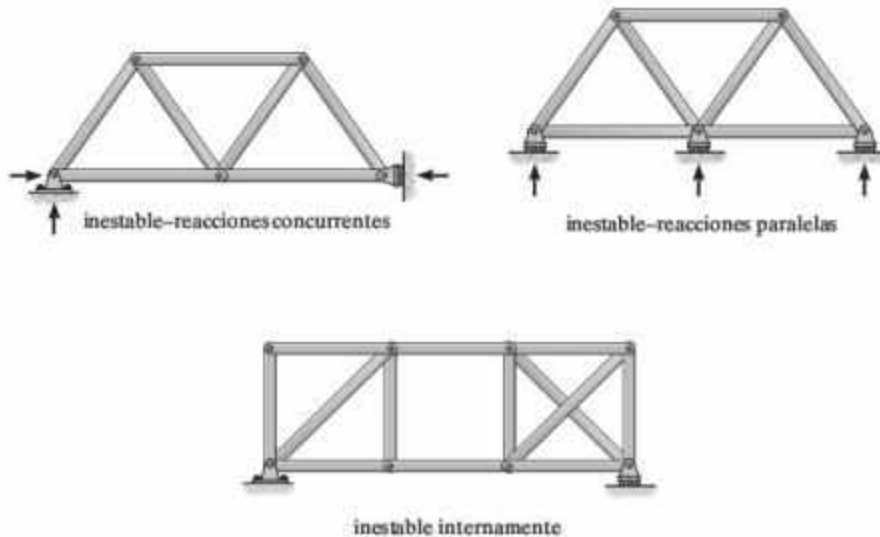
$b + r > 2j$ la armadura es estáticamente indeterminada

La armadura será inestable externamente si las reacciones son concurrentes o paralelas.

La estabilidad interna puede verificarse al contar el número de barras b , las reacciones r y las juntas j .

Si $b + r < 2j$, la armadura es inestable.

Si $b + r \geq 2j$ la armadura aún puede ser inestable, por lo que es necesario inspeccionarla y buscar arreglos de barras que formen un mecanismo paralelo, sin formar un elemento triangular.



Las armaduras planas pueden analizarse por el *método de los nudos*. Esto se hace seleccionando cada junta en secuencia, de modo que tenga como máximo una fuerza conocida y al menos dos incógnitas. Se construye el diagrama de cuerpo libre de cada junta y se escriben y resuelven dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, a fin de determinar las fuerzas de elemento desconocidas.

En el método de las secciones es necesario pasar una sección a través de la armadura y después dibujar un diagrama de cuerpo libre de una de sus partes seccionadas. Después se determinan las fuerzas de elemento cortadas por la sección a partir de las tres ecuaciones de equilibrio. Normalmente puede encontrarse una sola incógnita si se suman los momentos respecto a un punto que elimine las otras dos fuerzas.

Las armaduras compuestas y complejas también pueden analizarse por el método de los nudos y el método de las secciones. Para obtener una solución directa de la fuerza en un elemento particular de una armadura compleja puede emplearse el "método de los elementos sustitutos".



Las vigas y traveses simplemente apoyadas que forman la estructura de este edificio fueron diseñadas para resistir la fuerza cortante y el momento internos que actúan en toda su longitud.

Cargas internas desarrolladas en elementos estructurales

Antes de determinar las proporciones de un elemento estructural, es necesario conocer la fuerza y el momento que actúan en su interior. En este capítulo se desarrollarán los métodos para hallar estas cargas en puntos específicos a lo largo del eje de un elemento, y para mostrar gráficamente la variación utilizando los diagramas de fuerza cortante y de momento. Se presentarán aplicaciones tanto para vigas como para marcos.

4.1 Cargas internas en un punto específico

Como se estudió en la sección 2-3, la carga interna en un punto específico de un elemento puede determinarse aplicando el *método de las secciones*. En general, esta carga para una estructura coplanar consistirá en una fuerza normal N , una fuerza cortante V y un momento flexionante M .^{*} Sin embargo, debe tenerse en cuenta que estas cargas representan en realidad las *resultantes de la distribución de esfuerzos* que actúa sobre el área transversal del elemento en la sección cortada. Una vez que se conocen las cargas internas resultantes, la magnitud del esfuerzo puede determinarse siempre que se suponga una distribución de esfuerzos sobre el área de la sección transversal específica.

^{*}Los marcos tridimensionales también puede estar sometidos a un *momento de torsión*, que tiende a doblar el elemento respecto de su eje.

Convención de signos. Antes de presentar un método para encontrar la fuerza interna normal, la fuerza cortante y el momento flexionante, es necesario establecer una convención de signos para definir sus valores “positivo” y “negativo”.* Si bien la elección es arbitraria, la convención de signos que se adoptará aquí ha sido ampliamente aceptada en la práctica de la ingeniería estructural y se ilustra en la figura 4-1a. En la *cara izquierda* del elemento cortado, la fuerza normal N actúa hacia la derecha, la fuerza cortante interna V actúa hacia abajo y el momento M actúa en sentido inverso al de las manecillas del reloj (antihorario). De acuerdo con la tercera ley de Newton, una fuerza normal, una fuerza cortante y un momento flexionante iguales pero opuestos, deben actuar en la cara derecha del elemento en la sección. Quizás una manera fácil de recordar esta convención de signos sea aislar un pequeño segmento del elemento y recordar que una *fuerza normal positiva tiende a alargar el segmento*, figura 4-1b; que una *fuerza cortante positiva tiende a hacer girar el segmento en el sentido de las manecillas del reloj (horario)*, figura 4-1c, y que un *momento flexionante positivo tiende a doblar el segmento en forma cóncava hacia arriba*, a manera de un “recipiente para agua,” figura 4-1d.

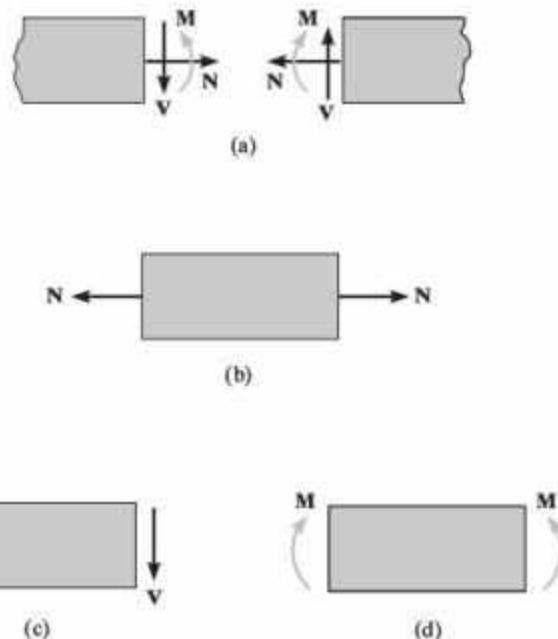


Figura 4-1

*Esto será de utilidad posteriormente en las secciones 4-2 y 4-3, donde V y M se expresarán en función de x y después se *representarán* gráficamente. El hecho de tener una convención de signos es semejante a asignar direcciones coordenadas positivas hacia la derecha para x , y positivas hacia arriba para y al momento de trazar una función $y = f(x)$.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento ofrece un medio de aplicar el método de las secciones para determinar la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en una ubicación específica de un elemento estructural.

Reacciones en los soportes

- Antes de "cortar" o seccionar el elemento, puede ser necesario determinar las reacciones en sus soportes de modo que las ecuaciones de equilibrio sólo se utilicen para resolver las cargas internas cuando se seccione el elemento.
- Si el elemento es parte de una estructura articulada, las reacciones en las articulaciones pueden determinarse mediante los métodos de la sección 2.5.

Diagrama de cuerpo libre

- Mantenga todas las cargas distribuidas, los momentos de par, y las fuerzas que actúan sobre el elemento en su *ubicación exacta*; después pase una sección imaginaria a través del elemento, que sea perpendicular a su eje en el punto donde se desea determinar la carga interna.
- Después de hacer la sección, dibuje un diagrama de cuerpo libre del segmento sobre el que actúe el menor número de cargas. En la sección, indique las incógnitas resultantes **N**, **V** y **M** de modo que actúen en su sentido *positivo* (figura 4-1a).

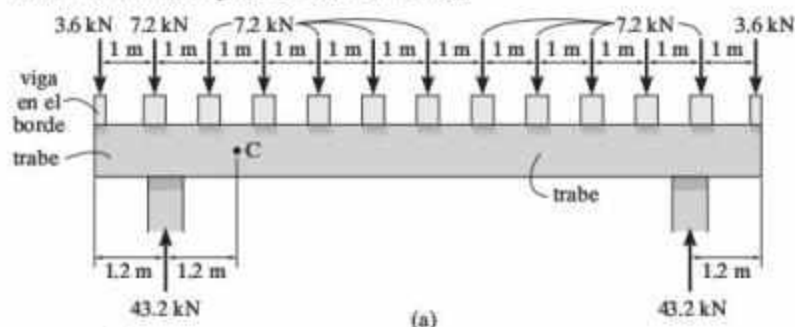
Ecuaciones de equilibrio

- Los momentos deben sumarse en la sección respecto a los ejes que pasan a través del *centroide* de la sección transversal del elemento, con el fin de eliminar las incógnitas **N** y **V**, para así obtener una solución directa de **M**.
- Si la solución de las ecuaciones de equilibrio es una cantidad con magnitud negativa, el sentido direccional supuesto de la cantidad es opuesto al que se muestra en el diagrama de cuerpo libre.

EJEMPLO 4.1



El techo del edificio que se muestra en la fotografía tiene un peso de 1.8 kN/m^2 y se sostiene sobre vigas simplemente apoyadas de 8 m de largo, entre las cuales hay una separación de 1 m . Cada viga, que se muestra en la figura 4-2b, transmite su carga a dos traveses, ubicadas en la parte delantera y trasera del edificio. Determine la fuerza cortante y el momento internos de la viga frontal en el punto C , figura 4-2a. No tome en cuenta el peso de los elementos.



SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. La carga del techo se transmite a cada viga como una losa de un solo sentido ($L_2/L_1 = 8 \text{ m}/1 \text{ m} = 8 > 2$). Por lo tanto, la carga tributaria en cada viga interior es $(1.8 \text{ kN/m}^2)(1 \text{ m}) = 1.8 \text{ kN/m}$. (Las dos vigas del borde soportan 0.9 kN/m .) De la figura 4-2b, la reacción de cada viga interior sobre la trabe es $(1.8 \text{ kN/m})(8 \text{ m})/2 = 7.2 \text{ kN}$.

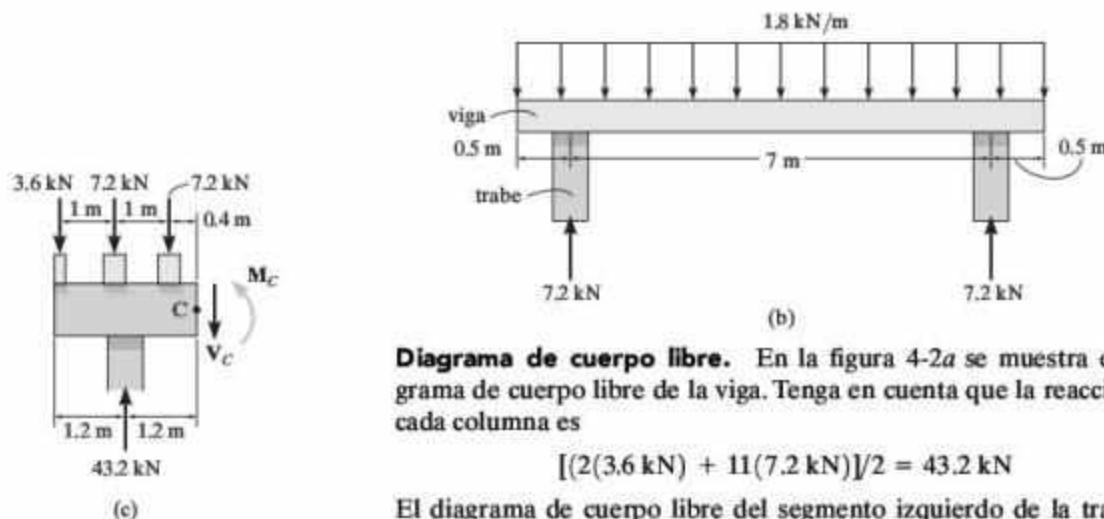


Figura 4-2

Diagrama de cuerpo libre. En la figura 4-2a se muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga. Tenga en cuenta que la reacción de cada columna es

$$[(2(3.6 \text{ kN}) + 11(7.2 \text{ kN}))/2] = 43.2 \text{ kN}$$

El diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo de la trabe se muestra en la figura 4-2c. Aquí se supone que las cargas internas actúan en su sentido positivo.

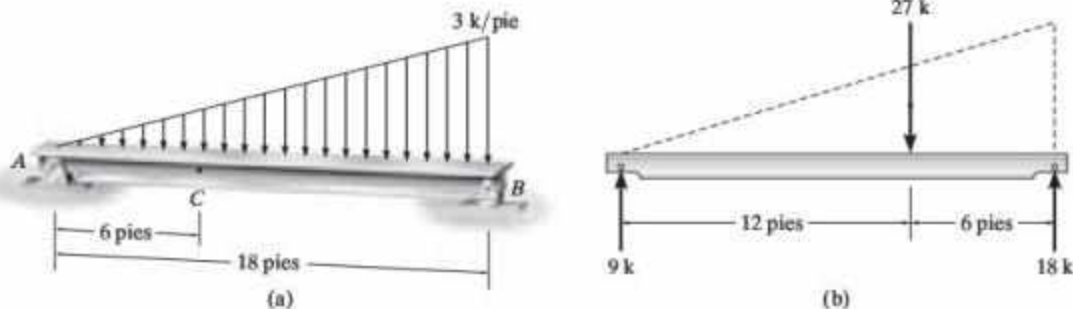
Ecuaciones de equilibrio

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 43.2 - 3.6 - 2(7.2) - V_C = 0 \quad V_C = 25.2 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0; \quad M_C + 7.2(0.4) + 7.2(1.4) + 3.6(2.4) - 43.2(1.2) = 0 \quad M_C = 30.2 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 4.2

Determine la fuerza cortante y el momento internos que actúan en una sección que pasa por el punto *C* de la viga que se muestra en la figura 4-3a.

**Figura 4-3****SOLUCIÓN**

Reacciones en los soportes. Al sustituir la carga distribuida por su fuerza resultante y calcular las reacciones, se obtienen los resultados que se muestran en la figura 4-3b.

Diagrama de cuerpo libre. Se considerará el segmento *AC* puesto que produce la solución más sencilla, figura 4-3c. La intensidad de la carga distribuida en *C* se calcula por proporción, es decir,

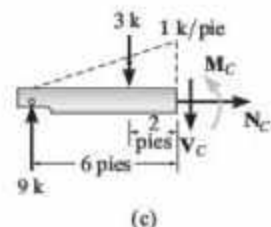
$$w_C = (6 \text{ pies}/18 \text{ pies})(3 \text{ k/pie}) = 1 \text{ k/pie}$$

Ecuaciones de equilibrio.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 9 - 3 - V_C = 0 \quad V_C = 6 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

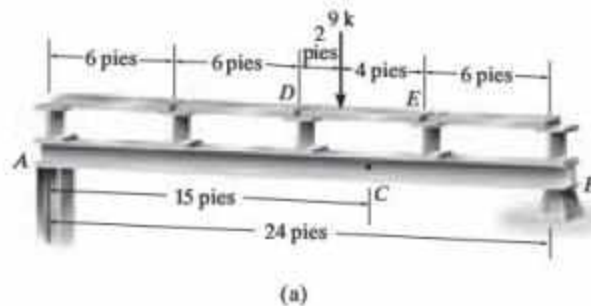
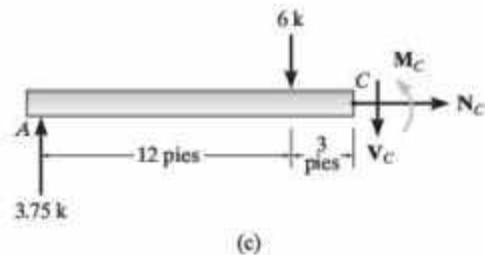
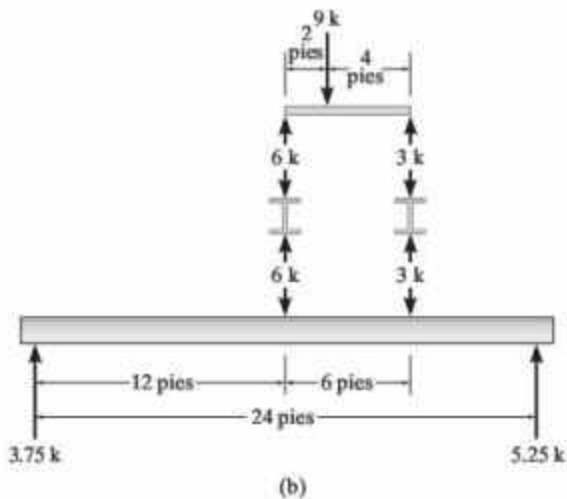
$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0; \quad -9(6) + 3(2) + M_C = 0 \quad M_C = 48 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

Este problema ilustra la importancia de *mantener* la carga distribuida sobre la viga hasta *después* de seccionarla. Si la viga de la figura 4-3b se seccionara en *C*, el efecto de la carga distribuida sobre el segmento *AC* no se reconocería, y el resultado $V_C = 9 \text{ k}$ y $M_C = 54 \text{ k} \cdot \text{pie}$ sería erróneo.



EJEMPLO 4.3

El panel de piso *DE* soporta la fuerza de 9 k que se muestra en la figura 4-4a, el cual a su vez está simplemente apoyado en sus extremos por vigas de piso. Estas vigas transmiten sus cargas a la trabe simplemente apoyada *AB*. Determine la fuerza cortante y el momento internos que actúan en el punto *C* de la trabe.

**Figura 4-4****SOLUCIÓN**

Reacciones en los soportes. En la figura 4-4b se muestran el equilibrio del panel de piso, las vigas de piso y la trabe. Se recomienda verificar estos resultados.

Diagrama de cuerpo libre. Se utiliza el diagrama de cuerpo libre del segmento *AC* porque conduce a la solución más sencilla, figura 4-4c. Tenga en cuenta que *AC* no soporta cargas sobre las vigas de piso.

Ecuaciones de equilibrio.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 3.75 - 6 - V_C = 0 \quad V_C = -2.25 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0; \quad -3.75(15) + 6(3) + M_C = 0 \quad M_C = 38.25 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

4.2 Funciones de fuerza cortante y de momento

El diseño de una viga requiere un conocimiento detallado de las *variaciones* de la fuerza cortante V y el momento M internos que actúan en cada punto a lo largo del eje de la viga. Por lo general, la fuerza normal interna no se considera por dos razones: (1) en la mayoría de los casos las cargas aplicadas a una viga actúan en forma perpendicular a su eje y, por lo tanto, sólo producen una fuerza interna cortante y un momento flexionante; (2) y para fines de diseño, la resistencia a la fuerza cortante de la viga y, en particular, a la flexión, es más importante que su capacidad para resistir la fuerza normal. Sin embargo, hay una excepción importante a esto cuando las vigas están sometidas a fuerzas axiales de compresión, puesto que deben investigarse el pandeo o la inestabilidad que pudieran ocurrir.

Las variaciones de V y M en función de la posición x de un punto arbitrario a lo largo del eje de la viga pueden obtenerse mediante el método de las secciones analizado en la sección 4-1. Sin embargo, aquí es necesario localizar la sección imaginaria o cortar a una distancia arbitraria x desde un extremo de la viga en vez de en un punto específico.

En general, las funciones de la fuerza cortante y del momento internos serán discontinuas, o su pendiente será discontinua, en los puntos donde el tipo o la magnitud de la carga distribuida cambia, o bien donde se apliquen las fuerzas concentradas o los momentos de par. Debido a esto, las funciones de la fuerza cortante y del momento deben determinarse para cada región de la viga localizada *entre* cualquiera de las dos discontinuidades de carga. Por ejemplo, las coordenadas x_1 , x_2 y x_3 deberán usarse para describir la variación de V y M en toda la longitud de la viga en la figura 4-5a. Estas coordenadas serán válidas sólo dentro de las regiones desde A hasta B para x_1 , de B a C para x_2 , y de C a D para x_3 . Aunque cada una de estas coordenadas tiene el mismo origen, como se ha señalado aquí, éste no tiene por qué ser el caso. De hecho, puede ser más fácil desarrollar las funciones de fuerza cortante y de momento, empleando las coordenadas x_1 , x_2 , x_3 que tienen orígenes en A , B y D como se muestra en la figura 4-5b. Aquí x_1 y x_2 son positivas hacia la derecha y x_3 es positiva hacia la izquierda.



4

El refuerzo adicional que proporcionan las placas verticales llamadas costillas se utiliza en los soportes articulados y de oscilador en estas traveses de puente. Aquí, las reacciones causarían grandes fuerzas cortantes en las traveses y los refuerzos evitarían pandeos localizados en las alas o el alma de la trabe. Además, tenga en cuenta la inclinación del soporte de oscilador causada por la expansión térmica de la cubierta del puente.

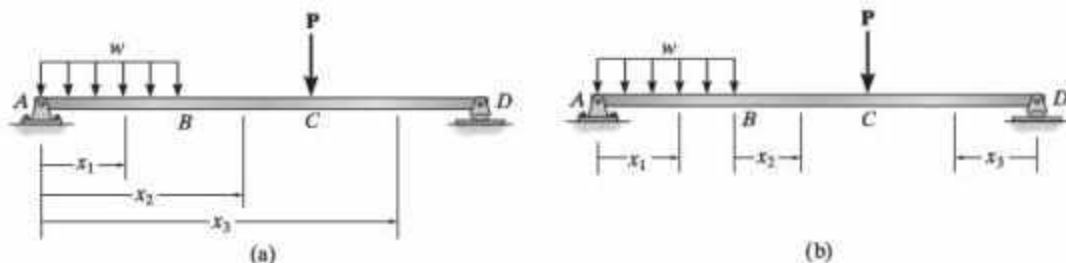


Figura 4-5

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento ofrece un método para determinar la variación de la fuerza cortante y el momento en una viga en función de la posición x .

Reacciones en los soportes

- Determine las reacciones en los soportes de la viga y descomponga todas las fuerzas externas en sus componentes que actúan en forma perpendicular y paralela al eje de la viga.

Funciones de fuerza cortante y de momento

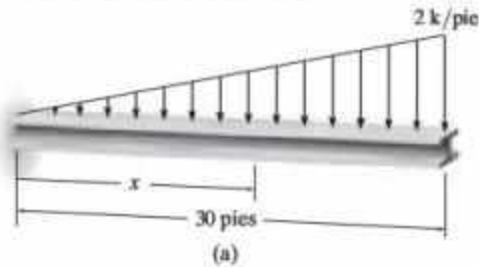
- Especifique por separado las coordenadas x y sus orígenes asociados, extendiéndose a las regiones de la viga entre las fuerzas concentradas y/o momentos de par, o donde haya una discontinuidad de la carga distribuida.
- Seccione la viga en forma perpendicular a su eje a cada distancia x , y con base en el diagrama de cuerpo libre de uno de los segmentos determine las incógnitas V y M en la sección cortada en función de x . En el diagrama de cuerpo libre, V y M deben mostrarse actuando en sus *direcciones positivas*, de acuerdo con la convención de signos dada en la figura 4-1.
- V se obtiene de $\Sigma F_y = 0$ y M se obtiene al sumar momentos con respecto al punto S ubicado en la sección cortada, $\Sigma M_S = 0$.
- Los resultados pueden comprobarse observando que $dM/dx = V$ y que $dV/dx = w$, donde w es positiva cuando actúa hacia arriba, alejándose de la viga. Estas relaciones se desarrollan en la sección 4-3.



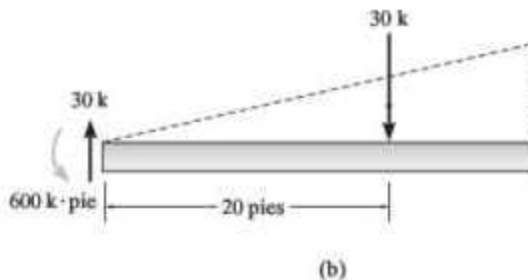
Las viguetas, vigas y trabes que se usan para sostener este piso pueden diseñarse una vez que se conocen la fuerza cortante y el momento en toda su longitud.

EJEMPLO 4.4

Para la viga que se muestra en la figura 4-6a, determine la fuerza cortante y el momento como una función de x .

**Figura 4-6****SOLUCIÓN**

Reacciones en los soportes. Con el fin de calcular las reacciones en los soportes, la carga distribuida se sustituye por su fuerza resultante de 30 k, figura 4-6b. Sin embargo, es importante recordar que esta resultante no es la carga real en la viga.



Funciones de fuerza cortante y de momento. En la figura 4-6c se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud x . Tenga en cuenta que la intensidad de la carga triangular en la sección se encuentra por proporción; es decir, $w/x = 2/30$ o $w = x/15$. Con la intensidad de carga conocida, la resultante de la carga distribuida se encuentra de la manera usual como se muestra en la figura. Por lo tanto,

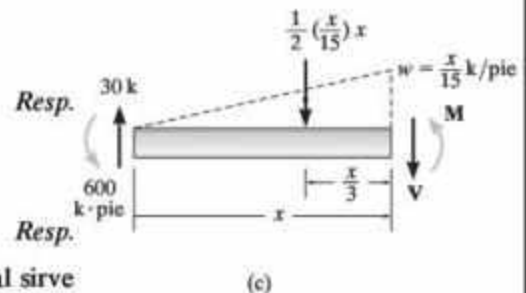
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 30 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{15} \right) x - V = 0$$

$$V = 30 - 0.0333x^2$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_S = 0; \quad 600 - 30x + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{15} \right) x \right] \frac{x}{3} + M = 0$$

$$M = -600 + 30x - 0.0111x^3$$

Observe que $dM/dx = V$ y que $dV/dx = -x/15 = w$, lo cual sirve como una verificación de los resultados.



EJEMPLO 4.5

Para la viga que se muestra en la figura 4-7a, determine la fuerza cortante y el momento en función de x .

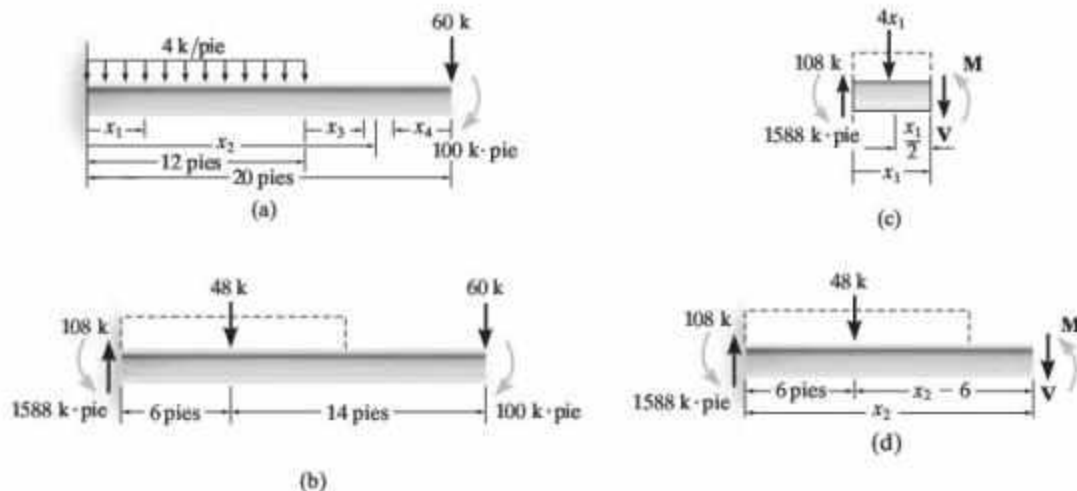


Figura 4-7

SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. Las reacciones en el soporte fijo son $V = 108 \text{ K}$ y $M = 1588 \text{ k} \cdot \text{pie}$, figura 4-7b.

Funciones de fuerza cortante y de momento. Dado que hay una discontinuidad de la carga distribuida en $x = 12$ pies, deben considerarse dos regiones de x con el fin de describir las funciones de cortante y de momento para toda la viga. Aquí x_1 es apropiado para los 12 pies de la izquierda y x_2 puede usarse para el segmento restante.

$0 \leq x \leq 12$ pies. Observe que V y M se muestran en la dirección positiva, figura 4-7c.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 108 - 4x_1 - V = 0, \quad V = 108 - 4x_1 \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_S = 0; \quad 1588 - 108x_1 + 4x_1\left(\frac{x_1}{2}\right) + M = 0$$

$$M = -1588 + 108x_1 - 2x_1^2 \quad \text{Resp.}$$

$12 \text{ pies} \leq x_2 \leq 20 \text{ pies}$, figura 4-7d.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 108 - 48 - V = 0, \quad V = 60 \quad \text{Resp.}$$

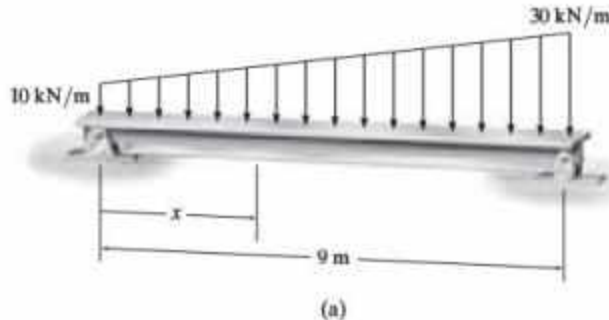
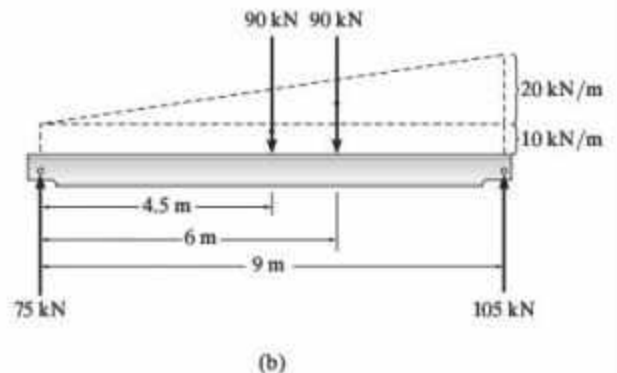
$$\downarrow + \Sigma M_S = 0; \quad 1588 - 108x_2 + 48(x_2 - 6) + M = 0$$

$$M = 60x_2 - 1300 \quad \text{Resp.}$$

Estos resultados pueden verificarse en forma parcial si se tiene en cuenta que cuando $x_2 = 20$ pies, entonces $V = 60 \text{ k}$ y $M = -100 \text{ k} \cdot \text{pie}$. Además, observe que $dM/dx = V$ y $dV/dx = w$.

EJEMPLO 4.6

Para la viga que se muestra en la figura 4-8a, determine la fuerza cortante y el momento en función de x .

**Figura 4-8****SOLUCIÓN**

Reacciones en los soportes. Para determinar las reacciones en los soportes, la carga distribuida se divide en una carga triangular y una rectangular, a las cuales luego reemplazan sus fuerzas resultantes. Estas reacciones ya se han calculado y se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 4-8b.

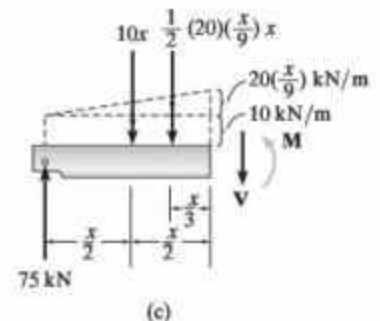
Funciones de fuerza cortante y de momento. En la figura 4-8c se muestra un diagrama de cuerpo libre de la sección cortada. Como en el caso anterior, la carga trapezoidal se sustituye por una distribución rectangular y una triangular. Observe que la intensidad de la carga triangular en el corte se encuentra por proporción; además, la fuerza resultante de cada carga distribuida y su ubicación están indicadas. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 75 - 10x - \left[\frac{1}{2} (20) \left(\frac{x}{9} \right) x \right] - V = 0$$

$$V = 75 - 10x - 1.11x^2 \quad \text{Resp.}$$

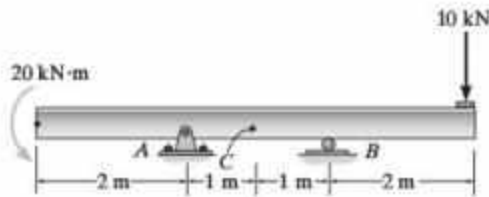
$$\downarrow + \Sigma M_S = 0; \quad -75x + (10x) \left(\frac{x}{2} \right) + \left[\frac{1}{2} (20) \left(\frac{x}{9} \right) x \right] \frac{x}{3} + M = 0$$

$$M = 75x - 5x^2 - 0.370x^3 \quad \text{Resp.}$$



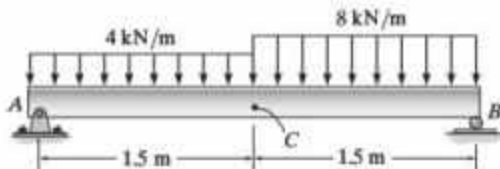
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F4-1. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos que actúan en el punto C de la viga.



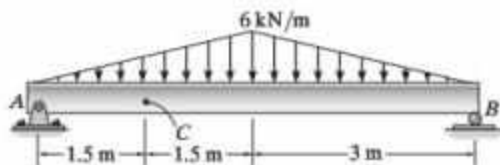
F4-1

F4-2. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos que actúan en el punto C de la viga.



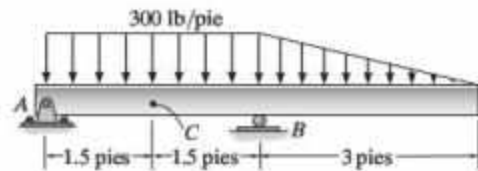
F4-2

F4-3. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos que actúan en el punto C de la viga.



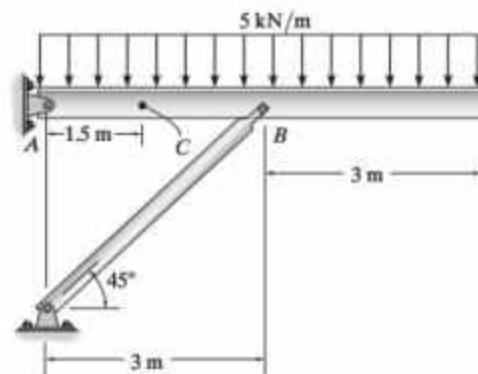
F4-3

F4-4. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos que actúan en el punto C de la viga.



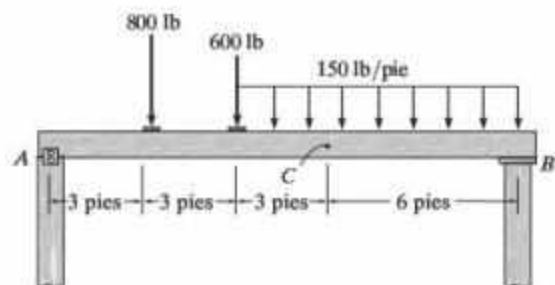
F4-4

F4-5. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos que actúan en el punto C de la viga.



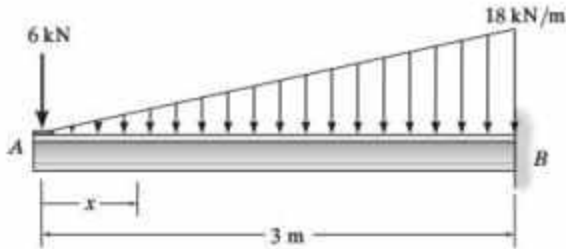
F4-5

F4-6. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos que actúan en el punto C de la viga.



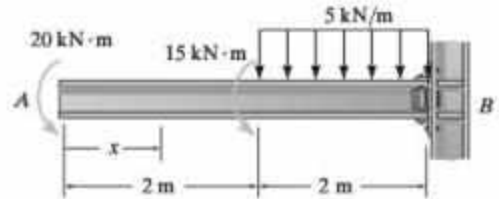
F4-6

F4-7. Para la viga mostrada, determine la fuerza cortante y el momento internos en función de x .



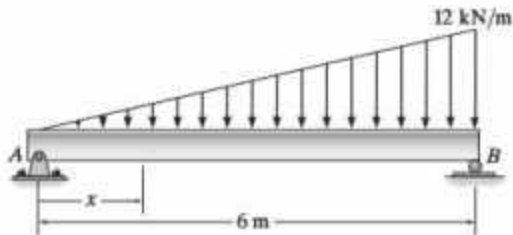
F4-7

F4-10. Determine la fuerza cortante y el momento internos en función de x a lo largo de la viga.



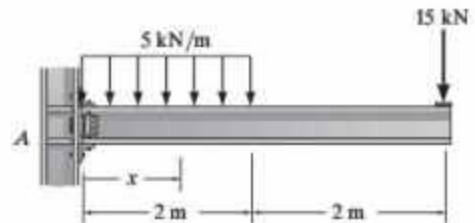
F4-10

F4-8. Para la viga mostrada, determine la fuerza cortante y el momento internos en función de x .



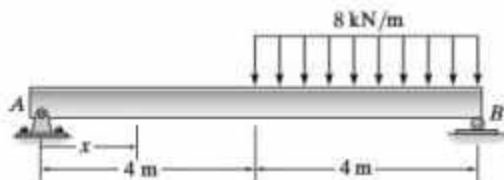
F4-8

F4-11. Determine la fuerza cortante y el momento internos en función de x a lo largo de la viga.



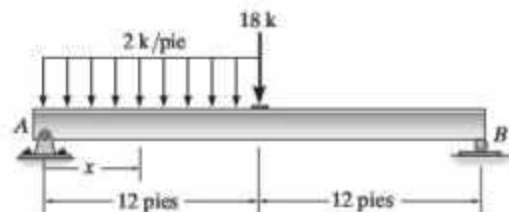
F4-11

F4-9. Determine la fuerza cortante y el momento internos en función de x a lo largo de la viga.



F4-9

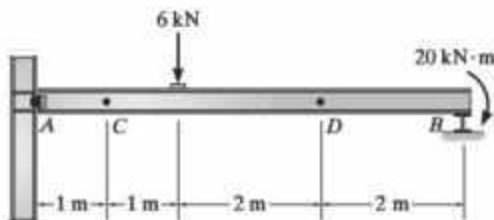
F4-12. Determine la fuerza cortante y el momento internos en función de x a lo largo de la viga.



F4-12

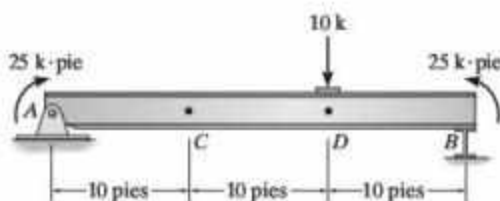
PROBLEMAS

4-1. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos en los puntos C y D de la viga. Suponga que el soporte en A es una articulación y en B es un rodillo.



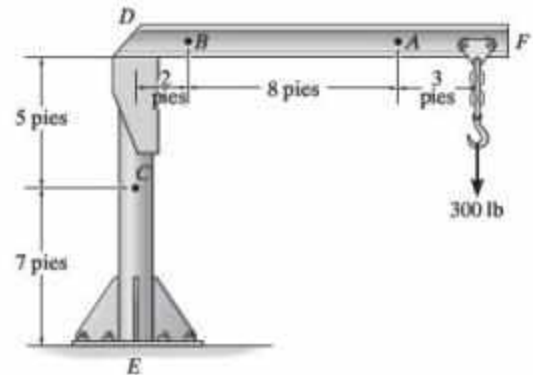
Prob. 4-1

4-2. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos en los puntos C y D de la viga. Suponga que el soporte en B es un rodillo. El punto D está ubicado justo a la derecha de la carga de 10 k.



Prob. 4-2

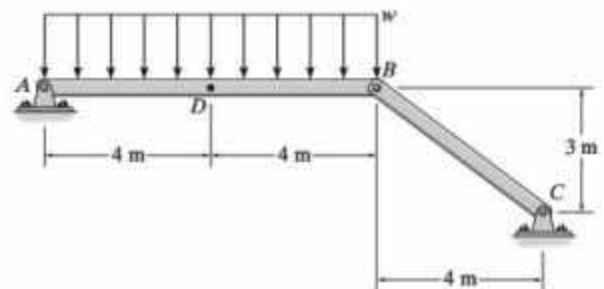
4-3. El aguilón DF y la columna DE de la grúa tienen un peso uniforme de 50 lb/pie. Si el gancho y la carga pesan 300 libras, determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos en los puntos A , B y C de la grúa.



Prob. 4-3

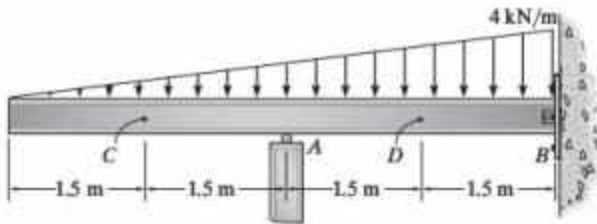
***4-4.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos en el punto D . Considere que $w = 150 \text{ N/m}$.

4-5. La viga AB fallará si el momento interno máximo en D alcanza $800 \text{ N} \cdot \text{m}$ o si la fuerza normal en el elemento BC llega a 1500 N . Determine la carga w más grande que puede soportar.



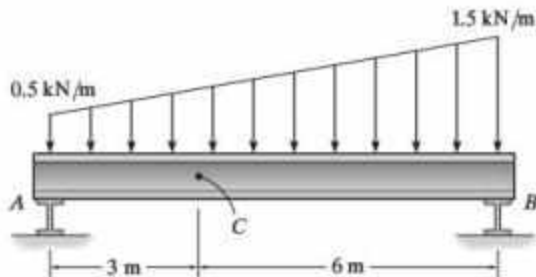
Probs. 4-4/4-5

4-6. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos en los puntos C y D de la viga. Suponga que el soporte en A es un rodillo y que B es una articulación.



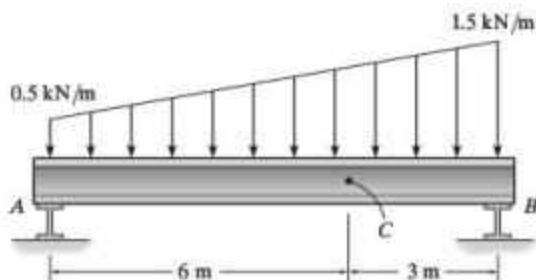
Prob. 4-6

4-7. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos en el punto C . Suponga que las reacciones en los soportes A y B son verticales.



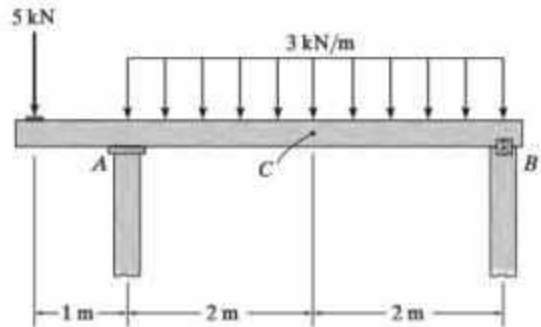
Prob. 4-7

***4-8.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos en el punto C . Suponga que las reacciones en los soportes A y B son verticales.



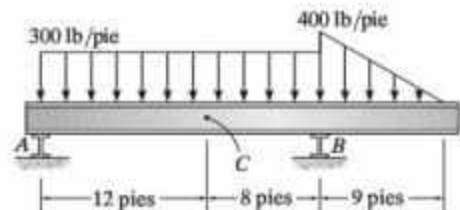
Prob. 4-8

4-9. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos en el punto C de la viga. El soporte en A es un rodillo y B es una articulación.



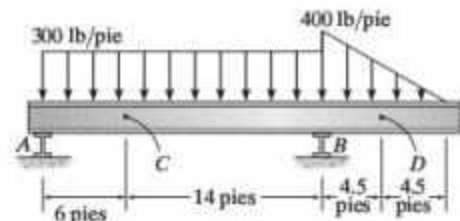
Prob. 4-9

4-10. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos en el punto C . Suponga que las reacciones en los soportes A y B son verticales.



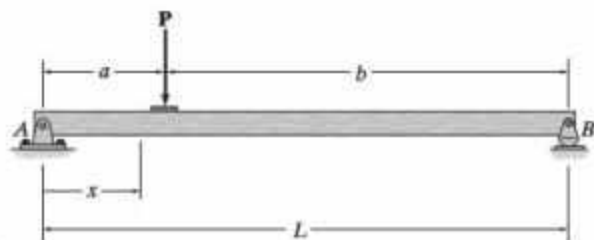
Prob. 4-10

4-11. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante internos en los puntos C y D . Suponga que las reacciones en los soportes A y B son verticales.



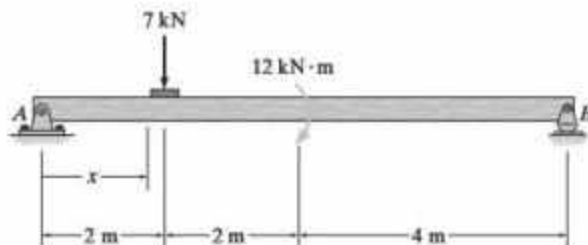
Prob. 4-11

***4-12.** Determine la fuerza cortante y el momento a lo largo de la viga en función de x .



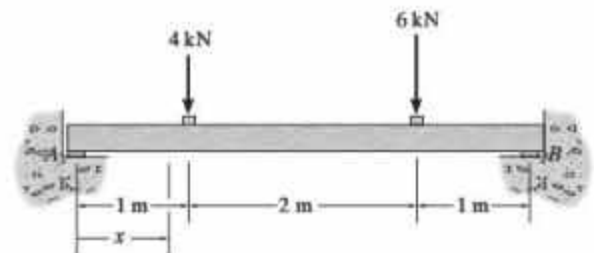
Prob. 4-12

4-15. Determine la fuerza cortante y el momento a lo largo de la viga en función de x .



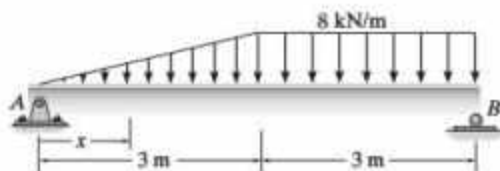
Prob. 4-15

4-13. Determine la fuerza cortante y el momento en la viga de piso en función de x . Suponga que el soporte en A es una articulación y que B es un rodillo.



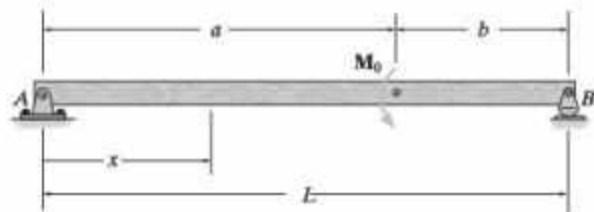
Prob. 4-13

***4-16.** Determine la fuerza cortante y el momento a lo largo de la viga en función de x .



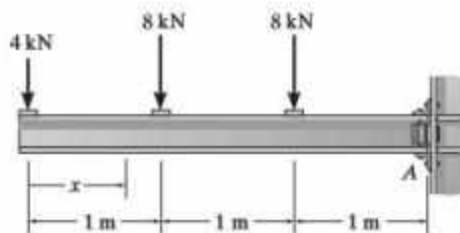
Prob. 4-16

4-14. Determine la fuerza cortante y el momento a lo largo de la viga en función de x .



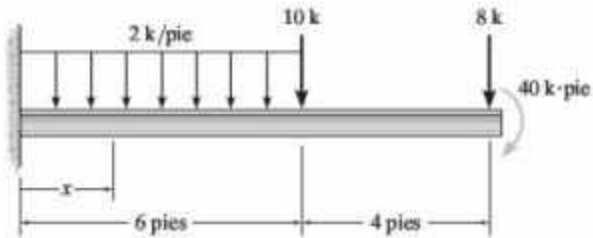
Prob. 4-14

4-17. Determine la fuerza cortante y el momento a lo largo de la viga en función de x .



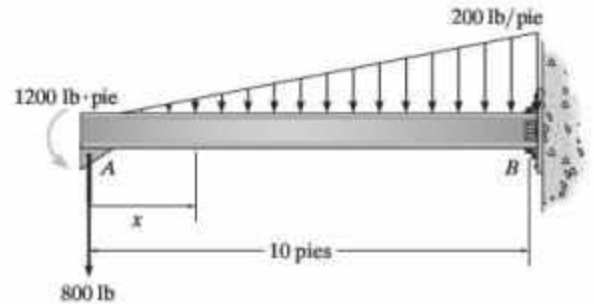
Prob. 4-17

4-18. Determine la fuerza cortante y el momento a lo largo de la viga en función de x .



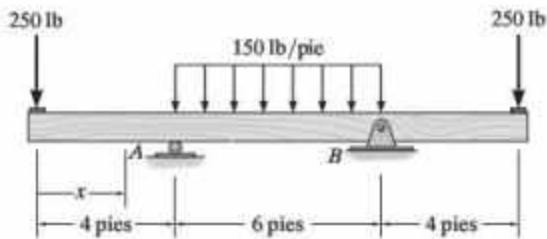
Prob. 4-18

4-21. Determine la fuerza cortante y el momento en la viga en función de x .



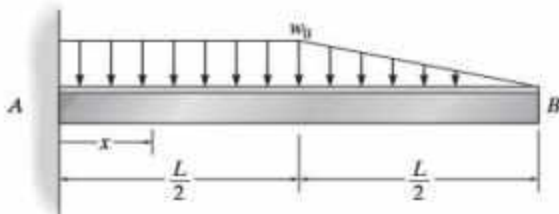
Prob. 4-21

4-19. Determine la fuerza cortante y el momento a lo largo de la viga en función de x .



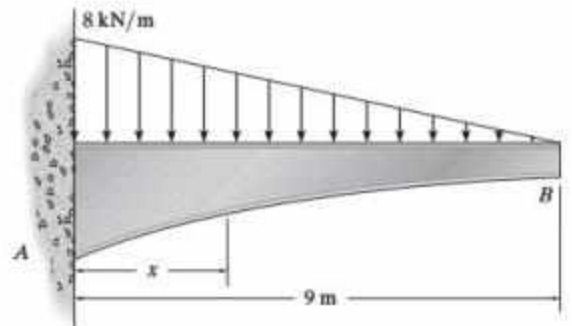
Prob. 4-19

***4-20.** Determine la fuerza cortante y el momento en la viga en función de x .



Prob. 4-20

4-22. Determine la fuerza cortante y el momento a lo largo de la viga ahusada en función de x .



Prob. 4-22

4.3 Diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga



4 Las varias cargas concentradas que actúan sobre esta viga de concreto reforzado crean una variación de la carga interna en la viga. Por esta razón, es necesario elaborar diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante con el fin de diseñar correctamente la viga.

Al representar gráficamente las variaciones de V y M en función de x que se obtuvieron en la sección 4.2, las gráficas resultantes se denominan *diagrama de fuerza cortante* y *diagrama de momento*, respectivamente. En los casos donde una viga está sometida a *varias* fuerzas concentradas, pares y cargas distribuidas, la graficación de V y M en comparación con x puede ser bastante tediosa puesto que deben representarse varias funciones. En esta sección se analiza un método más simple para la construcción de estos diagramas; un método basado en las relaciones diferenciales que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento.

Para obtener estas relaciones, considere la viga AD de la figura 4-9a, la cual está sometida a una carga arbitraria distribuida $w = w(x)$ y a una serie de fuerzas concentradas y pares. En el siguiente análisis, la *carga distribuida se considerará positiva cuando actúe hacia arriba* como se muestra en la figura. Se considerará el diagrama de cuerpo libre para un pequeño segmento de la viga con longitud Δx , figura 4-9b. Como este segmento se eligió en un punto x a lo largo de la viga que *no* está sometido a una fuerza concentrada o a un par, los resultados obtenidos no son aplicables en los puntos con carga concentrada. Se supone que la fuerza cortante y el momento flexionante internos que se muestran en el diagrama de cuerpo libre actúan en la *dirección positiva* de acuerdo con la convención de signos establecida, figura 4-1. Tenga en cuenta que tanto la fuerza cortante como el momento que actúan sobre la cara derecha deben aumentar en una cantidad pequeña y finita con el fin de mantener al segmento en equilibrio. La carga distribuida se reemplazó por una fuerza concentrada $w(x)\Delta x$ que actúa a una distancia fraccional $\epsilon(\Delta x)$ desde el extremo derecho, donde $0 < \epsilon < 1$. (Por ejemplo, si $w(x)$ es uniforme o constante, entonces $w(x)\Delta x$ actuará en $\frac{1}{2}\Delta x$, así que $\epsilon = \frac{1}{2}$.) Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$\begin{aligned} \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V + w(x)\Delta x - (V + \Delta V) &= 0 \\ \Delta V &= w(x)\Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \Sigma M_O = 0; \quad -V\Delta x - M - w(x)\Delta x\epsilon(\Delta x) + (M + \Delta M) &= 0 \\ \Delta M &= V\Delta x + w(x)\epsilon(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

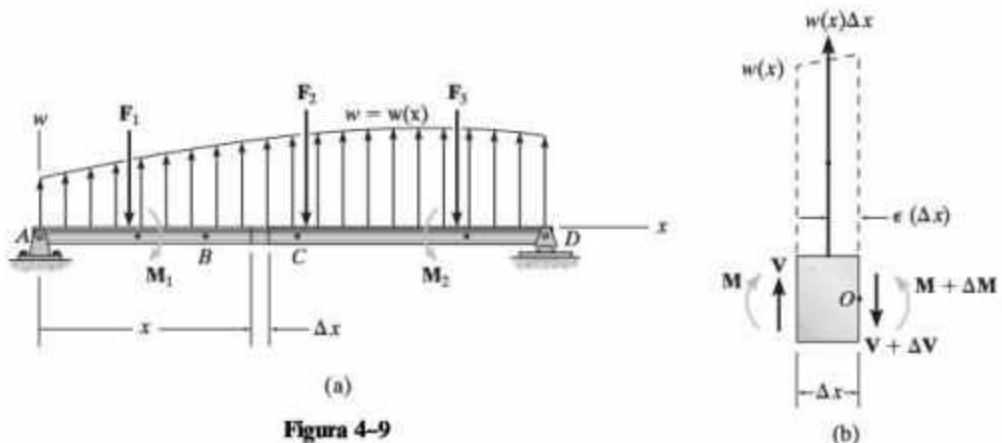


Figura 4-9

Si se divide entre Δx y se toma el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, estas ecuaciones se convierten en

$$\frac{dV}{dx} = w(x)$$

Pendiente del diagrama de fuerza cortante = { Intensidad de la carga distribuida

(4-1)

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Pendiente del diagrama de momento = { Fuerza cortante

(4-2)

Como se ha señalado, la ecuación 4-1 establece que *la pendiente del diagrama de fuerza cortante en un punto (dV/dx) es igual a la intensidad de la carga distribuida $w(x)$ en ese punto*. Del mismo modo, la ecuación 2.4 establece que *la pendiente del diagrama de momento (dM/dx) es igual a la intensidad de la fuerza cortante en ese punto*.

Las ecuaciones 4-1 y 4-2 pueden “integrarse” desde un punto hasta el otro entre fuerzas concentradas o pares (por ejemplo, de B a C en la figura 4-9a), en cuyo caso

$$\Delta V = \int w(x) dx$$

Cambio en la fuerza cortante = { Área bajo el diagrama de carga distribuida

(4-3)

y

$$\Delta M = \int V(x) dx$$

Cambio en el momento = { Área bajo el diagrama de fuerza cortante

(4-4)

Como se ha señalado, la ecuación 4-3 establece que *el cambio en la fuerza cortante entre dos puntos cualesquiera de una viga es igual al área bajo el diagrama de carga distribuida entre esos puntos*. Del mismo modo, la ecuación 4-4 establece que *el cambio en el momento entre dos puntos de una viga es igual al área bajo el diagrama de fuerza cortante entre esos puntos*. Si las áreas bajo los diagramas de carga y de fuerza cortante son fáciles de calcular, las ecuaciones 4-3 y 4-4 proporcionan un método para determinar numéricamente los valores de la fuerza cortante y el momento en varios puntos a lo largo de una viga.

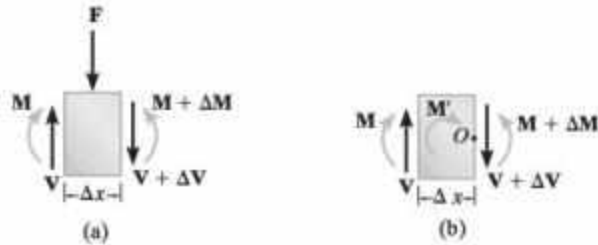


Figura 4-10

Con base en la derivación anterior debe observarse que las ecuaciones 4-1 y 4-3 no pueden usarse en los puntos donde actúa una fuerza concentrada, puesto que estas ecuaciones no toman en cuenta el cambio repentino de la fuerza cortante en estos puntos. Del mismo modo, debido a una discontinuidad del momento, las ecuaciones 4-2 y 4-4 no pueden emplearse en los puntos donde se aplica un momento de par. A fin de considerar estos dos casos, es necesario tomar los diagramas de cuerpo libre de los elementos diferenciales de la viga que se muestran en la figura 4-9a, los cuales están en puntos con fuerza concentrada y momentos de par. En las figuras 4-10a y 4-10b, respectivamente, se muestran ejemplos de estos elementos. A partir de la figura 4-10a, se observa que el equilibrio de fuerzas requiere que el cambio en la fuerza cortante sea

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad \Delta V = -F \quad (4-5)$$

Así, cuando F actúa *hacia abajo* sobre la viga, ΔV es negativa por lo que el diagrama de corte muestra un "salto" *hacia abajo*. Del mismo modo, si F actúa *hacia arriba*, el salto (ΔV) es *hacia arriba*. Con base en la figura 4-10b, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, el equilibrio de momentos requiere que el cambio en el momento sea

$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = 0; \quad \Delta M = M' \quad (4-6)$$

En este caso, si se aplica un momento de par externo M' en sentido horario, ΔM es positivo, por lo que el diagrama de momento salta *hacia arriba*, y cuando M actúa en sentido *contrario al de las manecillas del reloj*, el salto (ΔM) debe ser *hacia abajo*.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento aporta un método para construir los diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga empleando las ecuaciones 4-1 a 4-6.

Reacciones en los soportes

- Determine las reacciones en los soportes y descomponga las fuerzas que actúan sobre la viga en sus componentes perpendiculares y paralelas al eje de la viga.

Diagrama de fuerza cortante

- Establezca los ejes V y x y grafique los valores de la fuerza cortante en los dos *extremos* de la viga.
- Dado que $dV/dx = w$, la *pendiente del diagrama de fuerza cortante* en cualquier punto es igual a la intensidad de la *carga distribuida* en ese punto. (Tenga en cuenta que w es positiva cuando actúa hacia arriba).
- Si debe determinarse un valor numérico de la fuerza cortante en el punto, este valor se puede encontrar empleando el método de las secciones como se vio en la sección 4-1, o bien puede usarse la ecuación 4-3, la cual establece que *el cambio en la fuerza cortante es igual al área bajo el diagrama de carga distribuida*.
- Como $w(x)$ se *integra* para obtener V , cuando $w(x)$ sea una curva de grado n , $V(x)$ será una curva de grado $n + 1$. Por ejemplo, si $w(x)$ es uniforme, $V(x)$ será lineal.

Diagrama de momento

- Establezca los ejes M y x y grafique los valores del momento en los extremos de la viga.
- Dado que $dM/dx = V$, la *pendiente del diagrama de momento* en cualquier punto es igual a la intensidad de la *fuerza cortante* en ese punto.
- En el punto donde la fuerza cortante es cero, $dM/dx = 0$, por lo que éste puede ser un punto donde el momento puede ser máximo o mínimo.
- Si debe determinarse el valor numérico del momento en un punto, este valor se puede encontrar empleando el método de las secciones como se vio en la sección 4-1 o mediante la ecuación 4-4, la cual establece que *el cambio en el momento es igual al área bajo el diagrama de fuerza cortante*.
- Como $V(x)$ se *integra* para obtener M , cuando $V(x)$ sea una curva de grado n , $M(x)$ será una curva de grado $n + 1$. Por ejemplo, si $V(x)$ es lineal, $M(x)$ será parabólica.

EJEMPLO 4.7



Los dos elementos horizontales de la estructura que sostiene líneas de alta tensión están sometidos a las cargas de cable que se muestran en la figura 4-11a. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada elemento

SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. Cada poste ejerce una fuerza de 6 kN sobre cada elemento, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre.

Diagrama de fuerza cortante. Primero se grafican los puntos extremos $x = 0$, $V = -4$ kN y $x = 6$ m, $V = 4$ kN, figura 4-11b. Como se ha indicado, la fuerza cortante entre cada fuerza concentrada es *constante* puesto que $w = dV/dx = 0$. La fuerza cortante justo a la derecha del punto B (o C y D) puede determinarse por el método de las secciones, figura 4-11d. El diagrama de fuerza cortante también puede establecerse “siguiendo la carga” en el diagrama de cuerpo libre. Comenzando en A, la carga de 4 kN actúa hacia abajo de modo que $V_A = -4$ kN. Ninguna carga actúa entre A y B, por lo que la fuerza cortante es constante. En B, la fuerza de 6 kN actúa hacia arriba, por lo que la fuerza cortante salta hacia arriba 6 kN, desde -4 kN hasta $+2$ kN, etcétera.

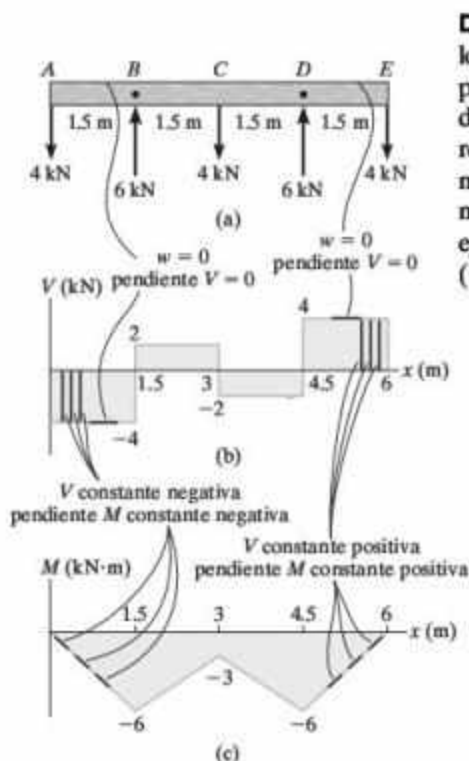


Diagrama de momento. En primer lugar se grafica el momento en los puntos extremos $x = 0$, $M = 0$ y $x = 6$ m, $M = 0$, figura 4-11c. La pendiente del diagrama de momento dentro de cada región de 1.5 m de longitud es constante puesto que V también es constante. Los valores específicos del momento, como en C, pueden determinarse por el método de las secciones, figura 4-11d o buscando el cambio en el momento mediante el área bajo el diagrama de fuerza cortante. Por ejemplo, como $M_A = 0$ en A, entonces en C, $M_C = M_A + \Delta M_{AC} = 0 + (-4)(1.5) + (2)(1.5) = -3$ kN · m.

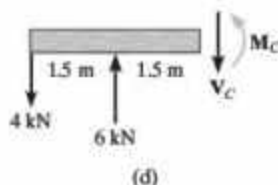


Figura 4-11

EJEMPLO 4.8

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga que se muestra en la figura 4-12a.

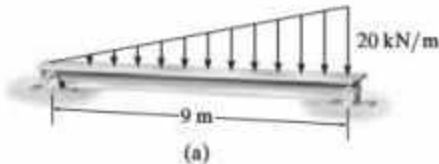


Figura 4-12

SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. Las reacciones ya se han calculado y se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 4-12b.

Diagrama de fuerza cortante. Primero se grafican los puntos extremos $x = 0$, $V = +30$ kN y $x = 9$ m, $V = -60$ kN. Observe que el diagrama de fuerza cortante *empieza* con una pendiente cero puesto que $w = 0$ en $x = 0$, y termina con una pendiente de $w = -20$ kN/m.

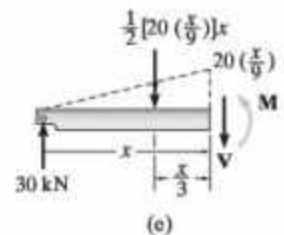
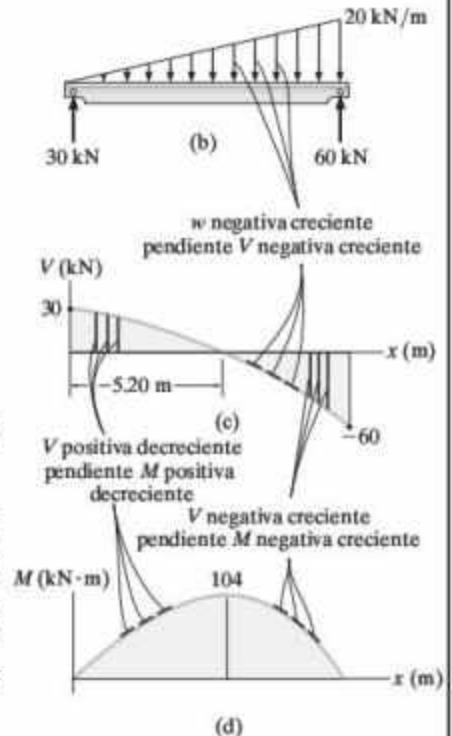
El punto de fuerza cortante cero puede encontrarse mediante el método de las secciones aplicado a un segmento de viga de longitud x , figura 4-12c. Se requiere que $V = 0$, por lo que

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 30 - \frac{1}{2} \left[20 \left(\frac{x}{9} \right) \right] x = 0 \quad x = 5.20 \text{ m}$$

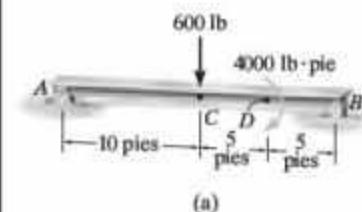
Diagrama de momento. Para $0 < x < 5.20$ m el valor de la fuerza cortante es positiva pero decreciente y, por lo tanto, la pendiente del diagrama de momento también es positiva y decreciente ($dM/dx = V$). En $x = 5.20$ m, $dM/dx = 0$. Lo mismo sucede para $5.20 \text{ m} < x < 9$ m, la fuerza cortante y por ende la pendiente del diagrama de momento son negativas y crecientes, tal como se indica en la figura.

El valor máximo del momento está en $x = 5.20$ m puesto que en este punto $dM/dx = V = 0$, figura 4-12d. A partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 4-12e se tiene

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_S = 0; \quad -30(5.20) + \frac{1}{2} \left[20 \left(\frac{5.20}{9} \right) \right] (5.20) \left(\frac{5.20}{3} \right) + M &= 0 \\ M &= 104 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$



EJEMPLO 4.9



Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga que se muestra en la figura 4-13a.

SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. Las reacciones ya se calcularon y se indican en el diagrama de cuerpo libre.

Diagrama de fuerza cortante. Se grafican los valores de la fuerza cortante en los puntos extremos A ($V_A = +100$ lb) y B ($V_B = -500$ lb). En C la fuerza cortante es *discontinua* puesto que ahí hay una *fuerza concentrada* de 600 lb. El valor de la fuerza cortante justo a la derecha de C puede encontrarse al seccionar la viga en este punto. Esto produce el diagrama de cuerpo libre que se muestra en equilibrio en la figura 4-13e. Este punto ($V = -500$ lb) se grafica sobre el diagrama de fuerza cortante. Observe que en D no se presenta ningún salto o discontinuidad de la fuerza cortante, en este punto es donde se aplica un momento de par de 4000 lb·pie, figura 4-13b.

Diagrama de momento. El momento en cada extremo de la viga es cero, figura 4-13d. El valor del momento en C puede determinarse mediante el método de las secciones, figura 4-13e, o bien encontrando el área bajo el diagrama de fuerza cortante entre A y C. Como $M_A = 0$,

$$M_C = M_A + \Delta M_{AC} = 0 + (100 \text{ lb})(10 \text{ pies})$$

$$M_C = 1000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Además, dado que $M_C = 1000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, el momento en D es

$$M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 1000 \text{ lb} \cdot \text{pie} + (-500 \text{ lb})(5 \text{ pies})$$

$$M_D = -1500 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

En el punto D se produce un salto debido al momento de par de 4000 lb·pie. El método de las secciones, figura 4-13f, da un valor de +2500 lb·pie justo a la derecha de D.

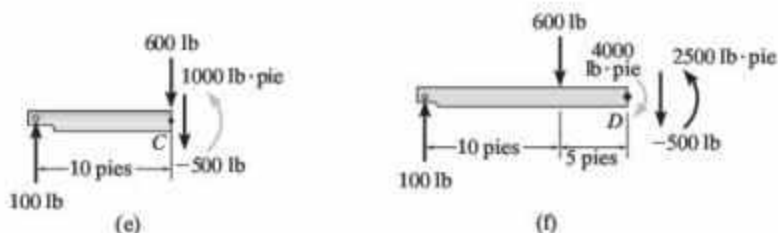
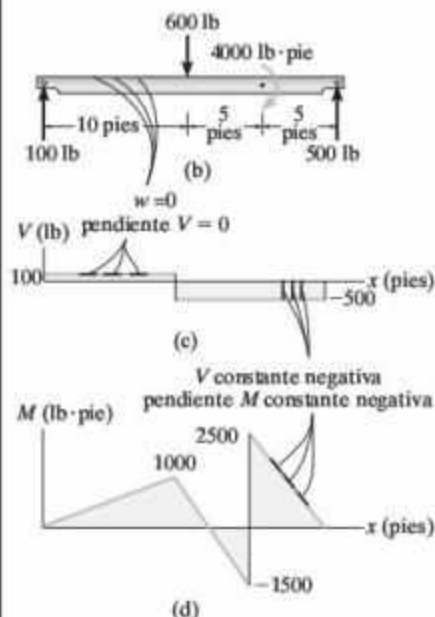
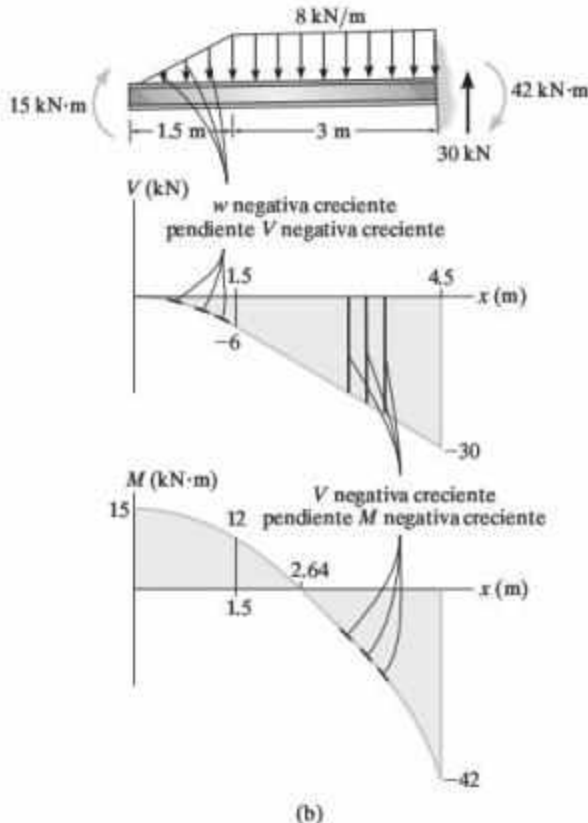


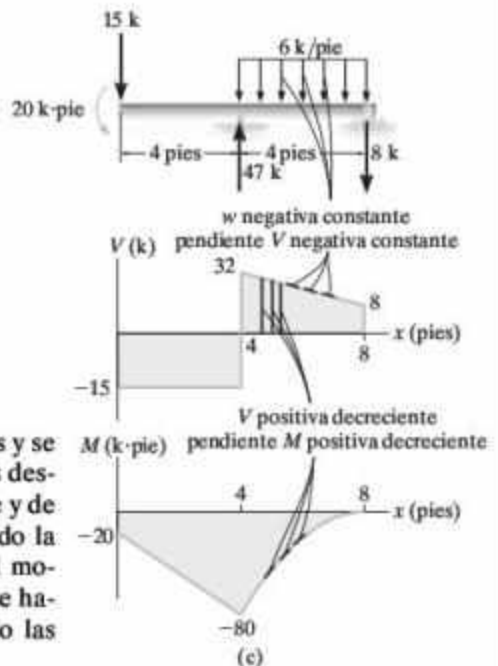
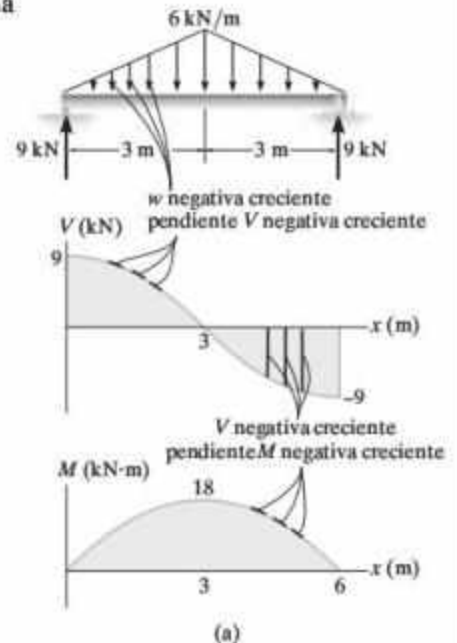
Figura 4-13

EJEMPLO 4.10

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada una de las vigas que se muestran en la figura 4-14.

**Figura 4-14****SOLUCIÓN**

En todos los casos se han calculado las reacciones en los soportes y se indican en la parte superior de las figuras. Siguiendo las técnicas descritas en los ejemplos anteriores, los diagramas de fuerza cortante y de momento se muestran debajo de cada viga. Observe con cuidado la forma en que se establecieron, con base en la pendiente y el momento, donde $dV/dx = w$ y $dM/dx = V$. Los valores calculados se hallan empleando el método de las secciones o bien encontrando las áreas debajo de los diagramas de carga o de fuerza cortante.



EJEMPLO 4.11

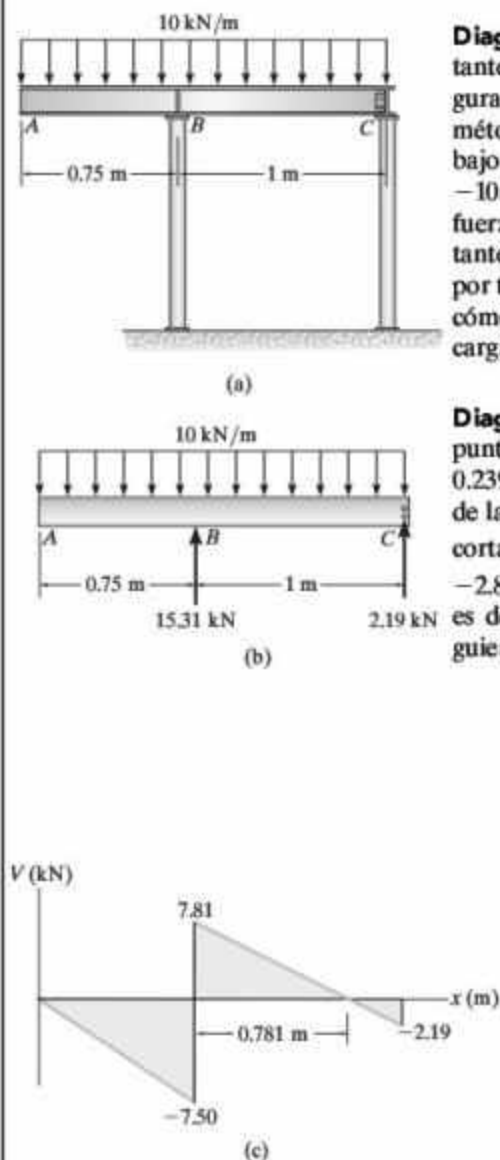
La viga que se muestra en la fotografía se usa para sostener una parte de la saliente de la puerta de entrada a un edificio. En la figura 4-15a se muestra el modelo idealizado de la viga y de la carga que actúa sobre ella. Suponga que B es un rodillo y que C es una articulación. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.

SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. Las reacciones se calculan de la forma habitual. Los resultados se muestran en la figura 4-15b.

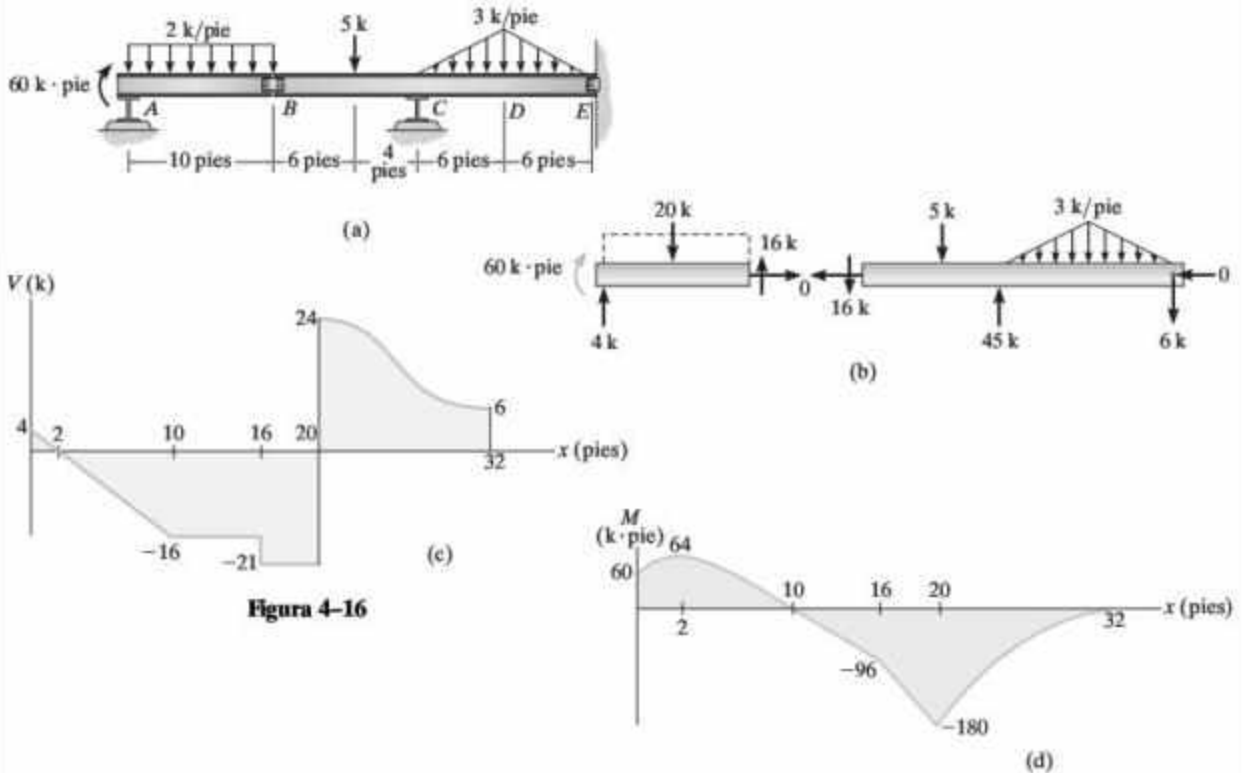
Diagrama de fuerza cortante. Primero se grafica la fuerza cortante en los extremos de la viga; es decir, $V_A = 0$ y $V_C = -2.19$ kN, figura 4-15c. Para encontrar la fuerza cortante a la izquierda de B use el método de las secciones para el segmento AB ; o bien, calcule el área bajo el diagrama de carga distribuida, es decir, $\Delta V = V_B - 0 = -10(0.75)$, $V_B^- = -7.50$ kN. La reacción en el soporte hace que la fuerza cortante salte $-7.50 + 15.31 = 7.81$ kN. El punto de fuerza cortante cero puede determinarse a partir de la pendiente -10 kN/m, o por triángulos semejantes, $7.81/x = 2.19/(1-x)$, $x = 0.781$ m. Observe cómo el diagrama V sigue la pendiente negativa, que se define por la carga distribuida negativa y constante.

Diagrama de momento. Primero se grafica el momento en los puntos extremos, $M_A = M_C = 0$, figura 4-15d. Los valores de -2.81 y 0.239 en el diagrama de momento pueden calcularse por el método de las secciones o bien buscando las áreas bajo el diagrama de fuerza cortante. Por ejemplo, $\Delta M = M_B - 0 = \frac{1}{2}(-7.50)(0.75) = -2.81$, $M_B = -2.81$ kN · m. Asimismo, demuestre que el momento positivo máximo es de 0.239 kN · m. Observe cómo se forma el diagrama de M , siguiendo la pendiente definida por el diagrama de V .

**Figura 4-15**

EJEMPLO 4.12

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga compuesta que se muestra en la figura 4-16a. Suponga que los soportes en A y C son rodillos y que B y E son conexiones articuladas.

**Figura 4-16****SOLUCIÓN**

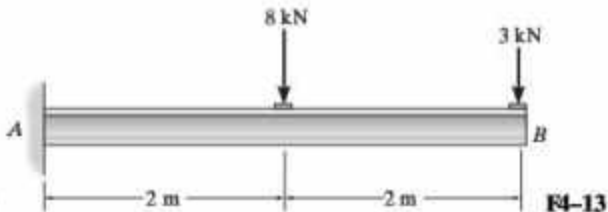
Reacciones en los soportes. Una vez que los segmentos de viga se desconectan del pasador en B , las reacciones en los soportes pueden calcularse como se muestra en la figura 4-16b.

Diagrama de fuerza cortante. Como siempre, se comienza por graficar la fuerza cortante en los extremos A y E , figura 4-16c. El perfil del diagrama de V se forma siguiendo su pendiente, definida por la carga. Trate de establecer los valores de la fuerza cortante usando las áreas apropiadas bajo el diagrama de carga (curva w) a fin de encontrar el cambio en la fuerza cortante. El valor cero para la fuerza cortante en $x = 2$ pies, puede encontrarse empleando triángulos semejantes o usando la estática, como se hizo en la figura 4-12e del Ejemplo 4-8.

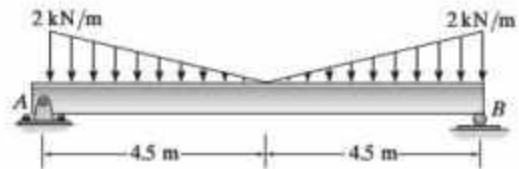
Diagrama de momento. Primero se grafican los momentos en los extremos $M_A = 60 \text{ k} \cdot \text{pie}$ y $M_E = 0$, figura 4-16d. Estudie el diagrama y observe cómo se establecen las diferentes curvas mediante $dM/dx = V$. Verifique los valores numéricos de los picos usando la estática o calculando las áreas apropiadas bajo el diagrama de fuerza cortante a fin de encontrar el cambio en el momento.

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

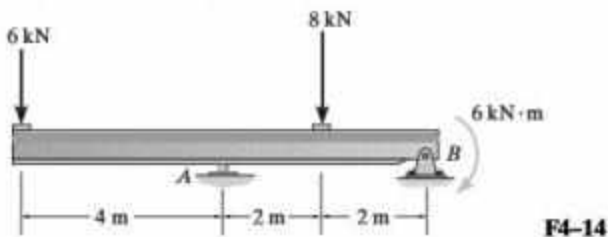
F4-13. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Indique los valores en los soportes y en los puntos donde se produzca un cambio en la carga.



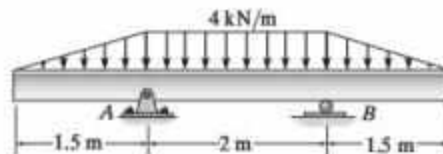
F4-17. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Indique los valores en los soportes y en los puntos donde se produzca un cambio en la carga.



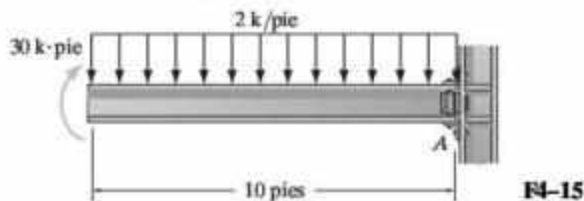
F4-14. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Indique los valores en los soportes y en los puntos donde se produzca un cambio en la carga.



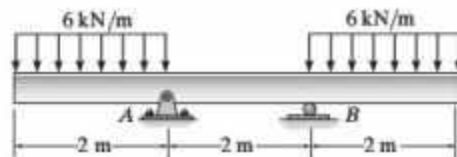
F4-18. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Indique los valores en los soportes y en los puntos donde se produzca un cambio en la carga.



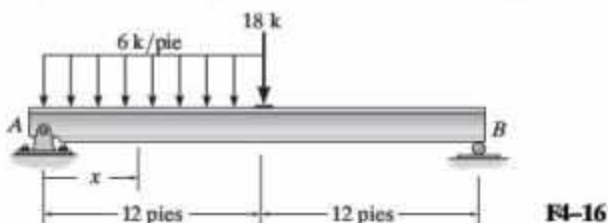
F4-15. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Indique los valores en los soportes y en los puntos donde se produzca un cambio en la carga.



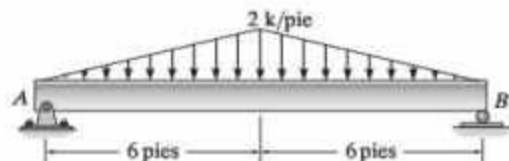
F4-19. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Indique los valores en los soportes y en los puntos donde se produzca un cambio en la carga.



F4-16. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Indique los valores en los soportes y en los puntos donde se produzca un cambio en la carga.

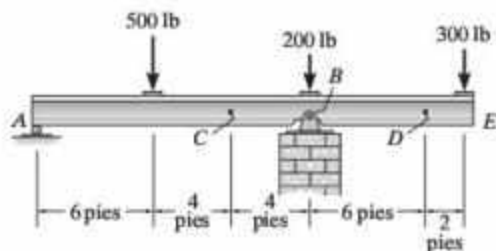


F4-20. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Indique los valores en los soportes y en los puntos donde se produzca un cambio en la carga.



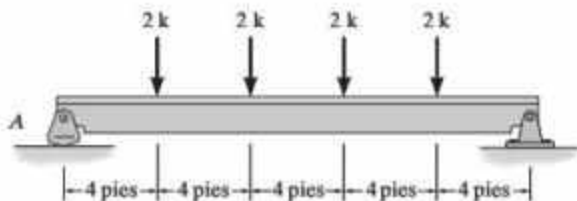
PROBLEMAS

4-23. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



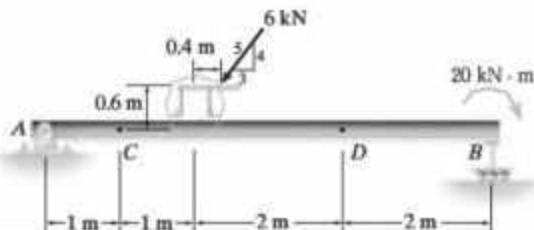
Prob. 4-23

***4-24.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



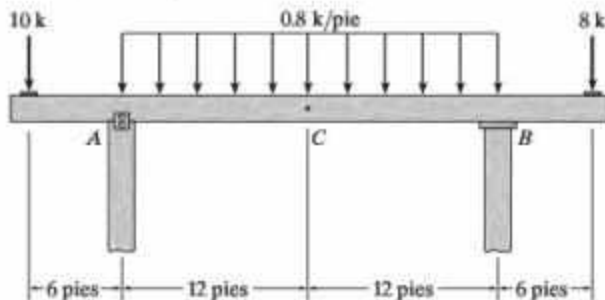
Prob. 4-24

4-25. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



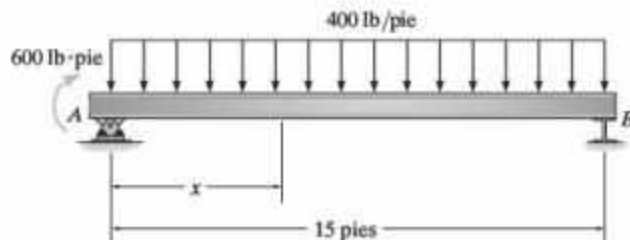
Prob. 4-25

4-26. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



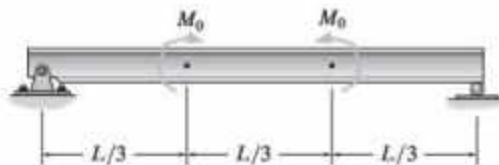
Prob. 4-26

4-27. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



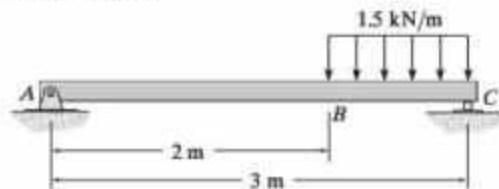
Prob. 4-27

***4-28.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga (a) en términos de los parámetros mostrados; (b) considere que $M_0 = 500 \text{ N} \cdot \text{m}$, $L = 8 \text{ m}$.



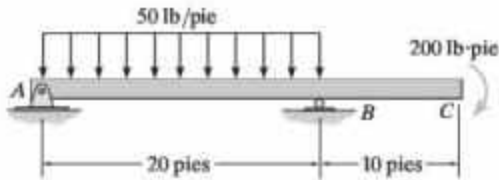
Prob. 4-28

4-29. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



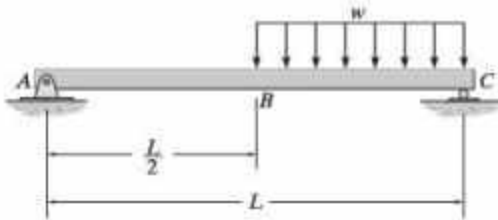
Prob. 4-29

4-30. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



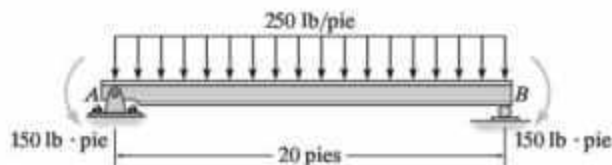
Prob. 4-30

4-31. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



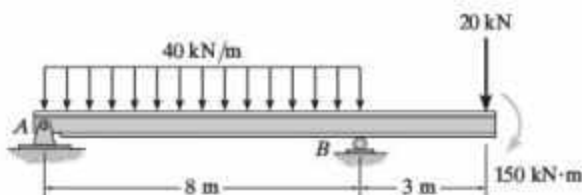
Prob. 4-31

***4-32.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



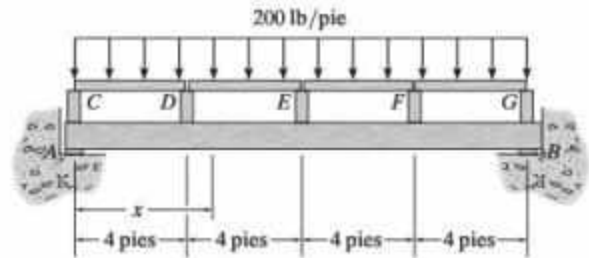
Prob. 4-32

4-33. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



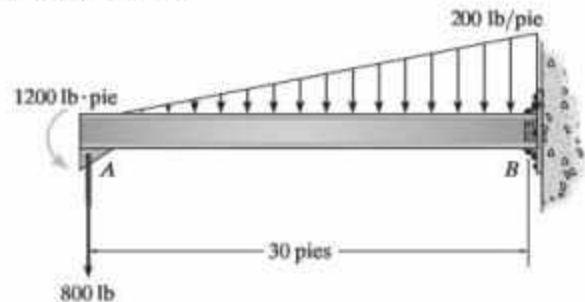
Prob. 4-33

4-34. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



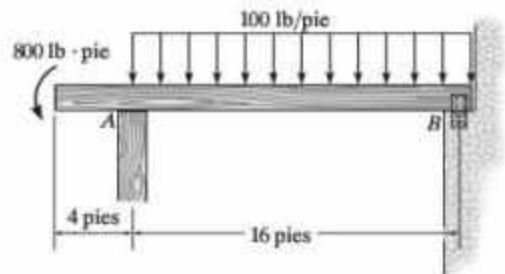
Prob. 4-34

4-35. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



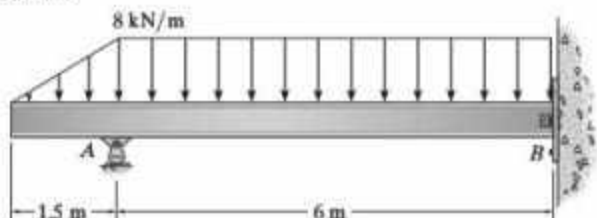
Prob. 4-35

***4-36.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Suponga que el soporte en B es una articulación y que A es un rodillo.



Prob. 4-36

4-37. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Suponga que el soporte en B es una articulación.



Prob. 4-37

4.4 Diagramas de fuerza cortante y de momento para un marco

Recuerde que un *marco* se compone de varios elementos que están conectados fijamente o articulados en sus extremos. Con frecuencia, el diseño de estas estructuras requiere elaborar diagramas de fuerza cortante y de momento para cada uno de sus elementos. Para analizar cualquier problema, se puede utilizar el procedimiento de análisis descrito en la sección 4-3. Para ello es necesario primero determinar la reacción en los soportes del marco. Después, aplicando el método de las secciones, se encuentran la fuerza axial, la fuerza cortante y el momento que actúan en los extremos de cada elemento. Los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada elemento pueden dibujarse de la manera descrita anteriormente, siempre y cuando todas las cargas se descompongan en componentes que actúan en forma paralela y perpendicular al eje del elemento.

En la práctica, al dibujar el diagrama de momento se usa una de las dos convenciones de signos existentes. En particular, si el marco es de *concreto reforzado*, los diseñadores suelen dibujar el diagrama de momento positivo en el lado donde el marco está sometido a tensión. En otras palabras, si el momento produce tensión en la superficie externa del marco, el diagrama de momento se dibuja positivo en este lado. Como el concreto tiene una baja resistencia a la tensión, entonces se podrá decir de un vistazo en qué lado del marco debe colocarse el acero de refuerzo. Sin embargo, en este texto se usará la convención de signos contraria en la que *siempre se dibuja el diagrama de momento positivo en el lado donde los elementos están sometidos a compresión*. Ésta es la misma convención que se usó para las vigas y se analizó en la sección 4-1.

Los siguientes ejemplos ilustran este procedimiento en forma numérica.



Para el diseño de esta trabe simplemente apoyada, que forma parte de un marco de concreto para construcción, primero se trazaron sus diagramas de fuerza cortante y de momento.

EJEMPLO 4.13

Dibuje el diagrama de momento para el marco ahusado de la figura 4-17a. Suponga que el soporte en A es un rodillo y que B es una articulación.

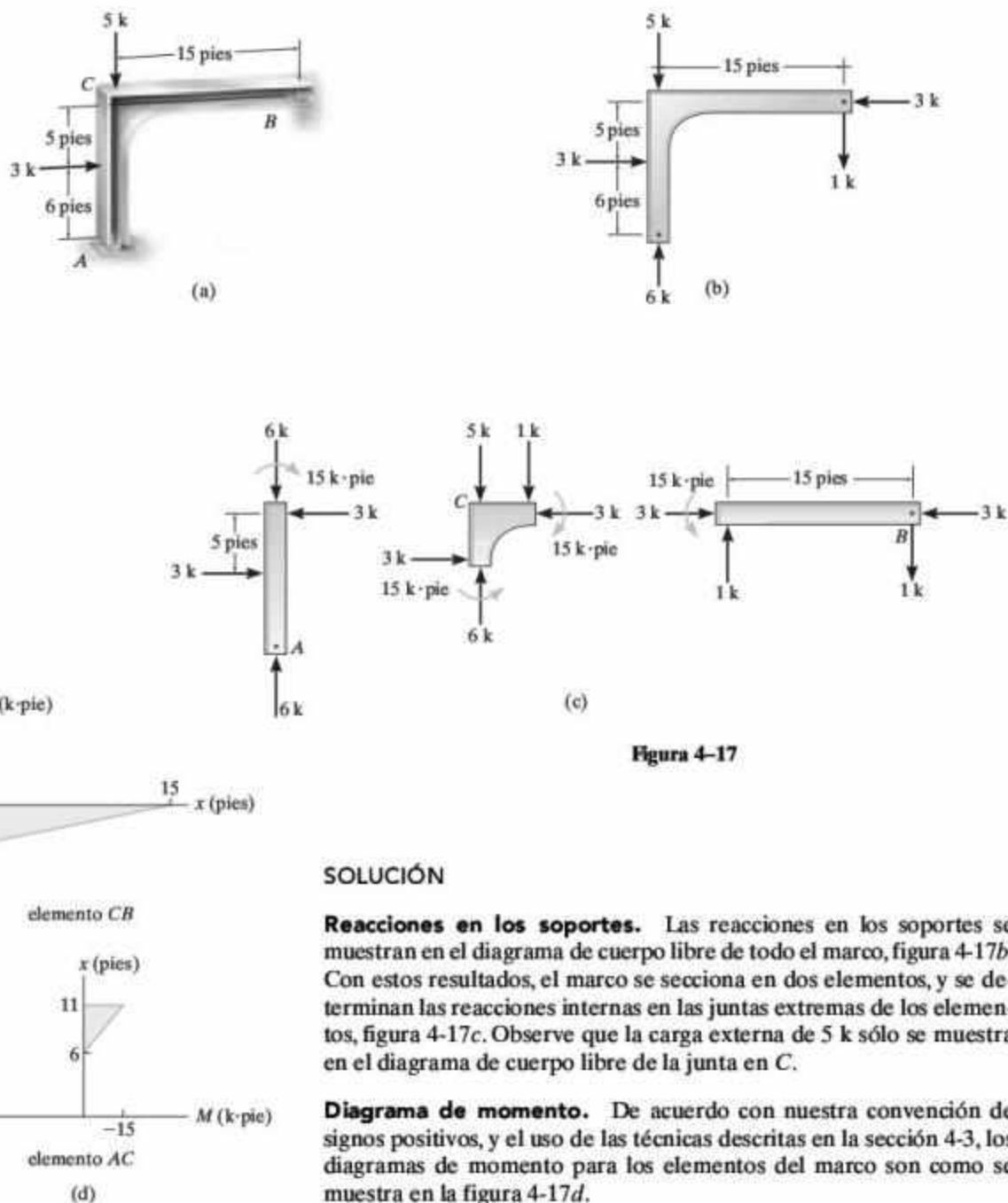


Figura 4-17

SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. Las reacciones en los soportes se muestran en el diagrama de cuerpo libre de todo el marco, figura 4-17b. Con estos resultados, el marco se secciona en dos elementos, y se determinan las reacciones internas en las juntas extremas de los elementos, figura 4-17c. Observe que la carga externa de 5 k sólo se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la junta en C.

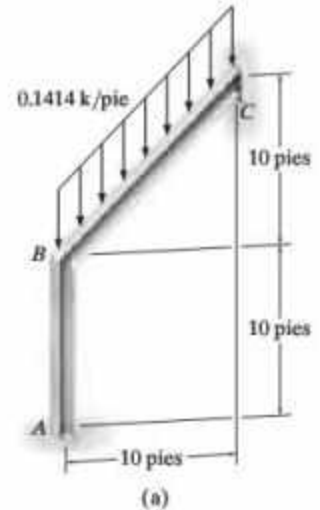
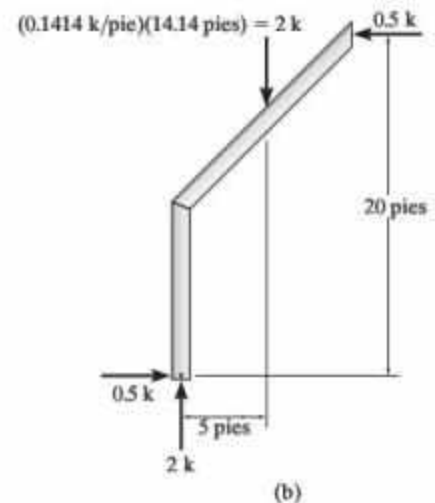
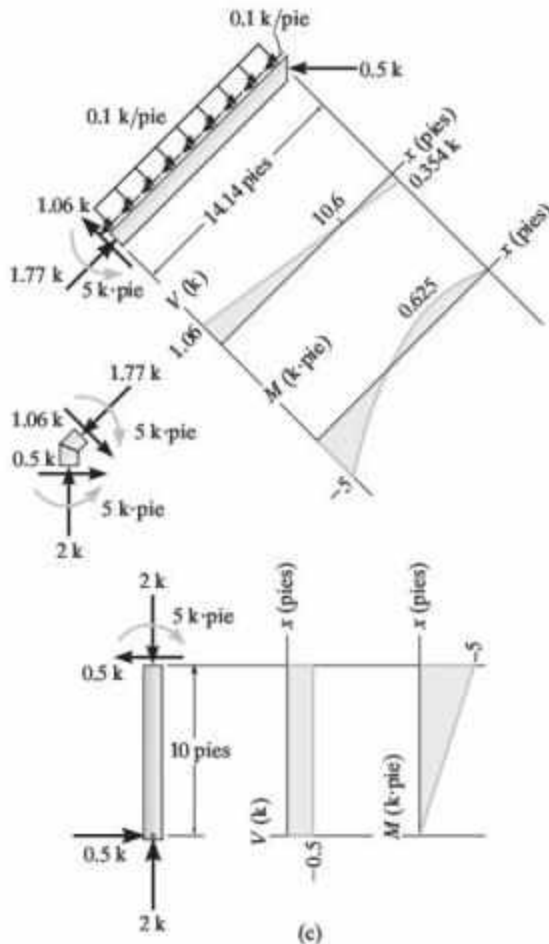
Diagrama de momento. De acuerdo con nuestra convención de signos positivos, y el uso de las técnicas descritas en la sección 4-3, los diagramas de momento para los elementos del marco son como se muestra en la figura 4-17d.

EJEMPLO 4.14

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para el marco que se muestra en la figura 4-18a. Suponga que A es una articulación, C es un rodillo y B es una junta fija. Ignore el espesor de los elementos.

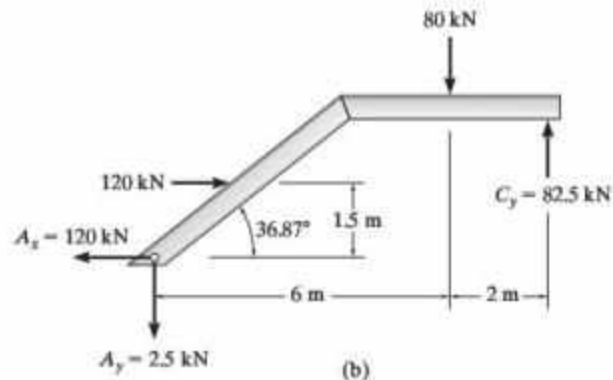
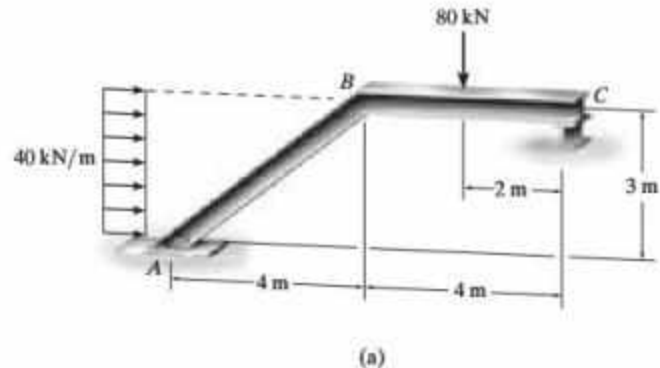
SOLUCIÓN

Tenga en cuenta que la carga distribuida actúa sobre una longitud de 10 pies $\sqrt{2} = 14.14$ pies. Las reacciones en todo el marco se calculan y se muestran en su diagrama de cuerpo libre, figura 4-18b. A partir de este diagrama se dibujan los diagramas de cuerpo libre de cada elemento, figura 4-18c. La carga distribuida en BC tiene componentes a lo largo de BC y perpendiculares a su eje de $(0.1414 \text{ k/pie}) \cos 45^\circ = (0.1414 \text{ k/pie}) \sin 45^\circ = 0.1 \text{ k/pie}$, como se muestra. Con base en estos resultados, los diagramas de fuerza cortante y de momento también se presentan en la figura 4-18c.

**Figura 4-18**

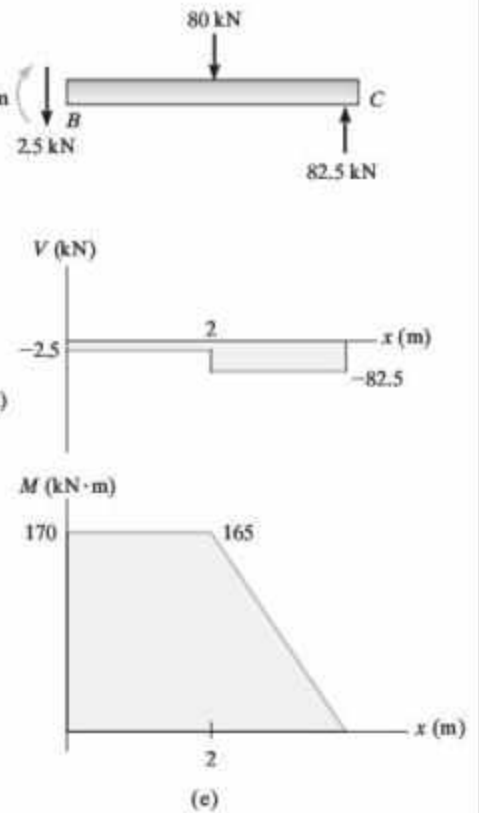
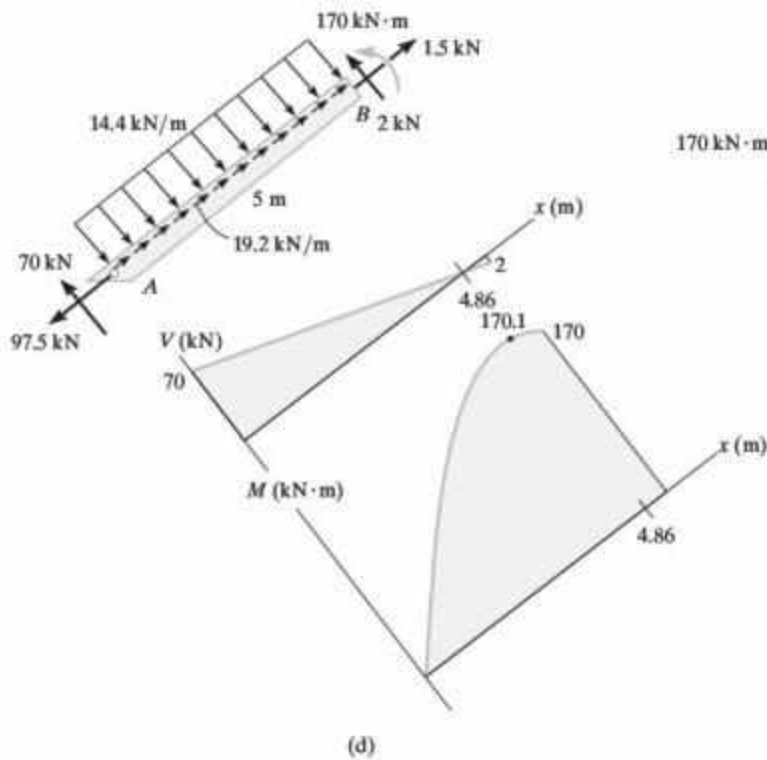
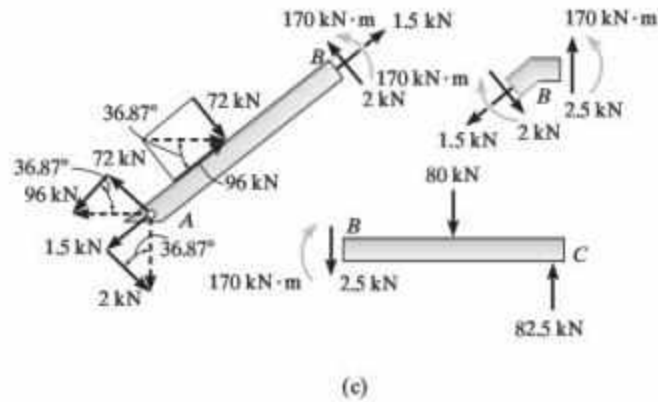
EJEMPLO 4.15

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para el marco que se muestra en la figura 4-19a. Suponga que A es una articulación, C es un rodillo y B es una junta fija.

**Figura 4-19****SOLUCIÓN**

Reacciones en los soportes. El diagrama de cuerpo libre de todo el marco se muestra en la figura 4-19b. Aquí la carga distribuida, que representa la carga del viento, ha sido reemplazada por su resultante para después calcular las reacciones. Luego se secciona el marco en B y se determinan las cargas internas en ese punto, figura 4-19c. Como una comprobación, el equilibrio se satisface en la junta B , lo cual también se muestra en la figura.

Diagramas de cortante y de momento. Las componentes de la carga distribuida $(72 \text{ kN})/(5 \text{ m}) = 14.4 \text{ kN/m}$ y $(96 \text{ kN})/(5 \text{ m}) = 19.2 \text{ kN/m}$, se muestran en el elemento AB , figura 4-19d. Los diagramas asociados de fuerza cortante y de momento se dibujan para cada elemento, como se muestra en las figuras 4-19d y 4-19e.



4.5 Diagramas de momento contruistos por el método de superposición

Dado que las vigas se utilizan principalmente para resistir esfuerzos flexionantes, es importante que el diagrama de momento acompañe a la solución para su diseño. En la sección 4-3 el diagrama de momento se contruyó dibujando *primero* el diagrama de fuerza cortante. Sin embargo, si se aplica el principio de superposición, cada una de las cargas en la viga puede tratarse por separado y entonces el diagrama de momento puede contruirse en una serie de partes en vez de hacerlo en una sola forma que en ocasiones resulta complicada. Más adelante en el texto se verá que esto puede ser especialmente ventajoso cuando se aplican métodos de deflexión geométrica para determinar tanto la deflexión de una viga como las reacciones en vigas estáticamente indeterminadas.

En el análisis estructural, la mayoría de las cargas aplicadas sobre vigas es una combinación de las cargas de la figura 4-20. La construcción de los diagramas de momento asociados se analizó en el Ejemplo 4.8. A fin de

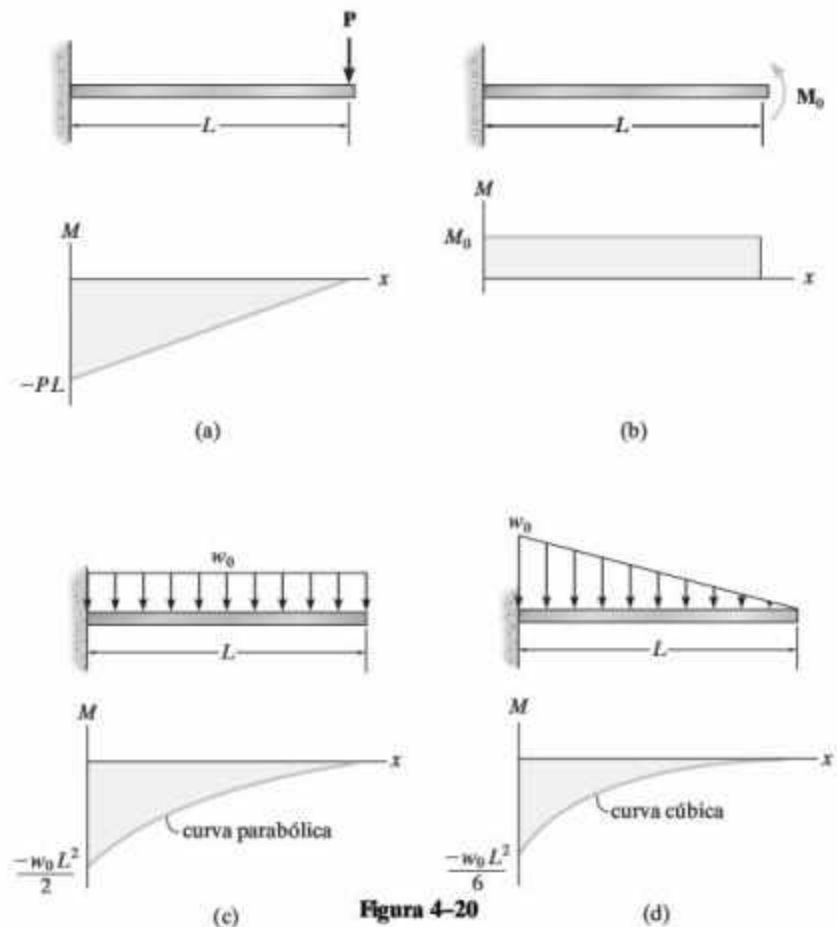


Figura 4-20

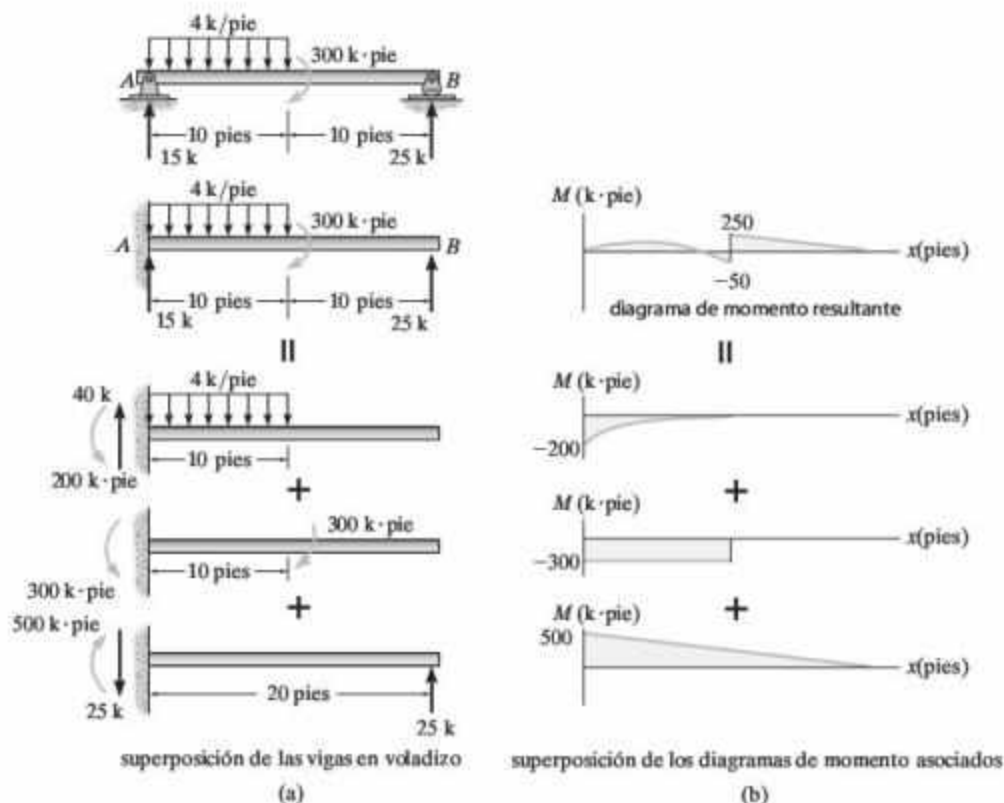


Figura 4-21

entender cómo se usa el método de superposición para construir el diagrama de momento, considere la viga simplemente apoyada que se muestra en la parte superior de la figura 4-21a. Aquí las reacciones ya se han calculado, por lo que el sistema de fuerzas sobre la viga produce una fuerza cero y un momento resultante. El diagrama de momento para este caso se muestra en la parte superior de la figura 4-21b. Observe que este mismo diagrama de momento se produce para la viga en voladizo cuando está sometida al mismo sistema de cargas estáticamente equivalentes que la viga simplemente apoyada. En vez de considerar *todas las cargas* sobre esta viga de manera *simultánea* al trazar el diagrama de momento, se pueden *superponer* los resultados de las cargas que actúan por separado en las tres vigas en voladizo de la figura 4.21a. Por lo tanto, si se dibuja el diagrama de momento para cada viga en voladizo, figura 4-21b, al superponer estos diagramas se obtiene el diagrama de momento resultante de la viga simplemente apoyada. Por ejemplo, con base en cada uno de los diagramas de momento separados, el momento en el extremo A es $M_A = -200 - 300 + 500 = 0$, como se comprueba en el diagrama de momento superior de la figura 4-21b. En algunos casos es *más fácil* construir y utilizar otra serie de diagramas de momento estáticamente equivalentes para una viga, *en lugar de* construir el diagrama de momento "resultante" de la viga que suele ser más complicado.

De manera similar, también puede simplificarse la construcción del diagrama de momento “resultante” para una viga con una superposición de vigas “simplemente apoyadas”. Por ejemplo, la carga sobre la viga que se muestra en la parte superior de la figura 4-22a es equivalente a las cargas de la viga que se muestra en la parte inferior. En consecuencia, se pueden usar los diagramas de momento separados para cada una de estas tres vigas *en vez de* dibujar el diagrama de momento resultante que se muestra en la figura 4-22b.

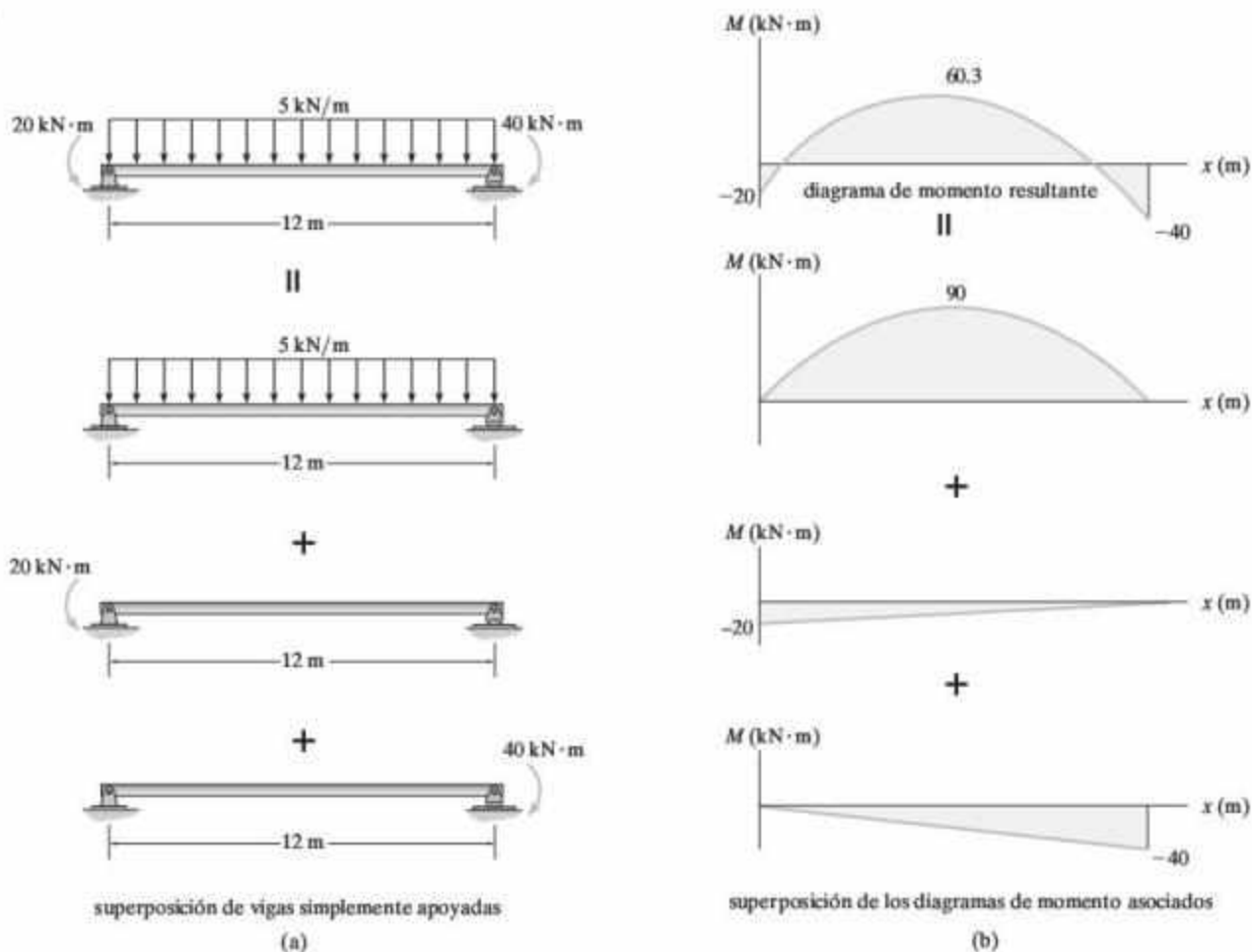


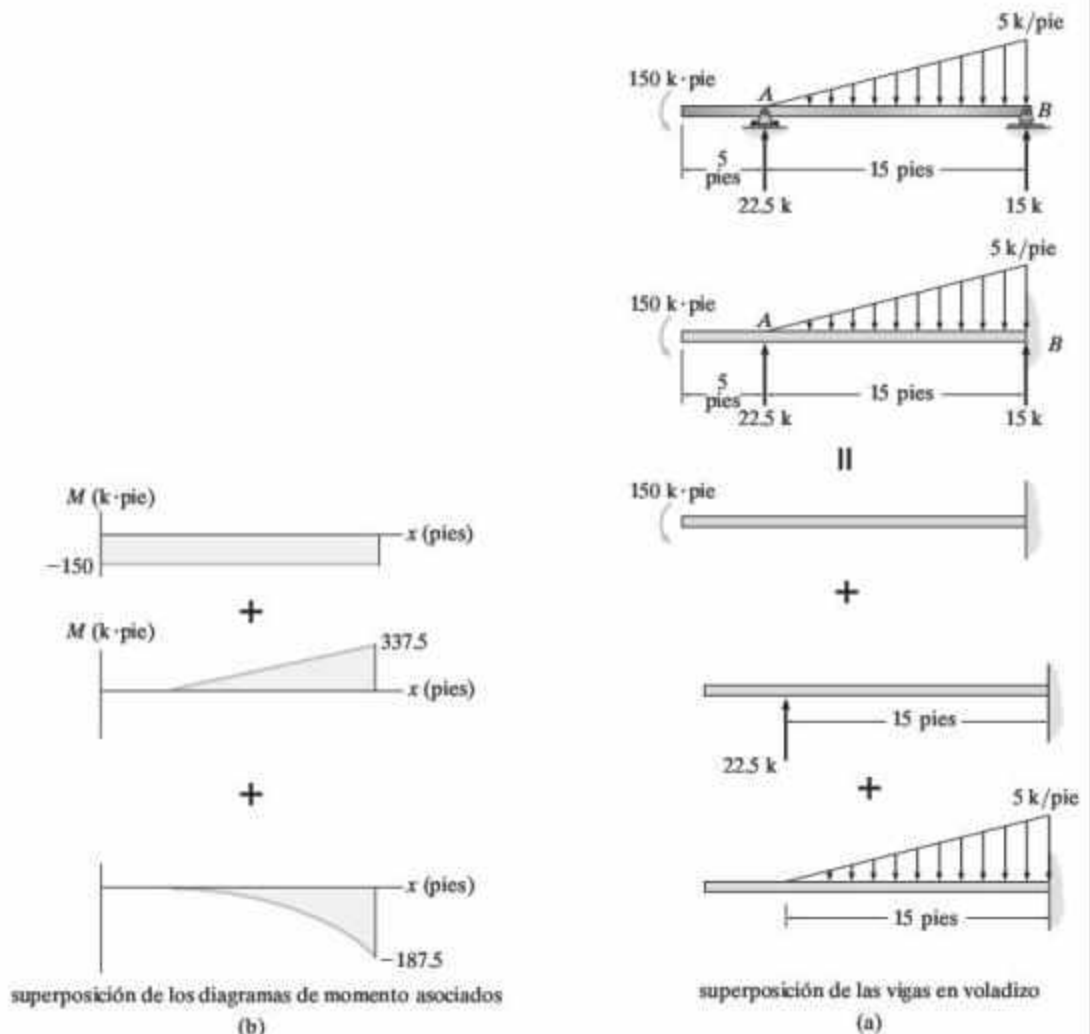
Figura 4-22

EJEMPLO 4.16

Dibuje los diagramas de momento para la viga que se muestra en la parte superior de la figura 4-23a usando el método de superposición. Considere que la viga está en voladizo desde el soporte en B .

SOLUCIÓN

Si la viga estuviera apoyada en voladizo desde B , estaría sometida a las cargas estáticamente equivalentes que se muestran en la figura 4-23a. A continuación se muestran las tres vigas en voladizo superpuestas junto con sus diagramas de momento asociados, figura 4-23b. (Como una ayuda para su construcción, revise la figura 4-20.) Aunque *no es necesario aquí*, la suma de estos diagramas producirá el diagrama de momento resultante para la viga. Como una práctica, intente dibujar este diagrama y compruebe los resultados.

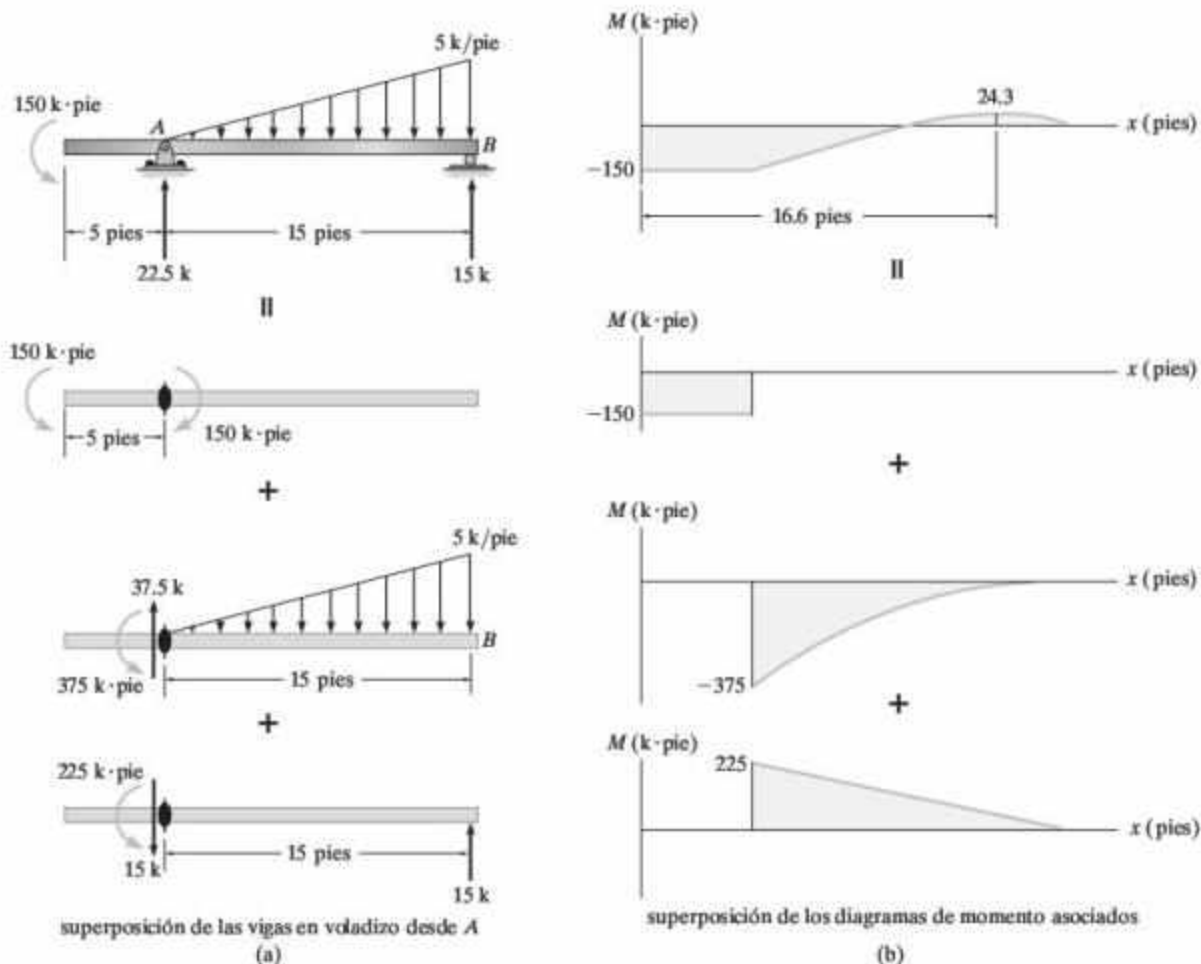
**Figura 4-23**

EJEMPLO 4.17

Dibuje los diagramas de momento para la viga que se muestra en la parte superior de la figura 4-24a, usando el método de superposición. Considere que la viga está en voladizo desde el pasador en A.

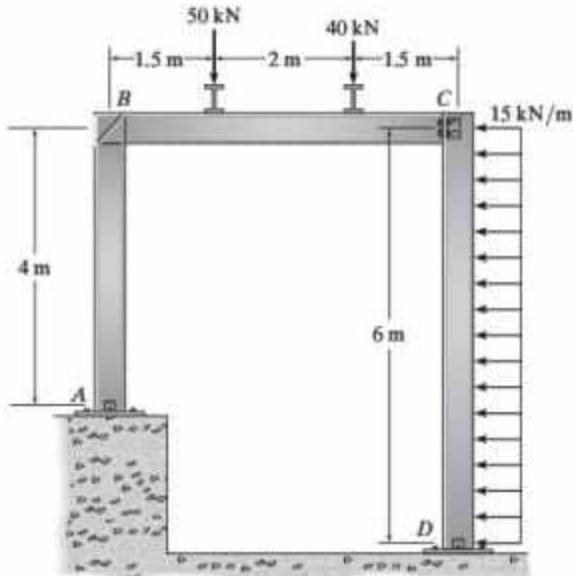
SOLUCIÓN

Las vigas en voladizo superpuestas se muestran en la figura 4-24a, junto con sus diagramas de momento asociados, figura 4-24b. Tenga en cuenta que la reacción en el pasador (22.5 k) no se considera ya que no produce ningún diagrama de momento. Como un ejercicio, compruebe que el diagrama de momento resultante es el que se presenta en la parte superior de la figura 4-24b.

**Figura 4-24**

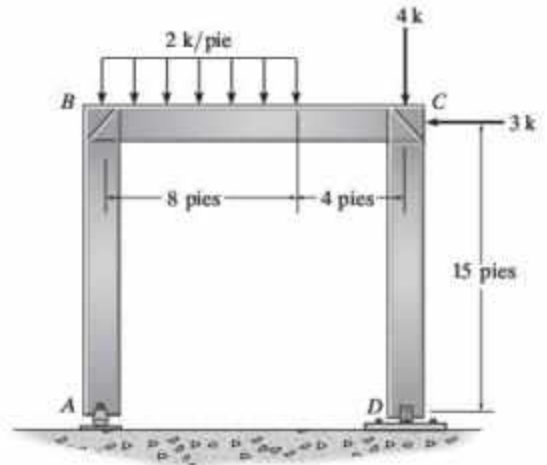
PROBLEMAS

4-38. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada uno de los tres elementos del marco. Suponga que el marco está articulado en A , C y D , y que hay una junta fija en B .



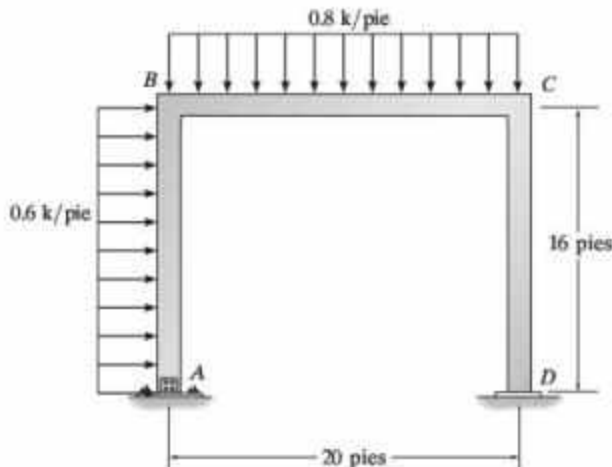
Prob. 4-38

***4-40.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada uno de los elementos del marco. Suponga que A es un oscilador y que D está articulado.



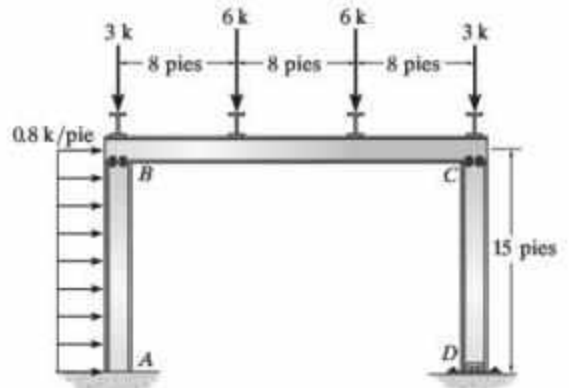
Prob. 4-40

4-39. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada uno de los elementos del marco. Suponga que el soporte en A es una articulación y en D es un rodillo.



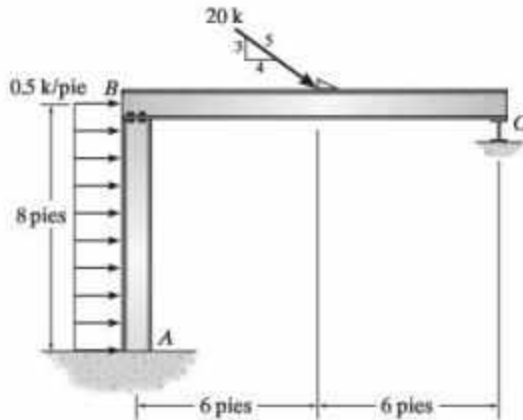
Prob. 4-39

4-41. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada uno de los elementos del marco. Suponga que el marco está articulado en B , C y D , y que A está fijo.



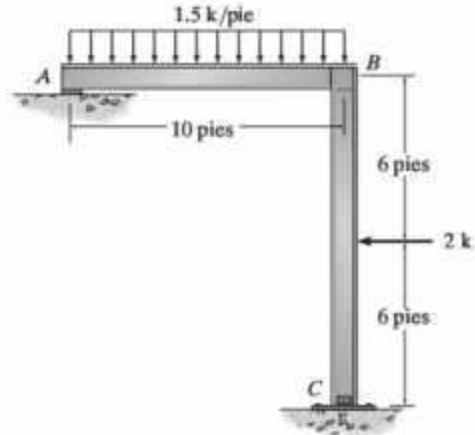
Prob. 4-41

4-42. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada uno de los elementos del marco. Suponga que A está fija, que la junta en B es una articulación, y que C es un soporte de rodillo.



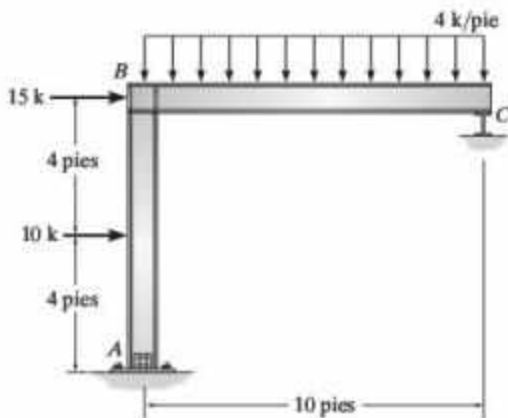
Prob. 4-42

***4-44.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada elemento del marco. Suponga que el marco tiene un soporte de rodillo en A y un soporte articulado en C .



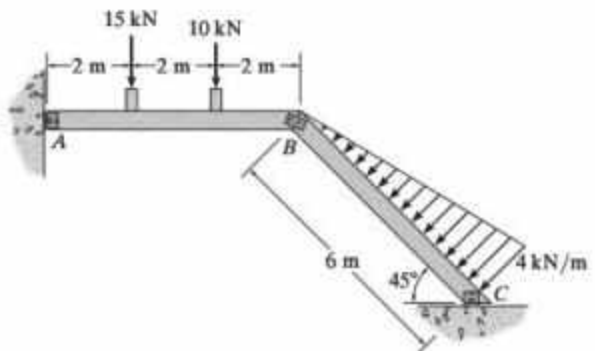
Prob. 4-44

4-43. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada elemento del marco. Suponga que el marco está articulado en A y que C es un rodillo.



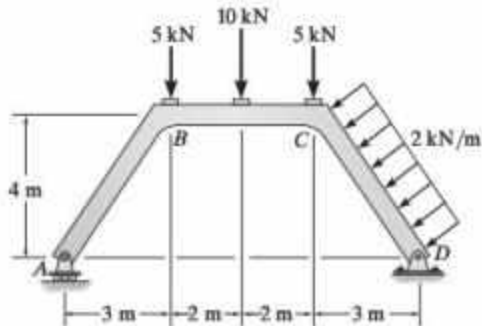
Prob. 4-43

4-45. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada elemento del marco. Los elementos están articulados en A , B y C .



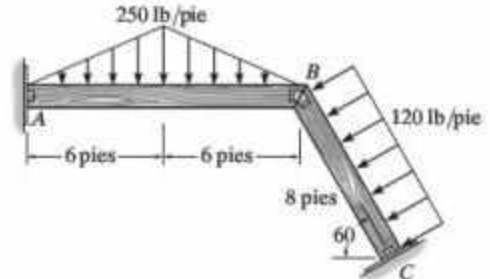
Prob. 4-45

4-46. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada elemento del marco.



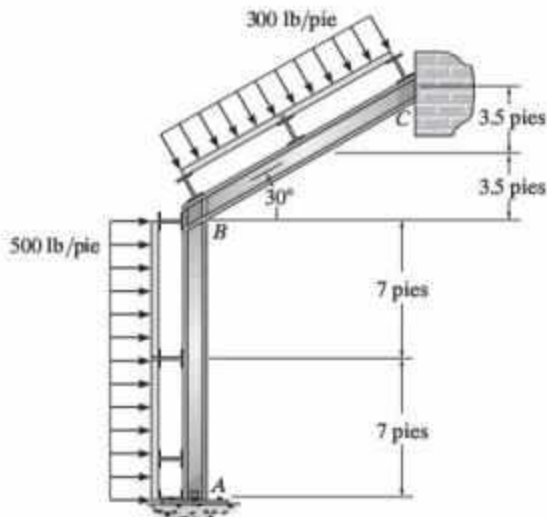
Prob. 4-46

***4-48.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada elemento del marco. Las juntas en *A*, *B* y *C* están articuladas.



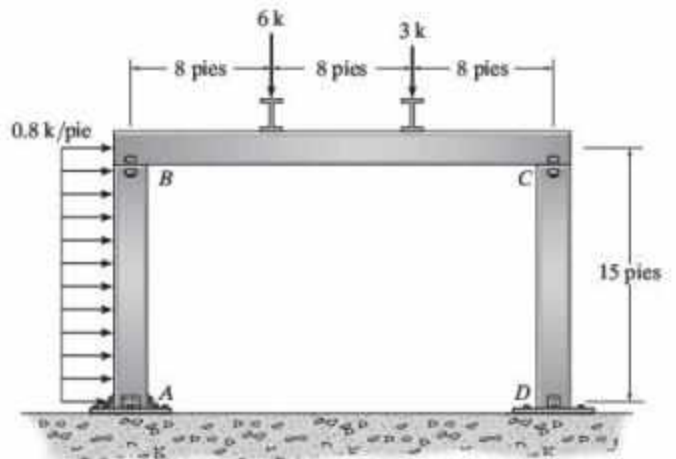
Prob. 4-48

4-47. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada elemento del marco. Suponga que la junta en *A* está articulada y que el soporte en *C* es un rodillo. La articulación en *B* está fija. La carga del viento se transfiere a los elementos en las correas y largueros desde los segmentos simplemente apoyados de la pared y el techo.



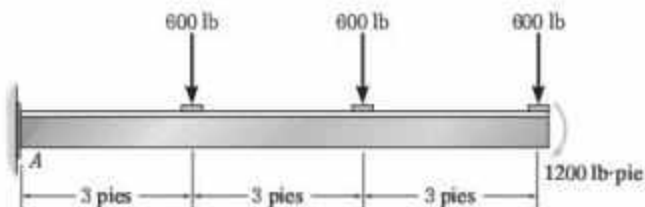
Prob. 4-47

4-49. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada uno de los tres elementos del marco. Suponga que está articulado en *B*, *C* y *D* y que se encuentra fijo en *A*.



Prob. 4-49

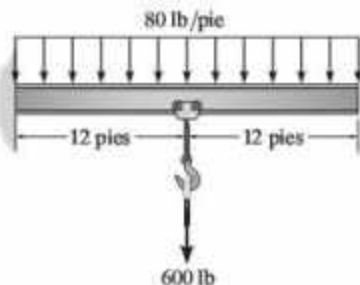
4-50. Dibuje los diagramas de momento para la viga usando el método de superposición. La viga está en voladizo desde A .



Prob. 4-50

4

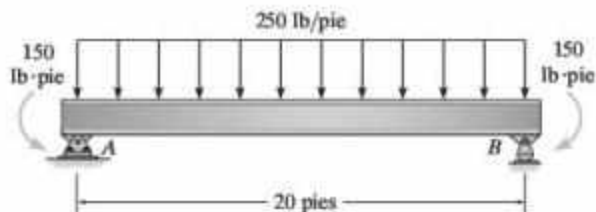
4-51. Dibuje los diagramas de momento para la viga usando el método de superposición.



Prob. 4-51

***4-52.** Dibuje los diagramas de momento para la viga usando el método de superposición. Considere que la viga está en voladizo desde el extremo A .

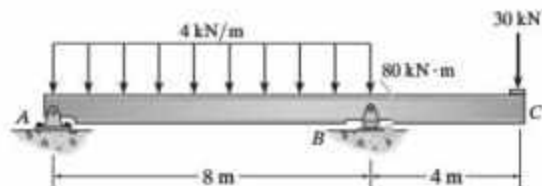
4-53. Dibuje los diagramas de momento para la viga usando el método de superposición. Considere que la viga está simplemente apoyada en A y en B , como se muestra en la figura.



Probs. 4-52/4-53

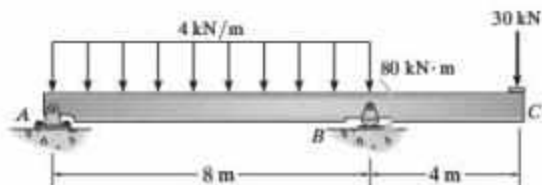
4-54. Dibuje los diagramas de momento para la viga usando el método de superposición. Considere que la viga está en voladizo desde el soporte articulado en A .

4-55. Dibuje los diagramas de momento para la viga usando el método de superposición. Considere que la viga está en voladizo desde el oscilador en B .



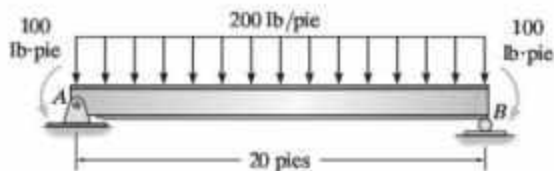
Probs. 4-54/4-55

***4-56.** Dibuje los diagramas de momento para la viga usando el método de superposición. Considere que la viga está en voladizo desde el extremo C .



Prob. 4-56

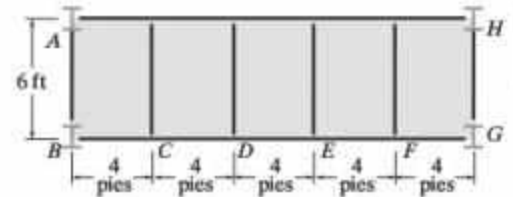
4-57. Dibuje los diagramas de momento para la viga usando el método de superposición. Considere que la viga está simplemente apoyada en A y en B , como se muestra en la figura.



Prob. 4-57

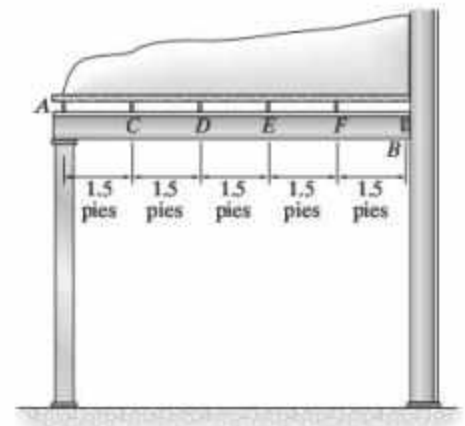
PROBLEMAS DE PROYECTO

4-1P. En la fotografía se muestra un balcón ubicado en el tercer piso de un motel. Está construido con una losa de concreto de 4 pulgadas de espesor (piedra lisa) la cual se apoya sobre las cuatro vigas de piso simplemente apoyadas, dos traveses laterales en voladizo AB y HG , y las traveses frontal y posterior. En la figura adyacente se muestra el plano idealizado de la estructura con dimensiones promedio. De acuerdo con los códigos locales, la carga viva del balcón es de 45 psf. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la trabe frontal BG y una trabe lateral AB . Suponga que la trabe frontal es un canal con un peso de 25 lb/pie y que las traveses laterales tienen secciones de ala ancha con un peso de 45 lb/pie. Ignore el peso de las vigas de piso y de la baranda frontal. Para esta solución considere cada una de las cinco losas como losas de dos vías.



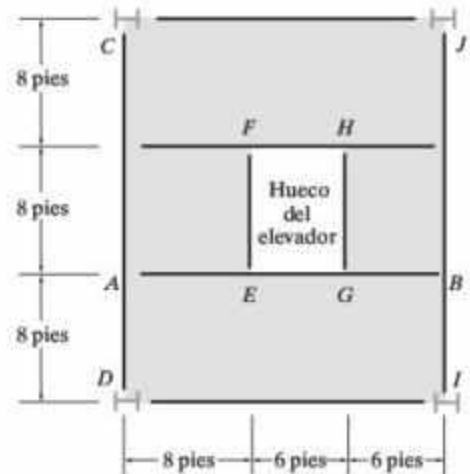
Prob. 4-1P

4-2P. El pabellón que se muestra en la fotografía proporciona resguardo a la entrada de un edificio. Considere que todos los elementos están simplemente apoyados. Las barras de apoyo en C, D, E, F tienen un peso de 135 lb y una longitud de 20 pies cada una. El techo tiene 4 pulgadas de espesor y debe ser de concreto ligero con una densidad de 102 lb/pie³. Se supone que la carga viva causada por la acumulación de nieve es trapezoidal, con 60 psf a la derecha (contra la pared) y 20 psf a la izquierda (en la saliente). Suponga que la losa de concreto está simplemente apoyada entre las vigas. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga lateral AB . No tome en cuenta su peso.



Prob. 4-2P

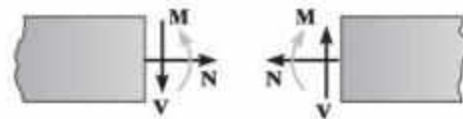
4-3P. En la figura se muestra el plano estructural idealizado de un sistema de piso localizado en el vestíbulo de un edificio de oficinas. El piso es de concreto reforzado con piedra de 4 pulgadas de espesor. Si las paredes del hueco del elevador están hechas con mampostería de concreto ligero sólido de 4 pulgadas de espesor, y tienen una altura de 10 pies, determine el momento máximo en la viga AB . Ignore el peso de los elementos.



Prob. 4-3P

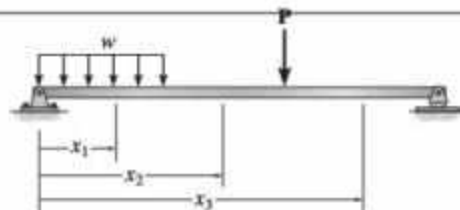
REPASO DEL CAPÍTULO

Los elementos estructurales sometidos a cargas planas soportan una fuerza normal interna N , una fuerza cortante V y un momento flexionante M . Para encontrar estos valores en un punto específico de un elemento, debe usarse el método de las secciones. Para ello es necesario dibujar un diagrama de cuerpo libre de un segmento del elemento, y después aplicar las tres ecuaciones de equilibrio. Siempre muestre las tres cargas internas sobre la sección en sus direcciones positivas.



convención de signos positivos

La fuerza cortante y de momento puede expresarse en función de x a lo largo del elemento al establecer el origen en un punto fijo (normalmente en el extremo izquierdo del elemento, para después usar el método de las secciones, donde se realiza la sección a una distancia x desde el origen). Para los elementos sometidos a cargas diversas deben extenderse diferentes coordenadas x entre las cargas.



Los diagramas de fuerza cortante y de momento para los elementos estructurales pueden dibujarse graficando las funciones de fuerza cortante y de momento. También pueden dibujarse usando las dos relaciones gráficas.

$$\frac{dV}{dx} = w(x)$$

Pendiente del diagrama de fuerza cortante = { Intensidad de la carga distribuida

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Pendiente del diagrama de momento = { Fuerza cortante

Tenga en cuenta que un punto de fuerza cortante cero localiza al punto de momento máximo puesto que $V = dM/dx = 0$.

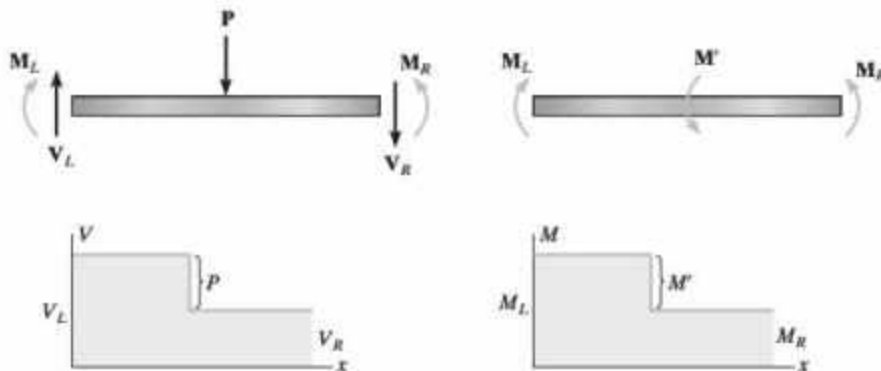
$$\Delta V = \int w(x) dx$$

Cambio en la fuerza cortante = { Área bajo el diagrama de carga distribuida

$$\Delta M = \int V(x) dx$$

Cambio en el momento = { Área bajo el diagrama de fuerza cortante

Una fuerza que actúa hacia abajo sobre la viga hará que el diagrama de fuerza cortante salte hacia abajo, y un momento de par en sentido contrario al de las manecillas del reloj hará que el diagrama de momento salte hacia abajo.



Empleando el método de superposición, los diagramas de momento para un elemento pueden representarse mediante una serie de formas más simples. Las formas representan el diagrama de momento para cada una de las cargas por separado. Entonces, el diagrama de momento resultante es la suma algebraica de los diagramas separados.



Este puente de arco parabólico sostiene la cubierta que comunica ambos extremos.

Cables y arcos

A menudo, los cables y arcos constituyen el elemento principal para soportar cargas en muchos tipos de estructuras, y en este capítulo se analizarán algunos de los aspectos más importantes relacionados con su análisis estructural. El capítulo comienza con un estudio general de los cables, seguido de un análisis de los cables sometidos a una carga concentrada y a una carga uniformemente distribuida. Como la mayoría de los arcos son estáticamente indeterminados, sólo se considerará el caso especial de un arco con tres articulaciones. El análisis de esta estructura ayuda a una mejor comprensión del comportamiento fundamental de todas las estructuras arqueadas.

5.1 Cables

En las obras de ingeniería con frecuencia se usan los cables para soportar y transmitir cargas de un elemento a otro. Cuando se utilizan para sostener techos colgantes, puentes colgantes y las ruedas de un carretón, los cables representan el elemento principal para soportar las cargas sobre la estructura. En el análisis de fuerzas de estos sistemas, se puede pasar por alto el peso del cable en sí; sin embargo, cuando los cables se usan como tensores para antenas de radio, líneas de transmisión eléctrica o torres de perforación, el peso del cable puede llegar a ser importante y debe incluirse en el análisis estructural. En las siguientes secciones se tendrán en cuenta dos casos: un cable sometido a cargas concentradas y un cable sujeto a una carga distribuida. Siempre que estas cargas sean coplanares con el cable, los requisitos para el equilibrio se formulan de manera idéntica.

Cuando se obtengan las relaciones necesarias entre la fuerza en el cable y su pendiente, se supondrá que el cable es *perfectamente flexible e inextensible*. Debido a su flexibilidad, el cable no ofrece resistencia a la fuerza cortante o a la flexión y, por lo tanto, la fuerza que actúa en el cable siempre es tangente a éste en los puntos ubicados en toda su longitud. Si es inextensible, el cable tiene una longitud constante, tanto antes como después de aplicar la carga. En consecuencia, una vez que se aplica la carga, la geometría del cable permanece fija y el cable, o un segmento de éste, puede tratarse como un cuerpo rígido.

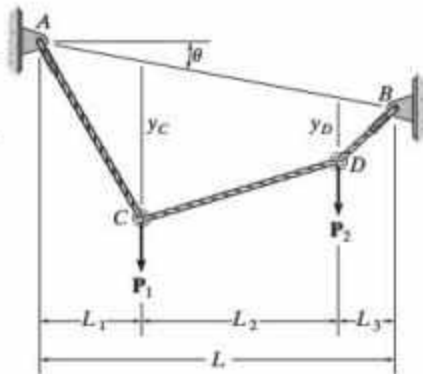


Figura 5-1



La cubierta de un puente atirantado se sostiene mediante una serie de cables conectados en varios puntos a lo largo de la cubierta y los pilones.

5.2 Cable sometido a cargas concentradas

Cuando un cable cuyo peso se puede pasar por alto soporta varias cargas concentradas, tiene la forma de varios segmentos de línea recta, cada uno de los cuales está sometido a una fuerza de tensión constante. Considere, por ejemplo, el cable que se muestra en la figura 5-1. Aquí θ especifica el ángulo de la cuerda del cable AB y L es el claro del cable. Si las distancias L_1 , L_2 y L_3 y las cargas P_1 y P_2 son conocidas, entonces el problema consiste en determinar las nueve incógnitas de que consta la tensión en cada uno de los tres segmentos, las cuatro componentes de la reacción en A y B , y las flechas y_C y y_D en los dos puntos C y D . Para la solución se pueden escribir dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada uno de los puntos A , B , C y D . Esto se traduce en un total de ocho ecuaciones. Para completar la solución, será necesario conocer algo acerca de la geometría del cable a fin de obtener la novena ecuación necesaria. Por ejemplo, si se especifica la longitud total del cable \mathcal{L} , entonces se usa el teorema de Pitágoras para relacionar \mathcal{L} con cada una de las tres longitudes de los segmentos, escrito en términos de θ , y_C , y_D , L_1 , L_2 y L_3 . Por desgracia, este tipo de problemas no puede resolverse con facilidad manualmente. Sin embargo, otra posibilidad consiste en especificar una de las flechas, y_C o y_D , en vez de la longitud del cable. De esta manera, las ecuaciones de equilibrio son suficientes para la obtención de las fuerzas desconocidas y la flecha restante. Una vez que se obtiene la flecha en cada punto, \mathcal{L} puede determinarse por trigonometría.

Al realizar un análisis de equilibrio para un problema de este tipo, las fuerzas en el cable también pueden obtenerse escribiendo las ecuaciones de equilibrio para todo el cable o cualquier porción del mismo. El siguiente ejemplo ilustra estos conceptos en forma numérica.

EJEMPLO 5.1

Determine la tensión en cada segmento del cable que se muestra en la figura 5-2a. Además, ¿cuál es el valor de la dimensión h ?

SOLUCIÓN

Por inspección, hay cuatro reacciones externas desconocidas (A_x , A_y , D_x y D_y) y tres tensiones desconocidas, una en cada segmento del cable. Estas siete incógnitas, junto con la flecha h pueden determinarse a partir de las ocho ecuaciones de equilibrio disponibles ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$) aplicadas a los puntos desde A hasta D .

Un método más directo para encontrar la solución es reconocer que la pendiente del cable CD está especificada; por ende, en la figura 5-2b se muestra un diagrama de cuerpo libre de todo el cable. La tensión en el segmento CD puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0;$$

$$T_{CD}(3/5)(2 \text{ m}) + T_{CD}(4/5)(5.5 \text{ m}) - 3 \text{ kN}(2 \text{ m}) - 8 \text{ kN}(4 \text{ m}) = 0$$

$$T_{CD} = 6.79 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Ahora es posible analizar de manera secuencial el equilibrio de los puntos C y D . Punto C (figura 5-2c);

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 6.79 \text{ kN}(3/5) - T_{BC} \cos \theta_{BC} = 0$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 6.79 \text{ kN}(4/5) - 8 \text{ kN} + T_{BC} \sin \theta_{BC} = 0$$

$$\theta_{BC} = 32.3^\circ \quad T_{BC} = 4.82 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Punto B (figura 5-2d):

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad -T_{BA} \cos \theta_{BA} + 4.82 \text{ kN} \cos 32.3^\circ = 0$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_{BA} \sin \theta_{BA} - 4.82 \text{ kN} \sin 32.3^\circ - 3 \text{ kN} = 0$$

$$\theta_{BA} = 53.8^\circ \quad T_{BA} = 6.90 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Por lo tanto, con base en la figura 5-2a,

$$h = (2 \text{ m}) \tan 53.8^\circ = 2.74 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

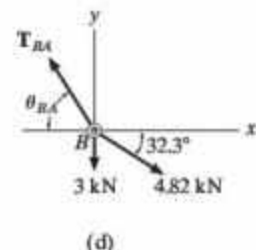
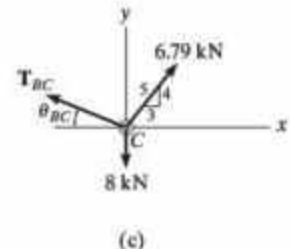
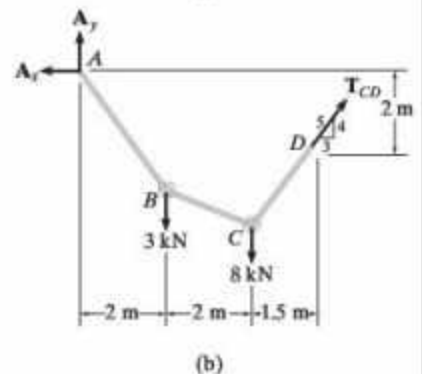
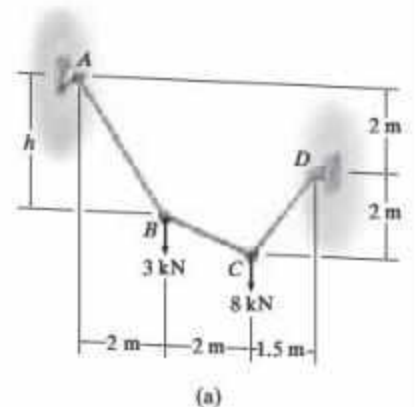


Figura 5-2

5.3 Cable sometido a una carga uniformemente distribuida

Los cables proporcionan un medio muy eficaz para soportar el peso muerto de las traveses o losas de puentes con claros muy amplios. Un puente colgante es un ejemplo típico, en el que la cubierta está suspendida del cable por medio de una serie de sujetadores cerrados espaciados de manera uniforme.

Para analizar este problema, primero se determinará la forma de un cable sometido a una carga vertical w_0 uniformemente distribuida de manera horizontal, figura 5-3a. Aquí, los ejes x y y tienen su origen en el punto más bajo del cable, de modo que en este punto la pendiente es cero. En la figura 5-3b se muestra el diagrama de cuerpo libre de un segmento pequeño del cable con una longitud Δs . Como la fuerza de tensión en el cable cambia continuamente, tanto en magnitud como en dirección a todo lo largo del cable, este cambio se indica en el diagrama de cuerpo libre con ΔT . La carga distribuida se representa por medio de su fuerza resultante $w_0 \Delta x$, la cual actúa en $\Delta x/2$ desde el punto O .

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio se obtiene

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & -T \cos \theta + (T + \Delta T) \cos(\theta + \Delta \theta) &= 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y &= 0; & -T \sin \theta - w_0(\Delta x) + (T + \Delta T) \sin(\theta + \Delta \theta) &= 0 \\ \downarrow + \Sigma M_O &= 0; & w_0(\Delta x)(\Delta x/2) - T \cos \theta \Delta y + T \sin \theta \Delta x &= 0 \end{aligned}$$

Si se divide cada una de estas ecuaciones entre Δx y se toma el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y, por ende, cuando $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta \theta \rightarrow 0$ y $\Delta T \rightarrow 0$, resulta

$$\frac{d(T \cos \theta)}{dx} = 0 \quad (5-1)$$

$$\frac{d(T \sin \theta)}{dx} = w_0 \quad (5-2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad (5-3)$$

Al integrar la ecuación 5-1, donde $T = F_H$ en $x = 0$, se tiene:

$$T \cos \theta = F_H \quad (5-4)$$

lo que indica que la componente horizontal de la fuerza en cualquier punto a lo largo del cable se mantiene constante.

Si se integra la ecuación 5-2, teniendo en cuenta que $T \sin \theta = 0$ en $x = 0$, resulta

$$T \sin \theta = w_0 x \quad (5-5)$$

Al dividir la ecuación 5-5 entre la ecuación 5-4 se elimina T . Luego, usando la ecuación 5-3, es posible obtener la pendiente en cualquier punto,

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0 x}{F_H} \quad (5-6)$$

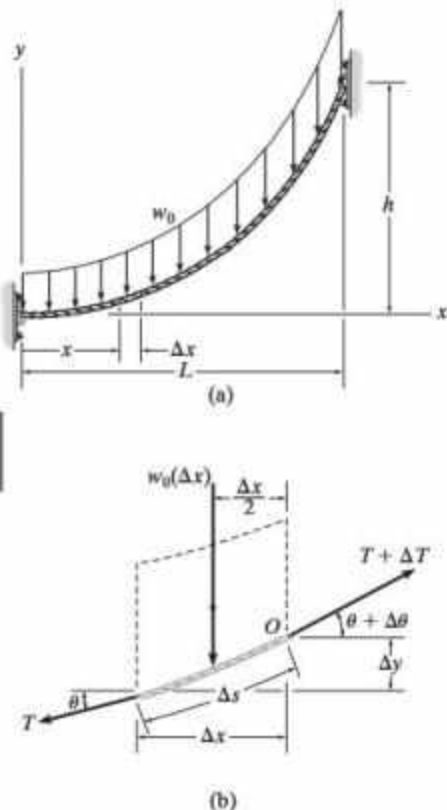


Figura 5-3

Si se integra por segunda vez con $y = 0$ en $x = 0$ se obtiene

$$y = \frac{w_0}{2F_H} x^2 \quad (5-7)$$

Ésta es la ecuación de una *parábola*. La constante F_H puede obtenerse mediante el uso de la condición de frontera $y = h$ en $x = L$. Por lo tanto,

$$F_H = \frac{w_0 L^2}{2h} \quad (5-8)$$

Finalmente, al sustituir en la ecuación 5-7 resulta

$$y = \frac{h}{L^2} x^2 \quad (5-9)$$

De la ecuación 5-4, la tensión máxima en el cable ocurre cuando θ es máxima; es decir, en $x = L$. Por lo tanto, a partir de las ecuaciones 5-4 y 5-5,

$$T_{\text{máx}} = \sqrt{F_H^2 + (w_0 L)^2} \quad (5-10)$$

O bien, con base en la ecuación 5.8 es posible expresar $T_{\text{máx}}$ en términos de w_0 , es decir,

$$T_{\text{máx}} = w_0 L \sqrt{1 + (L/2h)^2} \quad (5-11)$$

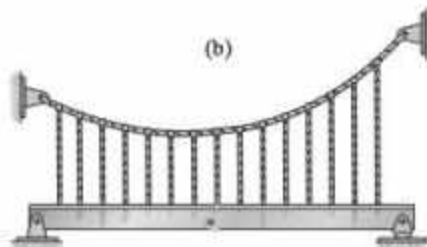
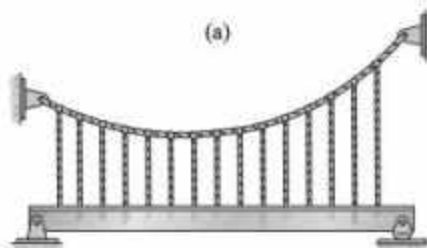
Observe que se ha ignorado el peso del cable, el cual es *uniforme* en toda la *longitud* del cable y no a lo largo de su proyección horizontal. En realidad, un cable sometido a su propio peso y libre de cualesquier otras cargas tomará la forma de una curva *catenaria*. Sin embargo, si la relación de flecha sobre claro es pequeña, como en el caso de la mayoría de las aplicaciones estructurales, esta curva se aproxima a una forma parabólica, como se determinó aquí.

Con base en los resultados de este análisis, se deduce que un cable *mantendrá una forma parabólica* siempre que la carga muerta de la cubierta para un puente colgante o una trabe de suspensión se *distribuya uniformemente* en toda la longitud proyectada horizontal del cable. Por lo tanto, si la trabe de la figura 5-4a se sostiene mediante una serie de ganchos, que están cerrados y uniformemente espaciados, la carga en cada gancho debe ser *la misma* para que pueda asegurarse que el cable tiene una forma parabólica.

Si se usa este supuesto, es posible realizar el análisis estructural de la trabe o de cualquier otra estructura que esté suspendida libremente del cable. En particular, si la trabe está simplemente apoyada, así como sostenida por el cable, el análisis será estáticamente indeterminado de primer grado, figura 5-4b. Sin embargo, si la trabe tiene un pasador interno en algún punto intermedio de toda su longitud, figura 5-4c, ésta sería una condición de momento cero y, por lo tanto, sería posible realizar un análisis estructural determinado de la trabe.



El puente Verrazano-Narrows en la entrada al puerto de Nueva York cuenta con un claro principal de 4260 pies (1.30 km).

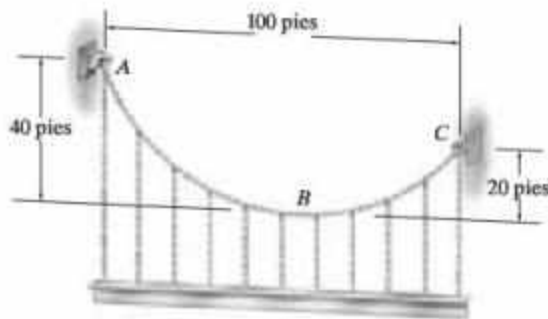


(c)

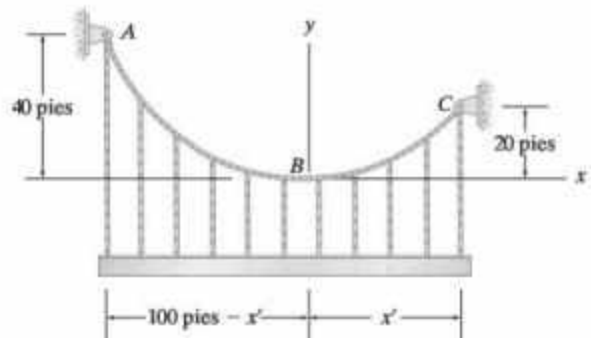
Figura 5-4

EJEMPLO 5.2

El cable de la figura 5-5a sostiene una trabe que pesa 850 lb/pie. Determine la tensión en el cable en los puntos A, B y C.



(a)



(b)

Figura 5-5

SOLUCIÓN

El origen de los ejes coordenados se establece en el punto B, el punto más bajo del cable, donde la pendiente es cero, figura 5-5d. A partir de la ecuación 5-7, la ecuación parabólica del cable es:

$$y = \frac{w_0}{2F_H} x^2 = \frac{850 \text{ lb/pie}}{2F_H} x^2 = \frac{425}{F_H} x^2 \quad (1)$$

Suponiendo que el punto C se encuentra a x' de B, se tiene

$$\begin{aligned} 20 &= \frac{425}{F_H} x'^2 \\ F_H &= 21.25 x'^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Además, para el punto A,

$$\begin{aligned} 40 &= \frac{425}{F_H} [-(100 - x')]^2 \\ 40 &= \frac{425}{21.25 x'^2} [-(100 - x')]^2 \\ x'^2 + 200x' - 10\,000 &= 0 \\ x' &= 41.42 \text{ pies} \end{aligned}$$

Por lo tanto, con base en las ecuaciones 2 y 1 (o la ecuación 5-6) se tiene

$$F_H = 21.25(41.42)^2 = 36\,459.2 \text{ lb}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{850}{36\,459.2}x = 0.02331x \quad (3)$$

En el punto A,

$$x = -(100 - 41.42) = -58.58 \text{ pies}$$

$$\tan \theta_A = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-58.58} = 0.02331(-58.58) = -1.366$$

$$\theta_A = -53.79^\circ$$

Usando la ecuación 5-4,

$$T_A = \frac{F_H}{\cos \theta_A} = \frac{36\,459.2}{\cos(-53.79^\circ)} = 61.7 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

En el punto B, $x = 0$,

$$\tan \theta_B = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \theta_B = 0^\circ$$

$$T_B = \frac{F_H}{\cos \theta_B} = \frac{36\,459.2}{\cos 0^\circ} = 36.5 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

En el punto C,

$$x = 41.42 \text{ pies}$$

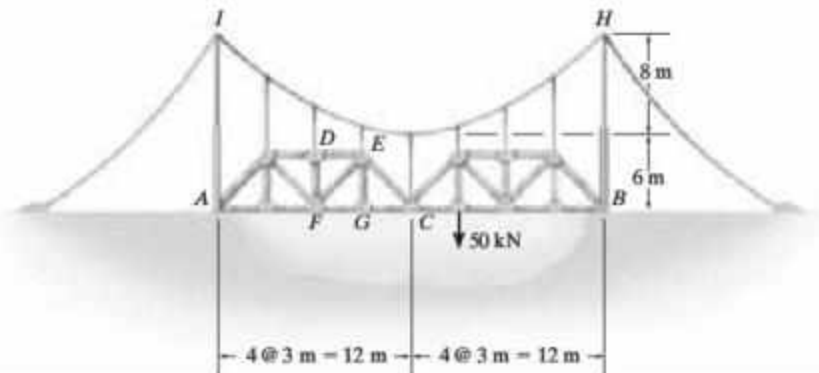
$$\tan \theta_C = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=41.42} = 0.02331(41.42) = 0.9657$$

$$\theta_C = 44.0^\circ$$

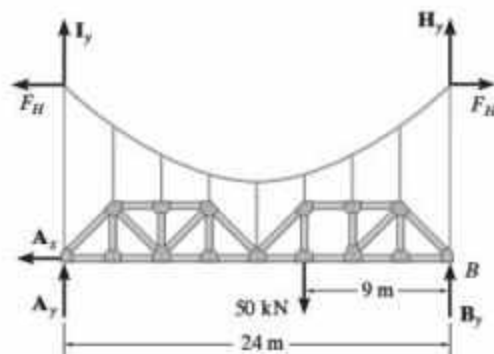
$$T_C = \frac{F_H}{\cos \theta_C} = \frac{36\,459.2}{\cos 44.0^\circ} = 50.7 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 5.3

El puente colgante de la figura 5-6a se construyó usando dos armaduras de rigidez que están conectadas en sus extremos mediante un pasador en *C*, y se sostienen mediante un pasador en *A* y un oscilador en *B*. Determine la tensión máxima en el cable *IH*. El cable tiene una forma parabólica y el puente está sometido a una sola carga de 50 kN.



(a)



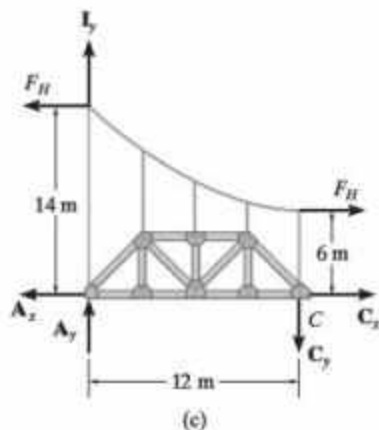
(b)

Figura 5-6**SOLUCIÓN**

En la figura 5-6b se muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema cable-armadura. De acuerdo con la ecuación 5-4 ($T \cos \theta = F_H$), la componente horizontal de la tensión del cable en *I* y *H* debe ser constante, F_H . Si se toman los momentos con respecto a *B*, se tiene

$$\sum M_B = 0; \quad -I_y(24 \text{ m}) - A_y(24 \text{ m}) + 50 \text{ kN}(9 \text{ m}) = 0$$

$$I_y + A_y = 18.75$$



Si se considera sólo la mitad de la estructura suspendida, figura 5-6c, entonces al sumar los momentos con respecto al pasador en C, se obtiene

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad F_H(14 \text{ m}) - F_H(6 \text{ m}) - I_y(12 \text{ m}) - A_y(12 \text{ m}) = 0$$

$$I_y + A_y = 0.667 F_H$$

A partir de estas dos ecuaciones,

$$18.75 = 0.667 F_H$$

$$F_H = 28.125 \text{ kN}$$

Para obtener la tensión máxima en el cable se utilizará la ecuación 5-11, pero primero es necesario determinar, con base en la ecuación 5-8, el valor de una carga w_0 que se supone uniformemente distribuida:

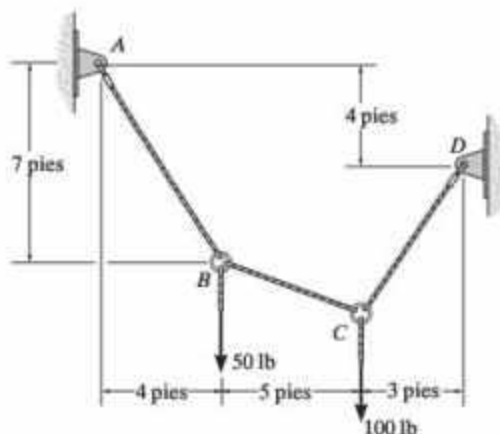
$$w_0 = \frac{2 F_H h}{L^2} = \frac{2(28.125 \text{ kN})(8 \text{ m})}{(12 \text{ m})^2} = 3.125 \text{ kN/m}$$

Por lo tanto, usando la ecuación 5-11, se tiene

$$\begin{aligned} T_{\max} &= w_0 L \sqrt{1 + (L/2h)^2} \\ &= 3.125(12 \text{ m}) \sqrt{1 + (12 \text{ m}/2(8 \text{ m}))^2} \\ &= 46.9 \text{ kN} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

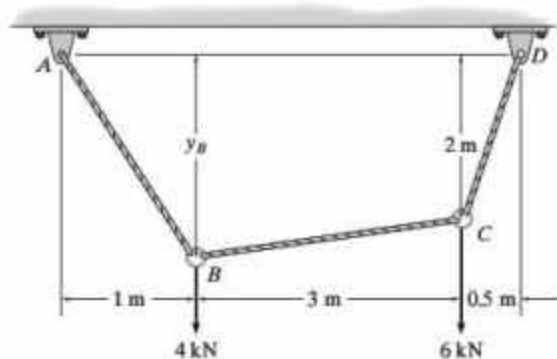
PROBLEMAS

5-1. Determine la tensión en cada segmento del cable y la longitud total de éste.



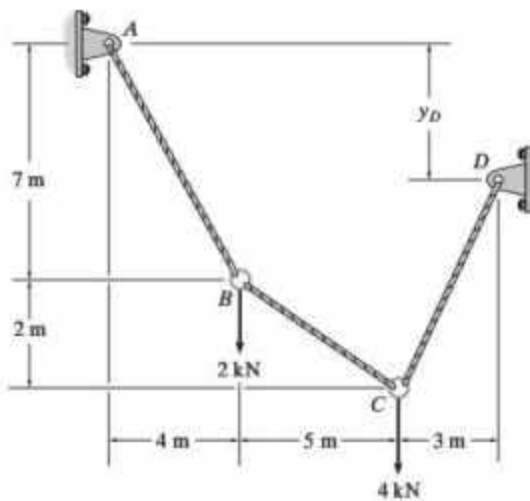
Prob. 5-1

5-2. El cable $ABCD$ soporta la carga mostrada. Determine la tensión máxima en el cable y la flecha del punto B .



Prob. 5-2

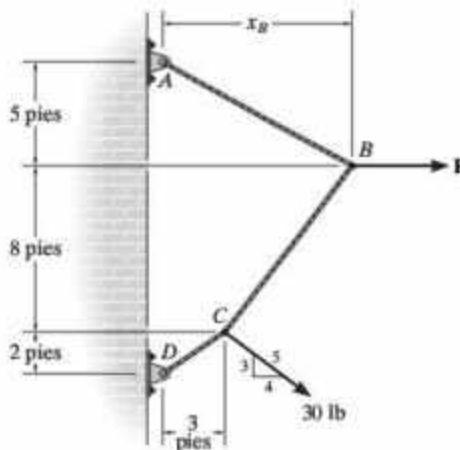
5-3. Determine la tensión en cada segmento de cable y la distancia y_D .



Prob. 5-3

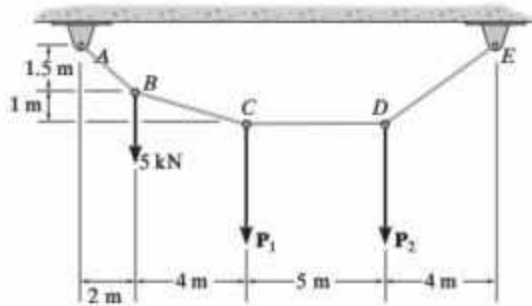
***5-4.** El cable soporta la carga mostrada. Determine la distancia x_B , medida desde A , a la cual actúa la fuerza en el punto B . Considere que $P = 40$ lb.

5-5. El cable soporta la carga mostrada. Determine la magnitud de la fuerza horizontal P de manera que $x_B = 6$ pies.



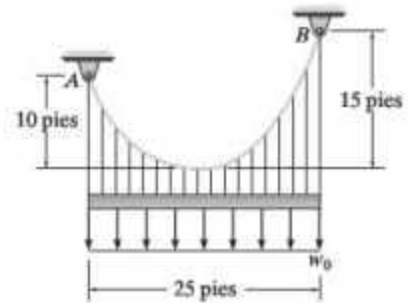
Probs. 5-4/5-5

5-6. Determine las fuerzas P_1 y P_2 necesarias para mantener al cable en la posición indicada, es decir, de modo que el segmento CD se mantenga horizontal. También encuentre la carga máxima en el cable.



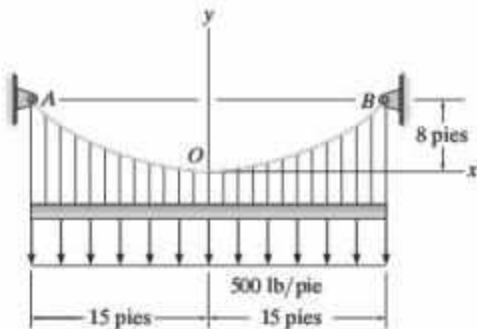
Prob. 5-6

***5-8.** El cable soporta la carga uniforme de $w_0 = 600$ lb/pie. Determine la tensión en el cable en cada soporte (apoyo) A y B.



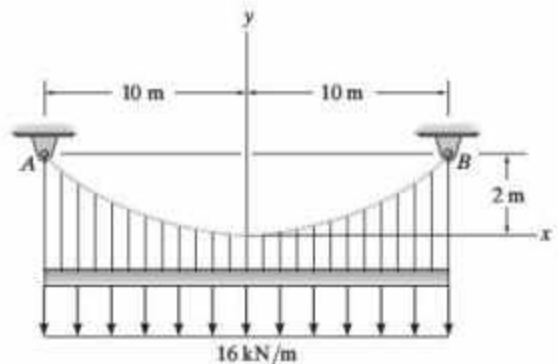
Prob. 5-8

5-7. El cable está sometido a la carga uniforme. Si la pendiente del cable en el punto O es igual a cero, determine la ecuación de la curva y la fuerza en el cable en los puntos O y B.



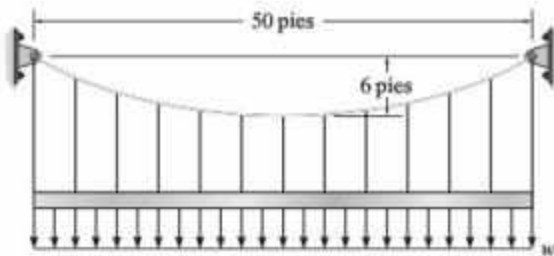
Prob. 5-7

5-9. Determine la tensión máxima y mínima en el cable.



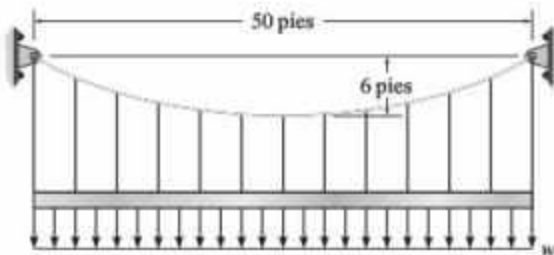
Prob. 5-9

5-10. Determine la carga uniforme w máxima, medida en lb/pie, que puede soportar el cable si es capaz de sostener una tensión máxima de 3000 lb antes de romperse.



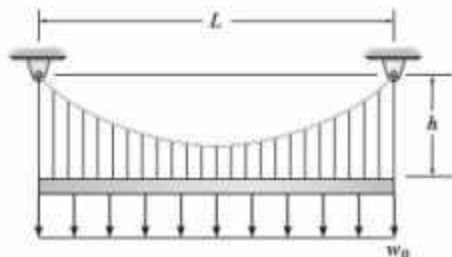
Prob. 5-10

5-11. El cable está sometido a una carga uniforme $w = 250$ lb/pie. Determine la tensión máxima y mínima en el cable.



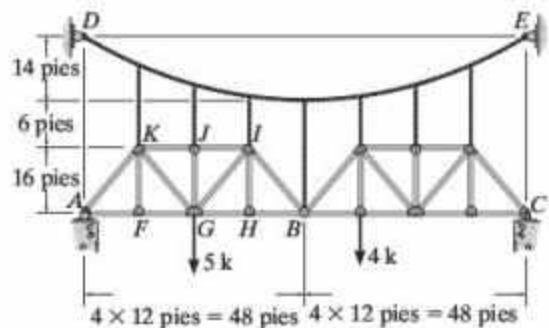
Prob. 5-11

***5-12.** El cable que se muestra en la figura está sometido a la carga uniforme w_0 . Determine la relación entre la elevación h y el claro L que se traducirá en el uso de la cantidad mínima de material para el cable.



Prob. 5-12

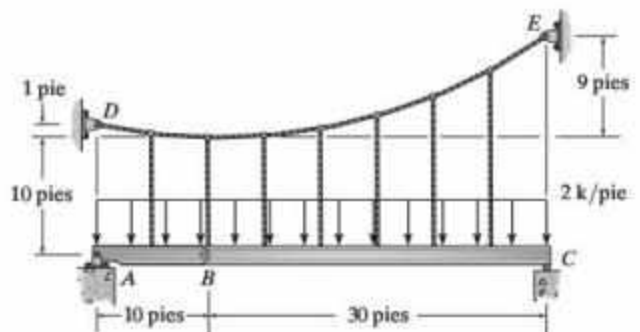
5-13. Las armaduras están articuladas y cuelgan del cable parabólico. Determine la fuerza máxima en el cable cuando la estructura se somete a la carga que se muestra.



Prob. 5-13

5-14. Determine la tensión máxima y mínima en el cable parabólico y la fuerza en cada uno de los ganchos. La trabe está sometida a una carga uniforme y se conecta mediante un pasador en B.

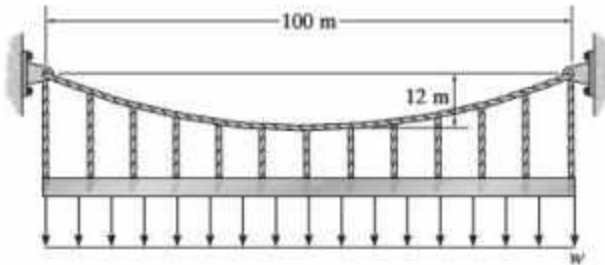
5-15. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para las traveses articuladas AB y BC. El cable tiene una forma parabólica.



Probs. 5-14/5-15

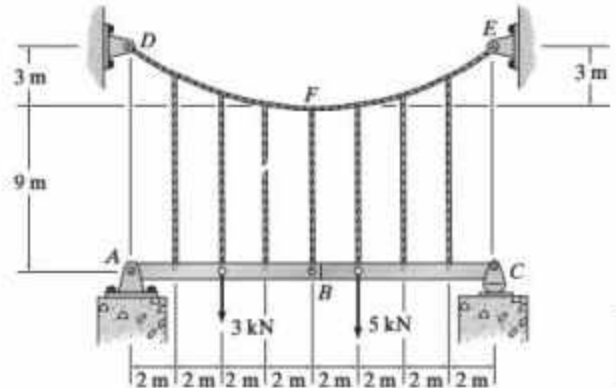
***5-16.** El cable se romperá cuando la tensión máxima alcance $T_{\max} = 5000 \text{ kN}$. Determine la carga uniformemente distribuida w máxima necesaria para desarrollar esta tensión máxima.

5-17. El cable está sometido a una carga uniforme de $w = 60 \text{ kN/m}$. Determine la tensión máxima y mínima en el cable.



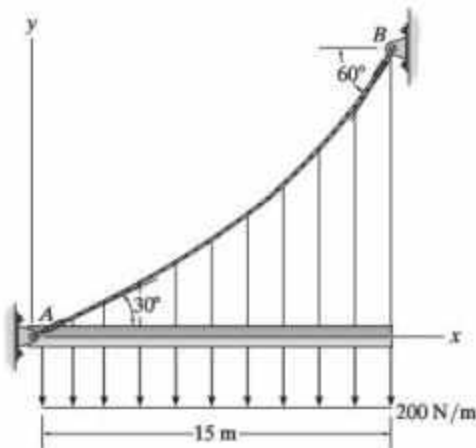
Probs. 5-16/5-17

5-19. Las vigas AB y BC se sostienen mediante el cable que tiene una forma parabólica. Determine la tensión en el cable en los puntos D , F y E , así como la fuerza en cada uno de los sujetadores igualmente espaciados.



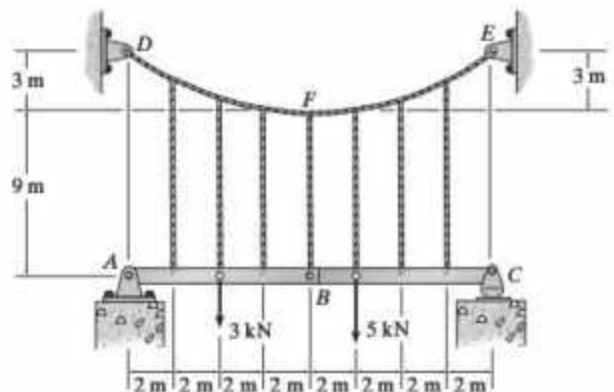
Prob. 5-19

5-18. El cable AB está sometido a una carga uniforme de 200 N/m . Si se pasa por alto el peso del cable y los ángulos de la pendiente en los puntos A y B son 30° y 60° , respectivamente, determine la curva que define la forma del cable y la tensión máxima desarrollada en el cable.



Prob. 5-18

***5-20.** Dibuje los diagramas de cortante y de momento para las vigas AB y BC . El cable tiene una forma parabólica.



Prob. 5-20

5.4 Arcos

Al igual que los cables, los arcos pueden usarse para reducir los momentos de flexión en las estructuras con claros amplios. En esencia, un arco funciona como un cable invertido, por lo que generalmente recibe carga en compresión; aunque, debido a su rigidez, también debe resistir algunas fuerzas de flexión y de cortante dependiendo de cómo esté cargado y cuál sea su forma. En particular, si el arco tiene una *forma parabólica* y se somete a una carga vertical *uniformemente* distribuida de manera horizontal, entonces a partir del análisis de los cables se deduce que el arco *sólo resistirá fuerzas de compresión*. En estas condiciones, la forma de arco se denomina *arco funicular*, porque dentro de él no se producen fuerzas de flexión ni fuerzas cortantes.

En la figura 5-7 se muestra un arco típico, que especifica alguna de la nomenclatura que se usa para definir su geometría. Dependiendo de la aplicación, pueden seleccionarse varios tipos de arcos para soportar una carga. Un *arco fijo*, figura 5-8a, suele hacerse de concreto reforzado. Aunque su construcción puede requerir menos material que la de otros tipos de arcos, debe tener pilas de cimentación sólidas, puesto que es indeterminado de tercer grado y, en consecuencia, pueden introducirse tensiones adicionales al arco, debido al asentamiento relativo de sus soportes. Un *arco de dos articulaciones*, figura 5-8b, se hace comúnmente de metal o de madera. Es indeterminado de primer grado y, aunque no es tan rígido como un arco fijo, es algo insensible al asentamiento. Esta estructura podría hacerse estáticamente determinada al sustituir una de las articulaciones por un rodillo. Sin embargo, al hacerlo de esta manera se elimina la capacidad de la estructura para resistir la flexión a lo largo de su claro y, por ende, serviría como una viga curva y *no* como un arco. Un *arco de tres articulaciones*, figura 5-8c, que también se hace de metal o de madera, es estáticamente determinado. A diferencia de los arcos estáticamente indeterminados, no le afectan los cambios en el asentamiento o la temperatura. Por último, si se van a construir arcos de dos y tres articulaciones sin requerir grandes pilas de cimentación y si el espaciamiento no es un problema, entonces los soportes pueden conectarse mediante un tirante, figura 5-8d. Un *arco atirantado* permite que la estructura se comporte como una unidad rígida, puesto que el tirante soporta la componente horizontal del empuje en los soportes. Además, tampoco le afecta el asentamiento relativo de los soportes.

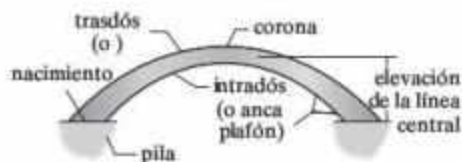
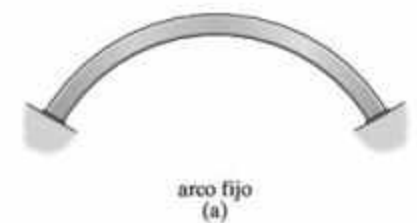


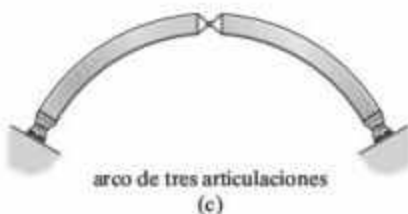
Figura 5-7



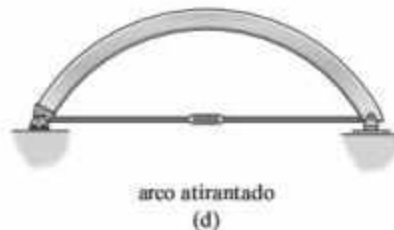
arco fijo
(a)



arco de dos articulaciones
(b)



arco de tres articulaciones
(c)



arco atirantado
(d)

Figura 5-8

5.5 Arco de tres articulaciones

Con el fin de obtener una idea de la forma en que los arcos transmiten las cargas, a continuación se considerará el análisis de un arco de tres articulaciones, como el que se muestra en la figura 5-9a. En este caso, la tercera articulación se encuentra en la corona y los soportes (o apoyos) están a diferentes alturas. Si se desea determinar las reacciones en los soportes, el arco debe desmontarse para después hacer el diagrama de cuerpo libre de cada elemento, como se muestra en la figura 5-9b. Aquí hay seis incógnitas para las cuales hay disponibles seis ecuaciones de equilibrio. Un método para la solución de este problema consiste en aplicar las ecuaciones de equilibrio de momentos respecto a los puntos A y B . La solución simultánea producirá las reacciones C_x y C_y . Luego, las reacciones en los soportes se determinan a partir de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas. Una vez obtenidas estas reacciones, es posible determinar las fuerzas normal y cortante internas, así como las cargas de momento en cualquier punto del arco siguiendo el método de las secciones. Aquí, por supuesto, la sección se debe tomar perpendicular al eje del arco en el punto considerado. Por ejemplo, en la figura 5-9c se muestra el diagrama de cuerpo libre para el segmento AD .

Los arcos de tres articulaciones también pueden tomar la forma de dos armaduras articuladas, cada una de las cuales reemplazaría a las costillas del arco AC y CB en la figura 5-9a. El análisis de esta forma sigue el mismo procedimiento descrito anteriormente. Los siguientes ejemplos ilustran estos conceptos en forma numérica.



(a)



(b)

El arco de armaduras de tres articulaciones se utiliza para soportar una parte de la carga del techo de este edificio (a). El acercamiento muestra que el arco está articulado en su parte superior (b).

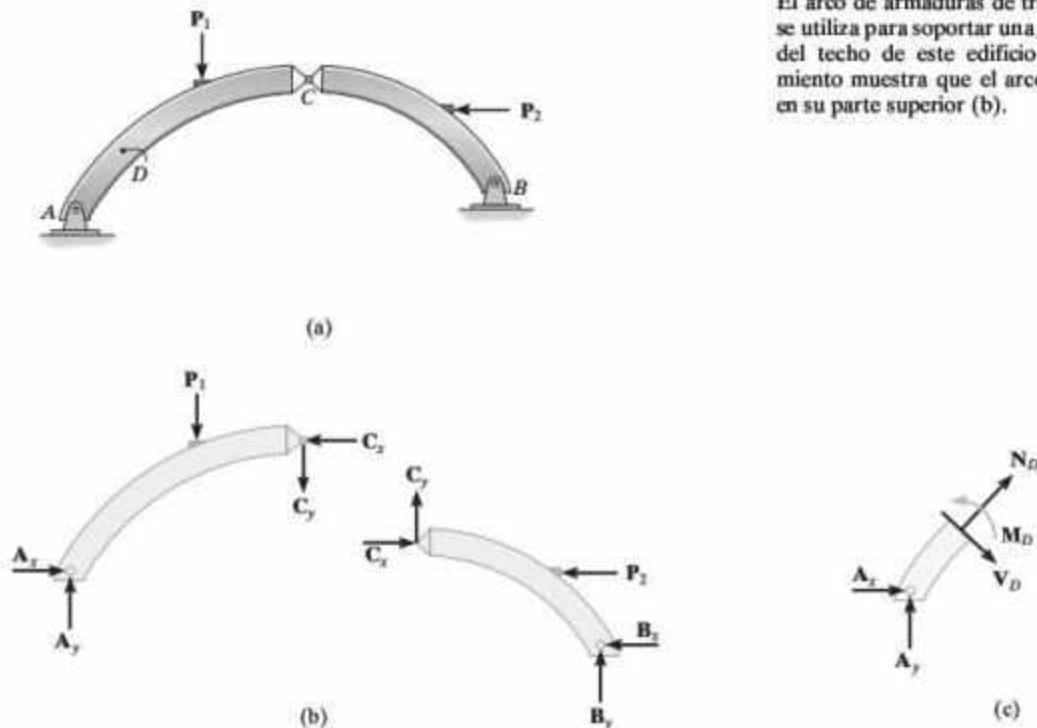


Figura 5-9

EJEMPLO 5.4



El puente de arco con enjuta abierta y tres articulaciones, como el que se muestra en la fotografía tiene una forma parabólica. Si este arco debe soportar una carga uniforme y tiene las dimensiones indicadas en la figura 5-10a, demuestre que el arco está sometido *sólo a compresión axial* en un punto intermedio como el punto *D*. Suponga que la carga se transmite uniformemente a las costillas del arco.

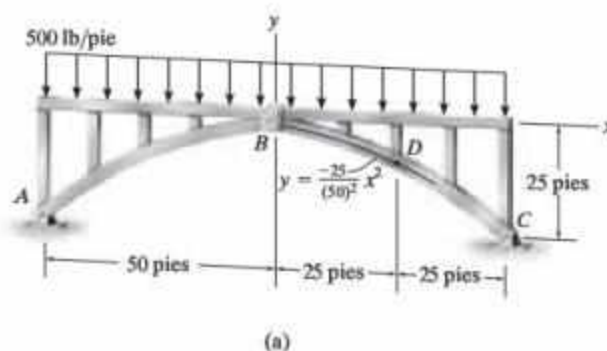
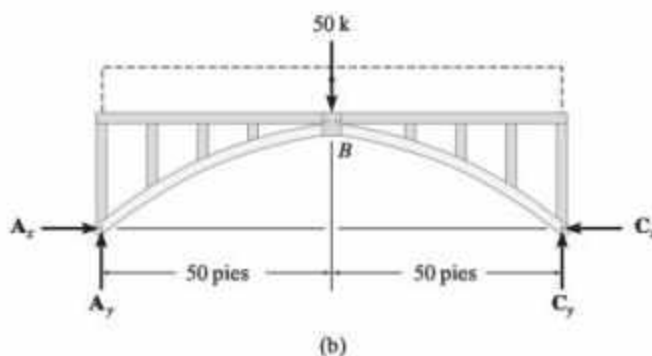


Figura 5-10

SOLUCIÓN

Aquí los apoyos (soportes) están a la misma altura. Los diagramas de cuerpo libre de todo el arco y de la parte *BC* se muestran en las figuras 5-10b y 5-10c. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene:



Arco completo:

$$\downarrow + \sum M_A = 0; \quad C_y(100 \text{ pies}) - 50 \text{ k}(50 \text{ pies}) = 0$$

$$C_y = 25 \text{ k}$$

Segmento BC del arco:

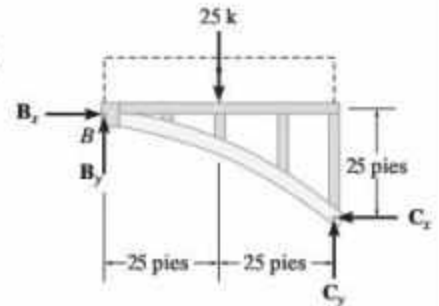
$$\downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad -25 \text{ k}(25 \text{ pies}) + 25 \text{ k}(50 \text{ pies}) - C_x(25 \text{ pies}) = 0$$

$$C_x = 25 \text{ k}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad B_x = 25 \text{ k}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad B_y - 25 \text{ k} + 25 \text{ k} = 0$$

$$B_y = 0$$



(c)

Una sección del arco tomada a través del punto D , $x = 25$ pies, $y = -25(25)^2/(50)^2 = -6.25$ pies, se muestra en la figura 5-10d. La pendiente del segmento en D es

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{-50}{(50)^2} x \bigg|_{x=25 \text{ pies}} = -0.5$$

$$\theta = -26.6^\circ$$

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, figura 5-10d, se tiene

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 25 \text{ k} - N_D \cos 26.6^\circ - V_D \sin 26.6^\circ = 0$$

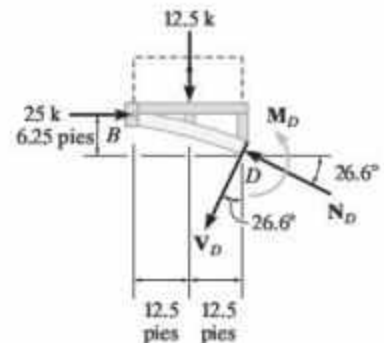
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -12.5 \text{ k} + N_D \sin 26.6^\circ - V_D \cos 26.6^\circ = 0$$

$$\downarrow + \Sigma M_D = 0; \quad M_D + 12.5 \text{ k}(12.5 \text{ pies}) - 25 \text{ k}(6.25 \text{ pies}) = 0$$

$$N_D = 28.0 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

$$V_D = 0 \quad \text{Resp.}$$

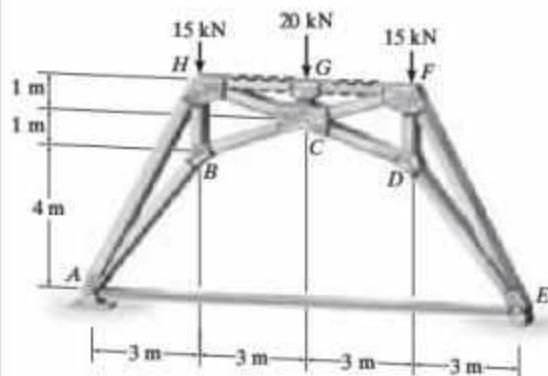
$$M_D = 0 \quad \text{Resp.}$$



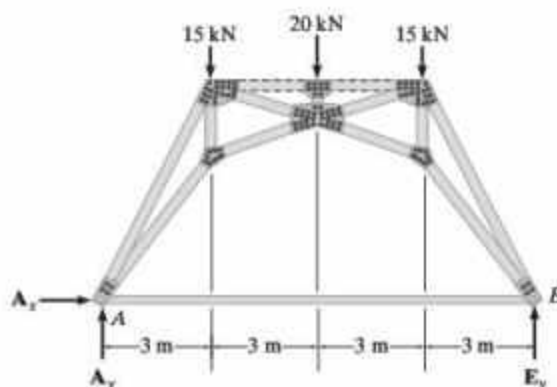
Nota: Si el arco tuviera una forma diferente o si la carga no fuera uniforme, entonces la fuerza cortante y el momento internos serían nulos. Además, si se usara una viga simplemente apoyada para soportar la carga distribuida, tendría que resistir un momento flexionante máximo de $M = 625 \text{ k} \cdot \text{pie}$. Por comparación, es más eficiente resistir estructuralmente la carga en compresión directa (aunque debe considerarse la posibilidad de pandeo) que resistir la carga debida a un momento flexionante.

EJEMPLO 5.5

El arco atirantado de tres articulaciones está sometido a la carga que se muestra en la figura 5-11a. Determine la fuerza en los elementos *CH* y *CB*. El elemento *GF*, trazado con líneas discontinuas en la armadura, está destinado a no soportar fuerza alguna.



(a)

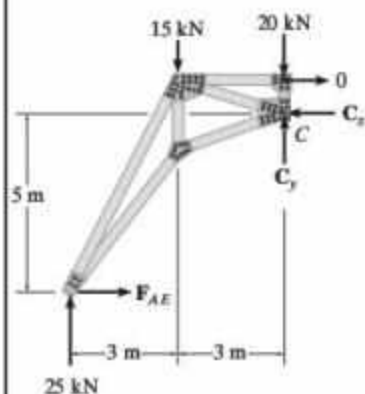


(b)

Figura 5-11

SOLUCIÓN

Las reacciones en los soportes pueden obtenerse de un diagrama de cuerpo libre de todo el arco, figura 5-11b:



(c)

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad E_y(12 \text{ m}) - 15 \text{ kN}(3 \text{ m}) - 20 \text{ kN}(6 \text{ m}) - 15 \text{ kN}(9 \text{ m}) = 0$$

$$E_y = 25 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 15 \text{ kN} - 20 \text{ kN} - 15 \text{ kN} + 25 \text{ kN} = 0$$

$$A_y = 25 \text{ kN}$$

Las componentes de fuerza que actúan en la junta *C* pueden determinarse considerando el diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda del arco, figura 5-11c. Primero, determine la fuerza:

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad F_{AE}(5 \text{ m}) - 25 \text{ kN}(6 \text{ m}) + 15 \text{ kN}(3 \text{ m}) = 0$$

$$F_{AE} = 21.0 \text{ kN}$$

Entonces,

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad -C_x + 21.0 \text{ kN} = 0, \quad C_x = 21.0 \text{ kN}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 25 \text{ kN} - 15 \text{ kN} - 20 \text{ kN} + C_y = 0, \quad C_y = 10 \text{ kN}$$

Para obtener las fuerzas en CH y CB , puede usarse el método de las juntas de la siguiente manera:

Junta G ; figura 5-11d,

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{GC} - 20 \text{ kN} = 0$$

$$F_{GC} = 20 \text{ kN (C)}$$

Junta C ; figura 5-11e,

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{CB}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - 21.0 \text{ kN} - F_{CH}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 0$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{CB}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + F_{CH}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) - 20 \text{ kN} + 10 \text{ kN} = 0$$

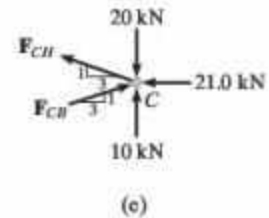
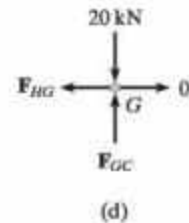
Por lo tanto,

$$F_{CB} = 26.9 \text{ kN (C)}$$

Resp.

$$F_{CH} = 4.74 \text{ kN (T)}$$

Resp.



Nota: En ocasiones, los arcos atirantados se emplean en puentes. Aquí la cubierta está sostenida por barras de suspensión que transmiten su carga al arco. La cubierta está en tensión, de modo que soporta el empuje real o la fuerza horizontal en los extremos del arco.

EJEMPLO 5.6

El arco de armadura de tres articulaciones que se muestra en la figura 5-12a soporta la carga simétrica. Determine la altura h_1 requerida para las juntas B y D , de modo que el arco tenga una forma funicular. El elemento HG está destinado a no soportar fuerza alguna.

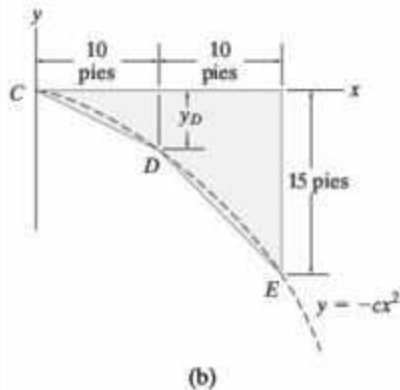
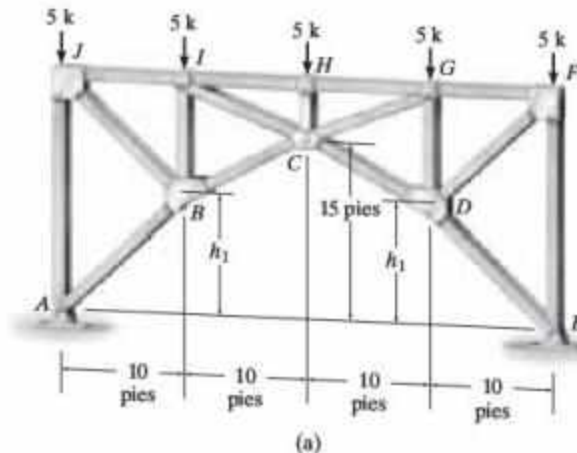


Figura 5-12

SOLUCIÓN

Para una carga simétrica, la forma funicular del arco debe ser *parabólica* como lo indica la línea discontinua (figura 5-12b). Aquí debemos encontrar la ecuación que se ajusta a esta forma. Si los ejes x y y tienen su origen en C , la ecuación es de la forma $y = -cx^2$. Para obtener la constante c , se requiere

$$\begin{aligned} -(15 \text{ pies}) &= -c(20 \text{ pies})^2 \\ c &= 0.0375/\text{pie} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y_D = -(0.0375/\text{pie})(10 \text{ pies})^2 = -3.75 \text{ pies}$$

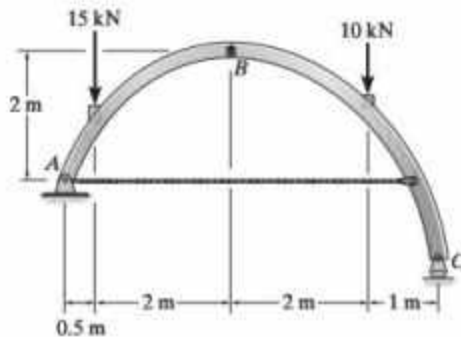
Así que a partir de la figura 5-12a,

$$h_1 = 15 \text{ pies} - 3.75 \text{ pies} = 11.25 \text{ pies} \quad \text{Resp.}$$

Aprovechando este valor, si ahora se aplica el método de los nudos a la armadura, los resultados muestran que la cuerda de la parte superior y todos los elementos de la diagonal serán elementos de fuerza cero, y la carga simétrica será soportada sólo por los elementos AB , BC , CD y DE de la cuerda inferior de la armadura.

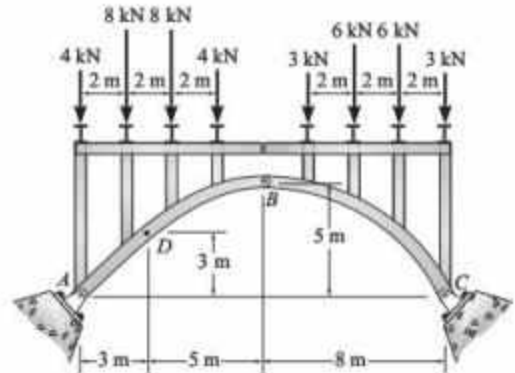
PROBLEMAS

5-21. El arco atirantado de tres articulaciones está sometido a las cargas indicadas. Determine las componentes de la reacción en A y C , así como la tensión en el cable.



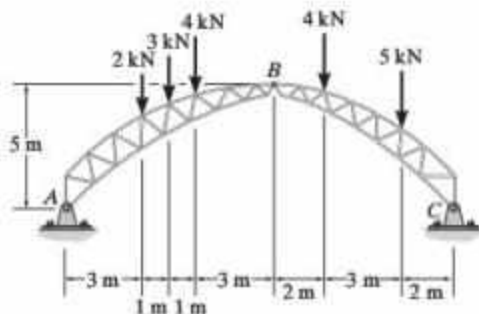
Prob. 5-21

5-23. El arco de enjuta con tres articulaciones está sometido a las cargas indicadas. Determine el momento interno en el arco en el punto D .



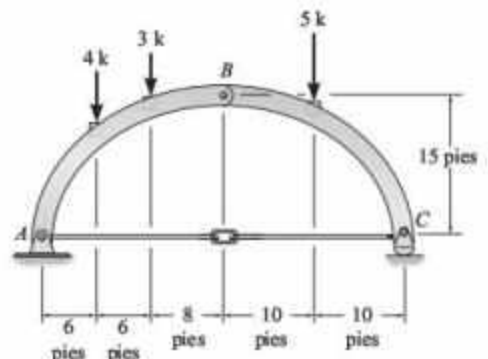
Prob. 5-23

5-22. Determine las fuerzas resultantes en los pasadores A , B y C de la armadura de techo arqueada y de tres articulaciones.



Prob. 5-22

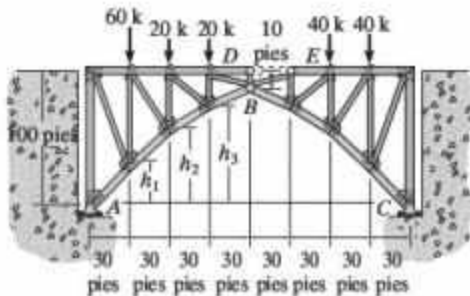
***5-24.** El arco atirantado de tres articulaciones está sometido a las cargas indicadas. Determine las componentes de la reacción en A y C , así como la tensión en la barra.



Prob. 5-24

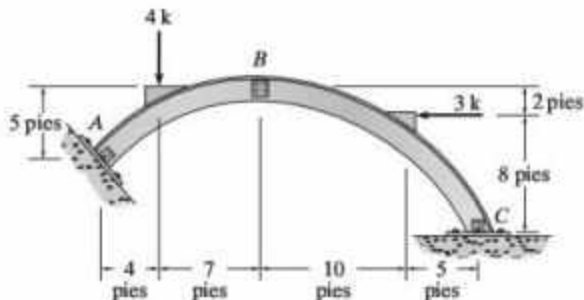
5-25. El puente está construido como un *arco atirantado de tres articulaciones*. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en las articulaciones (pasadores) A , B y C . El elemento DE trazado con líneas discontinuas está destinado a *no soportar fuerza alguna*.

5-26. Determine las alturas de diseño h_1 , h_2 y h_3 de la cuerda inferior de la armadura, de modo que el arco de tres articulaciones responda como un arco funicular.



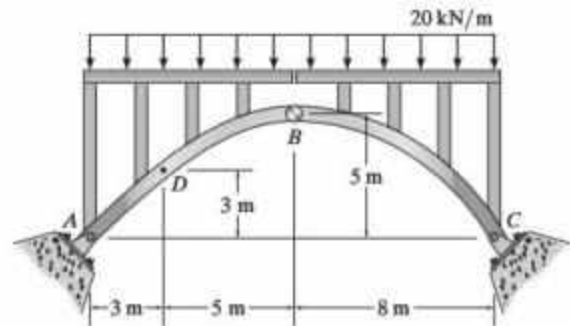
Probs. 5-25/5-26

5-27. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en los puntos A , B y C del arco de tres articulaciones. Suponga que A , B y C están conectados mediante un pasador.



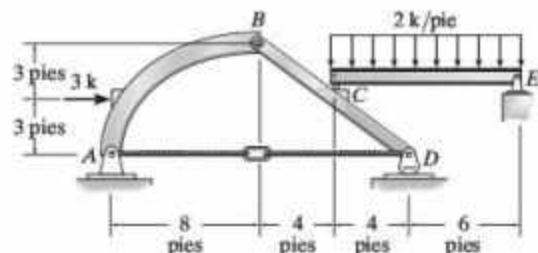
Prob. 5-27

***5-28.** El arco de enjuta de tres articulaciones está sometido a la carga uniforme de 20 kN/m . Determine el momento interno en el arco en el punto D .



Prob. 5-28

5-29. La estructura arqueada está sometida a la carga que se muestra en la figura. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en A y D , así como la tensión en la barra AD .

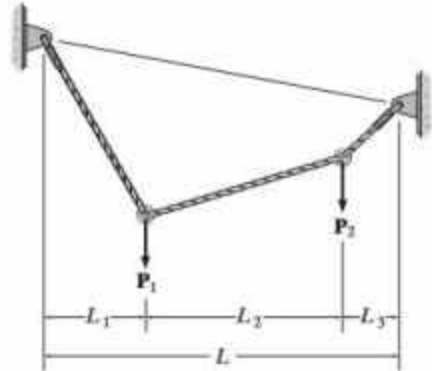


Prob. 5-29

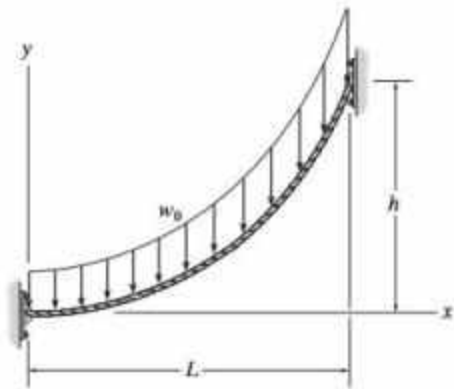
REPASO DEL CAPÍTULO

Los cables soportan sus cargas en tensión si se les considera perfectamente flexibles.

Si el cable está sometido a cargas concentradas, entonces la fuerza que actúa en cada segmento de cable se determina mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre de los grupos de segmentos del cable o a las juntas donde se aplican las fuerzas.



Si el cable soporta una carga uniforme a lo largo de una distancia horizontal proyectada, entonces el cable toma la forma de una parábola.



Los arcos están diseñados primordialmente para soportar una fuerza de compresión. Para soportar una carga uniformemente distribuida sobre su proyección horizontal se requiere una forma parabólica.

Los arcos de tres articulaciones son estáticamente determinados y pueden analizarse separando los dos elementos para después aplicar las ecuaciones de equilibrio a cada elemento.



arco de tres articulaciones



Al diseñar los elementos de este puente deben tenerse en cuenta las cargas móviles causadas por los trenes. Las líneas de influencia para los elementos forman parte importante del análisis estructural.

Líneas de influencia para estructuras estáticamente determinadas

Las líneas de influencia tienen una aplicación importante en el diseño de las estructuras que resisten grandes cargas vivas. En este capítulo se estudiará cómo dibujar la línea de influencia para una estructura estáticamente determinada. La teoría se aplica a estructuras que están sometidas a una carga distribuida o a una serie de fuerzas concentradas; asimismo, se presentan aplicaciones específicas para vigas de piso y vigas de puente. Al final del capítulo se analizan la determinación de la fuerza cortante viva y el momento máximos absolutos en un elemento.

6.1 Líneas de influencia

En los capítulos anteriores se han desarrollado técnicas para el análisis de fuerzas en los elementos estructurales debidas a *cargas muertas o fijas*. Se ha demostrado que los *diagramas de fuerza cortante y de momento* representan los métodos más descriptivos para mostrar la variación de estas cargas en un elemento. Sin embargo, si una estructura está sometida a una *carga viva o móvil*, la variación de la fuerza cortante y del momento de flexión en el elemento se describe mejor usando la *línea de influencia*. Una línea de influencia representa la variación ya sea de la reacción, de la fuerza cortante, del momento o de la deflexión en un *punto específico* de un elemento, a medida que una fuerza concentrada se mueve a lo largo del elemento. Después de construir esta línea, es posible decir de un vistazo dónde debe colocarse la carga móvil sobre la estructura de modo que cree la mayor influencia en el punto específico. Además, entonces puede calcularse la magnitud de la reacción, la fuerza cortante, el momento o la deflexión asociados en el punto a partir de las ordenadas del diagrama de la línea de influencia. Por esto las líneas de influencia juegan un papel importante en el diseño de puentes, carriles de grúas industriales, transportadores y otras estructuras donde las cargas se mueven a lo largo de un claro.

Aunque el procedimiento para construir una línea de influencia es bastante básico, debe tenerse clara la *diferencia* entre construir una línea de influencia y un diagrama de fuerza de corte o de momento. Las líneas de influencia representan el efecto de una *carga móvil* sólo en un *punto específico* de un elemento, mientras que los diagramas de fuerza cortante y de momento representan el efecto de las *cargas fijas* en *todos los puntos* a lo largo del eje del elemento.

Procedimiento de análisis

Si se desea construir la línea de influencia en un punto P específico de un elemento para cualquier función (reacción, fuerza cortante o momento) puede usarse cualquiera de los dos procedimientos siguientes. En ambos casos se elegirá la fuerza móvil que tenga *una magnitud sin dimensiones de unidad*.*

Tabulación de valores

- Coloque una carga unitaria en varias ubicaciones, x , a lo largo del elemento y en *cada* ubicación use la estática para determinar el valor de la función (reacción, fuerza cortante o momento) en el punto específico.
- Si se desea construir la línea de influencia para una fuerza de *reacción* vertical en un punto sobre una viga, considere que la reacción será *positiva* en el punto donde actúe *hacia arriba*.
- Si se va a dibujar una línea de influencia de fuerza cortante o de momento en un punto, tome la fuerza cortante o el momento en el punto como positivos de acuerdo con la misma convención de signos que se emplea en la elaboración de los diagramas de fuerza cortante y de momento. (Vea la figura 4-1).
- Todas las vigas estáticamente determinadas tendrán líneas de influencia que consisten en segmentos de línea recta. Después de algo de práctica se adquiere la capacidad de minimizar los cálculos y ubicar la carga unitaria *sólo* en los puntos que representan los *puntos extremos* de cada segmento de línea.
- Para evitar errores, se recomienda primero construir una tabla que contenga las "cargas unitarias en x " contra el valor correspondiente de la función calculado en el punto específico; es decir, "la reacción R ", "la fuerza cortante V " o "el momento M ." Una vez que se ha colocado la carga en varios puntos a lo largo del claro del elemento, es posible graficar los valores tabulados y construir los segmentos de la línea de influencia.

Ecuaciones de las líneas de influencia

- La línea de influencia también se puede construir al colocar la carga unitaria en una posición *variable* x sobre el elemento para después calcular el valor de R , V o M en el punto en función de x . De esta manera se pueden determinar y representar gráficamente las ecuaciones de los diferentes segmentos que componen la línea de influencia.

*La razón de esta elección se explica en la sección 6-2.

EJEMPLO 6.1

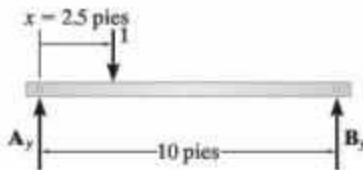
Construya la línea de influencia para la reacción vertical en el punto A de la viga que se muestra en la figura 6-1a.

SOLUCIÓN

Tabulación de valores. Se coloca una carga unitaria sobre la viga en cada punto x seleccionado, y el valor de A_y se calcula sumando los momentos respecto a B . Por ejemplo, cuando $x = 2.5$ pies y $x = 5$ pies, vea las figuras 6-1b y 6-1c, respectivamente. Los resultados de A_y se introducen en la tabla, figura 6-1d. Al graficar estos valores se obtiene la línea de influencia para la reacción en A , figura 6-1e.



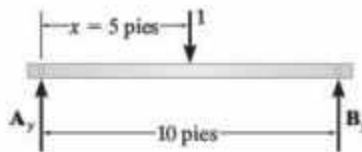
(a)

Figura 6-1

$$\zeta + \Sigma M_B = 0; -A_y(10) + 1(7.5) = 0$$

$$A_y = 0.75$$

(b)



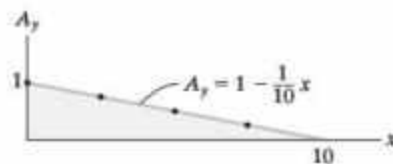
$$\zeta + \Sigma M_B = 0; -A_y(10) + 1(5) = 0$$

$$A_y = 0.5$$

(c)

x	A_y
0	1
2.5	0.75
5	0.5
7.5	0.25
10	0

(d)

línea de influencia para A_y

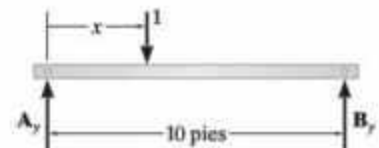
(e)

Ecuación de la línea de influencia. Cuando la carga unitaria se coloca a una distancia variable x desde A , figura 6-1f, la reacción A_y en función de x puede determinarse a partir de

$$\zeta + \Sigma M_B = 0; -A_y(10) + (10 - x)(1) = 0$$

$$A_y = 1 - \frac{1}{10}x$$

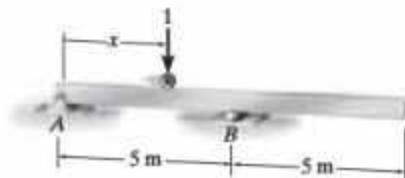
Esta línea se traza en la figura 6-1e.



(f)

EJEMPLO 6.2

Construya la línea de influencia para la reacción vertical en el punto B de la viga que se muestra en la figura 6-2a.



(a)

Figura 6-2**SOLUCIÓN**

Tabulación de valores. Con base en la estática, compruebe que los valores para la reacción B_y que aparecen en la tabla, figura 6-2b, están calculados correctamente para cada posición x de la carga unitaria. Al graficar los valores se obtiene la línea de influencia que se muestra en la figura 6-2c.

x	B_y
0	0
2.5	0.5
5	1
7.5	1.5
10	2

(b)



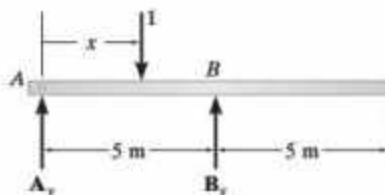
(c)

Ecuación de la línea de influencia. Si se aplica la ecuación de momentos respecto a A , en la figura 6-2d,

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad B_y(5) - 1(x) = 0$$

$$B_y = \frac{1}{5}x$$

Lo anterior se grafica en la figura 6-2c.



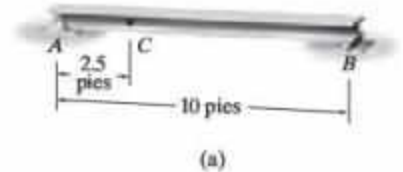
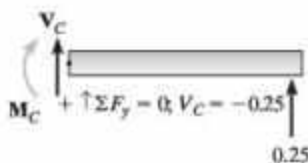
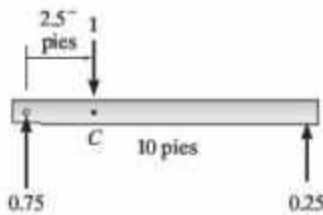
(d)

EJEMPLO 6.3

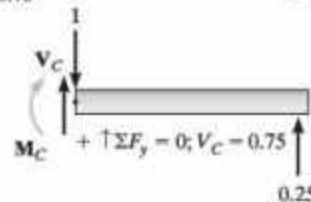
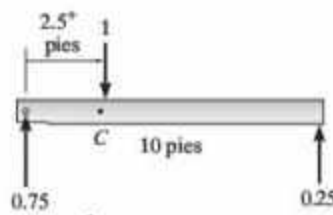
Construya la línea de influencia para la fuerza cortante en el punto C de la viga que se muestra en la figura 6-3a.

SOLUCIÓN

Tabulación de valores. En cada posición x seleccionada para la carga unitaria, se aplica el método de las secciones para calcular el valor de V_C . Observe en especial que la carga unitaria debe colocarse justo a la izquierda ($x = 2.5^-$) y a la derecha ($x = 2.5^+$) del punto C puesto que la fuerza cortante es discontinua en C , figuras 6-3b y 6-3c. Al graficar los valores de la figura 6-3d se obtiene la línea de influencia para la fuerza cortante en C , figura 6-3e.

**Figura 6-3**

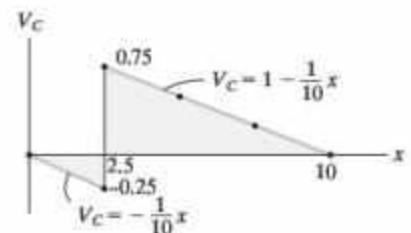
(b)



(c)

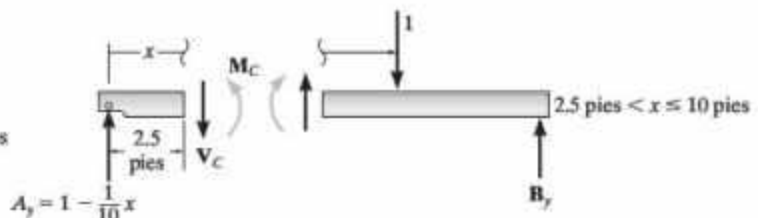
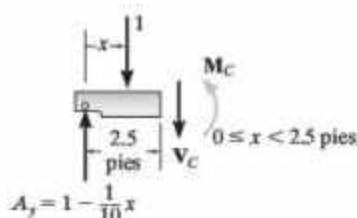
x	V_C
0	0
2.5^-	-0.25
2.5^+	0.75
5	0.5
7.5	0.25
10	0

(d)

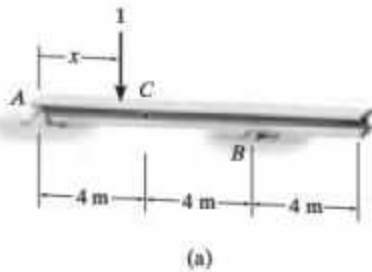
línea de influencia para V_C

(e)

Ecuaciones de la línea de influencia. Aquí deben determinarse dos ecuaciones puesto que hay dos segmentos en la línea de influencia, debido a la discontinuidad de la fuerza cortante en C , figura 6-3f. Estas ecuaciones se grafican en la figura 6-3e.



(f)

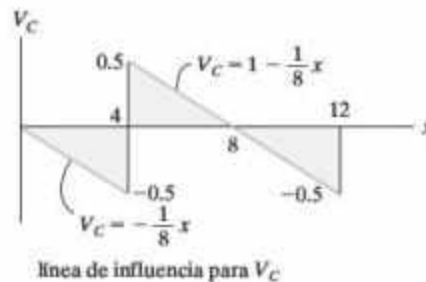
EJEMPLO 6.4**Figura 6-4**

Construya la línea de influencia para la fuerza cortante en el punto C de la viga que se muestra en la figura 6-4a.

SOLUCIÓN

Tabulación de valores. Con base en la estática y el método de las secciones, compruebe que los valores de la fuerza cortante V_C en el punto C de la figura 6-4b corresponden a cada posición x de la carga unitaria sobre la viga. Al graficar los valores de la figura 6-4b se obtiene la línea de influencia en la figura 6-4c.

x	V_C
0	0
4 ⁻	-0.5
4 ⁺	0.5
8	0
12	-0.5

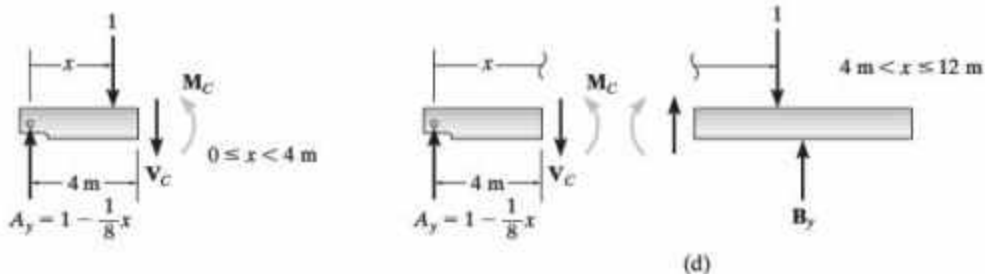
(b)**(c)**

Ecuaciones de la línea de influencia. A partir de la figura 6-4d, compruebe que

$$V_C = -\frac{1}{8}x \quad 0 \leq x < 4 \text{ m}$$

$$V_C = 1 - \frac{1}{8}x \quad 4 \text{ m} < x \leq 12 \text{ m}$$

Estas ecuaciones se grafican en la figura 6-4c.

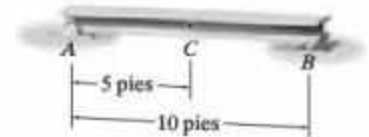


EJEMPLO 6.5

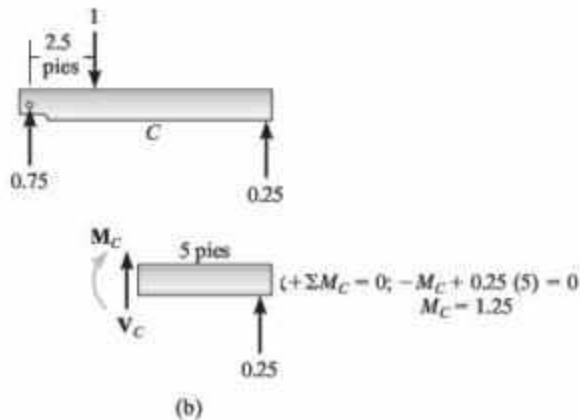
Construya la línea de influencia para el momento en el punto C de la viga que se muestra en la figura 6-5a.

SOLUCIÓN

Tabulación de valores. En cada posición seleccionada para la carga unitaria, el valor de M_C se calcula mediante el método de las secciones. Por ejemplo, vea la figura 6-5b para $x = 2.5$ pies. Al graficar los valores de la figura 6-5c se obtiene la línea de influencia para el momento en C , figura 6-5d.



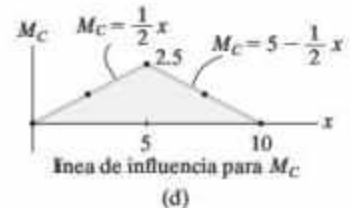
(a)

Figura 6-5

(b)

x	M_C
0	0
2.5	1.25
5	2.5
7.5	1.25
10	0

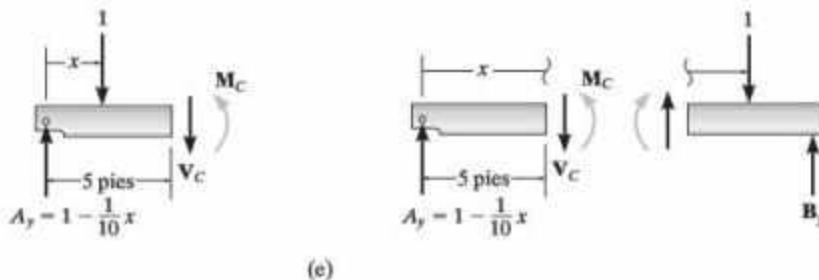
(c)



(d)

Ecuaciones de la línea de influencia. Los dos segmentos que forman la línea de influencia pueden determinarse empleando $\Sigma M_C = 0$ junto con el método de las secciones que se muestra en la figura 6-5e. Al graficar estas ecuaciones se obtiene la línea de influencia que se muestra en la figura 6-5d.

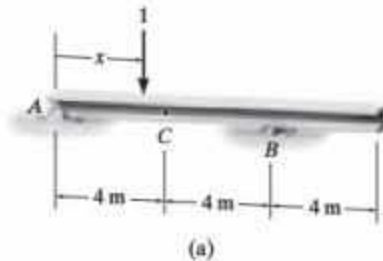
$$\begin{aligned} \uparrow + \Sigma M_C = 0; \quad M_C + 1(5 - x) - \left(1 - \frac{1}{10}x\right)5 &= 0 & \uparrow + \Sigma M_C = 0; \quad M_C - \left(1 - \frac{1}{10}x\right)5 &= 0 \\ M_C = \frac{1}{2}x & \quad 0 \leq x < 5 \text{ pies} & M_C = 5 - \frac{1}{2}x & \quad 5 \text{ pies} < x \leq 10 \text{ pies} \end{aligned}$$



(e)

EJEMPLO 6.6

Construya la línea de influencia para el momento en el punto C de la viga que se muestra en la figura 6-6a.

**Figura 6-6****SOLUCIÓN**

Tabulación de valores. Use la estática y el método de las secciones para verificar que los valores del momento M_C en el punto C de la figura 6-6b corresponden a cada posición x de la carga unitaria. Al graficar los valores de la figura 6-6b se obtiene la línea de influencia de la figura 6-6c.

x	M_C
0	0
4	2
8	0
12	-2

(b)



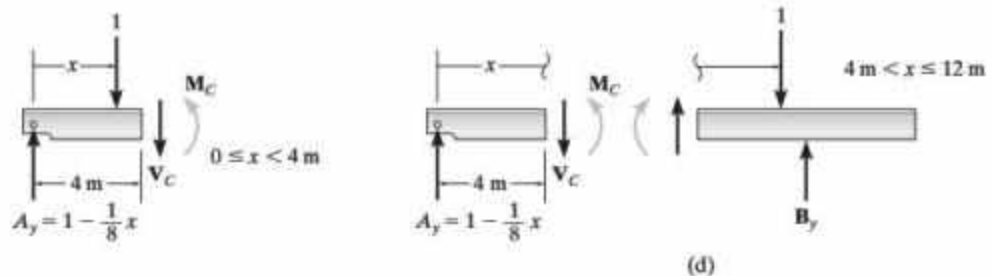
(c)

Ecuaciones de la línea de influencia. Con base en la figura 6-6d compruebe que

$$M_C = \frac{1}{2}x \quad 0 \leq x < 4 \text{ m}$$

$$M_C = 4 - \frac{1}{2}x \quad 4 \text{ m} < x \leq 12 \text{ m}$$

Estas ecuaciones se grafican en la figura 6-6c.



6.2 Líneas de influencia para vigas

Dado que las vigas (o traveses) constituyen los elementos principales para soportar cargas en un sistema de piso o en la cubierta de un puente, por ello es importante tener la capacidad de construir las líneas de influencia para las reacciones, la fuerza cortante o el momento en cualquier punto específico de una viga.

Cargas. Una vez que se ha construido la línea de influencia para una función (reacción, fuerza cortante o momento), se podrán colocar las cargas vivas sobre la viga para producir el valor máximo de la función. A continuación se considerarán dos tipos de cargas.

Fuerza concentrada. Dado que los valores numéricos de una función para una línea de influencia se determinan mediante una carga unitaria sin dimensiones, entonces para cualquier fuerza concentrada F que actúa sobre la viga en cualquier posición x , el valor de la función puede encontrarse al multiplicar la ordenada de la línea de influencia en la posición x por la magnitud de F . Por ejemplo, considere la línea de influencia para la reacción en el punto A de la viga AB que se muestra en la figura 6-7. Si la carga unitaria está en $x = \frac{1}{2}L$, la reacción en A es $A_y = \frac{1}{2}$ como lo indica la línea de influencia. Por lo tanto, si la fuerza F se encuentra en este mismo punto, la reacción es $A_y = (\frac{1}{2})(F)$ lb. Por supuesto, este mismo valor también puede determinarse por la estática. Obviamente, la influencia máxima causada por F se produce al colocarla sobre la viga en la misma ubicación que el pico de la línea de influencia; en este caso en $x = 0$, donde la reacción sería $A_y = (1)(F)$ lb.

Carga uniforme. Considere una parte de una viga sometida a una carga uniforme w_0 , figura 6-8. Como se muestra en la figura, cada segmento dx de esta carga crea una fuerza concentrada de $dF = w_0 dx$ sobre la viga. Si dF se encuentra en x , donde la ordenada de la línea de influencia es y , entonces el valor de la función es $(dF)(y) = (w_0 dx)y$. El efecto de todas las fuerzas concentradas dF se determina al integrarse por toda la longitud de la viga, es decir, $\int w_0 y dx = w_0 \int y dx$. Además, como $\int y dx$ equivalen al área bajo la línea de influencia; entonces, en general, el valor de una función causada por una carga uniformemente distribuida es sólo el área bajo la línea de influencia para la función multiplicada por la intensidad de la carga uniforme. Por ejemplo, en el caso de la viga cargada uniformemente que se muestra en la figura 6-9, la reacción A_y puede determinarse a partir de la línea de influencia como $A_y = (\text{área})(w_0) = [\frac{1}{2}(1)(L)]w_0 = \frac{1}{2}w_0 L$. Por supuesto, este valor también puede determinarse con base en la estática.

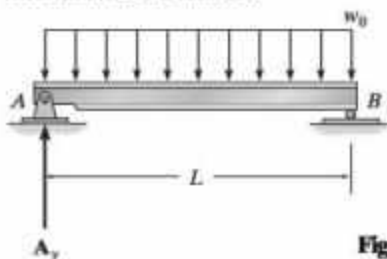


Figura 6-9

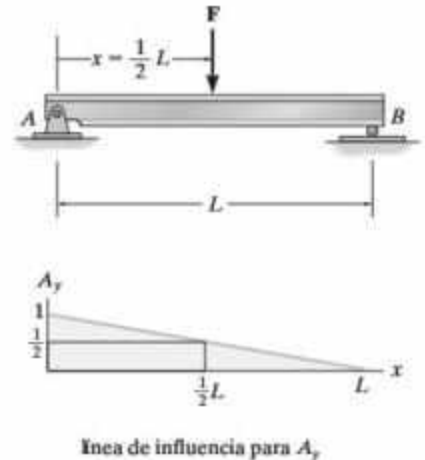


Figura 6-7

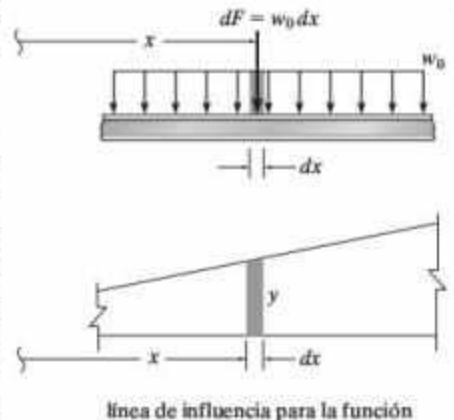


Figura 6-8

EJEMPLO 6.7

Determine la fuerza cortante *positiva* máxima que se puede desarrollar en el punto *C* de la viga que se muestra en la figura 6-10a debido a una carga móvil concentrada de 4000 lb y una carga móvil uniforme de 2000 lb/pie.

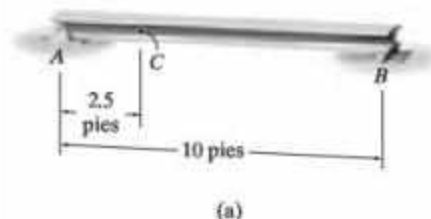
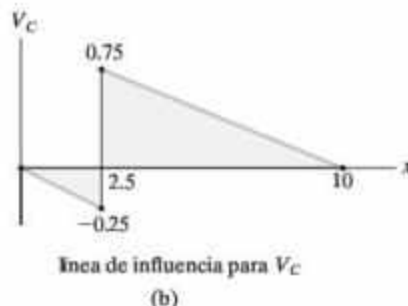


Figura 6-10



SOLUCIÓN

En el ejemplo 6-3 se estableció la línea de influencia para la fuerza cortante en *C*, la cual se muestra en la figura 6-10b.

Fuerza concentrada. La fuerza cortante positiva máxima en *C* se produce cuando la fuerza de 4000 lb se ubica en $x = 2.5^+$ pies, puesto que es el pico positivo de la línea de influencia. La ordenada de este pico es + 0.75; de modo que

$$V_C = 0.75(4000 \text{ lb}) = 3000 \text{ lb}$$

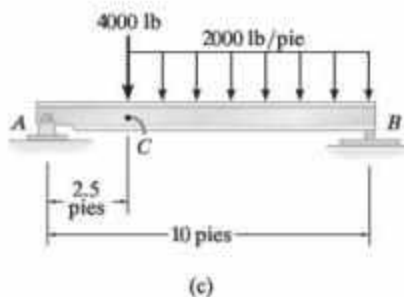
Carga uniforme. La carga móvil uniforme crea la influencia positiva máxima para V_C cuando la carga actúa sobre la viga entre $x = 2.5^+$ pies y $x = 10$ pies, puesto que dentro de esta región la línea de influencia tiene un área positiva. La magnitud de V_C debida a esta carga es

$$V_C = \left[\frac{1}{2}(10 \text{ pies} - 2.5 \text{ pies})(0.75) \right] 2000 \text{ lb/pies} = 5625 \text{ lb}$$

Fuerza cortante máxima total en *C*.

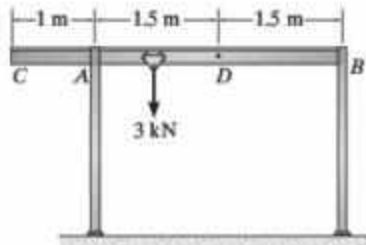
$$(V_C)_{\text{máx}} = 3000 \text{ lb} + 5625 \text{ lb} = 8625 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

Tenga en cuenta que una vez que se han establecido las *posiciones* de las cargas empleando la línea de influencia, figura 6-10c, este valor $(V_C)_{\text{máx}}$ también puede determinarse usando la estática y el método de las secciones. Demuestre que así es.



EJEMPLO 6.8

La estructura del marco que se muestra en la figura 6-11a se utiliza para sostener una grúa que transfiere cargas destinadas a almacenamiento en puntos que se encuentran por debajo de ella. Se prevé que la carga en la plataforma rodante sea de 3 kN y que la viga CB tenga una masa de 24 kg/m. Suponga que el tamaño de la plataforma rodante puede pasarse por alto y que puede viajar a todo lo largo de la viga. Además, suponga que A está articulado y que B es un rodillo. Determine las reacciones verticales máximas en los soportes (apoyos) en A y B y el momento máximo en la viga en D .



(a)

**SOLUCIÓN**

Reacción máxima en A. En primer lugar se traza la línea de influencia para A_y , figura 6-11b. En específico, cuando una carga unitaria está en A la reacción en A es 1 como se muestra en la figura. La ordenada en C es 1.33. Aquí el valor máximo de A_y ocurre cuando la plataforma rodante se encuentra en C . Como la carga muerta (peso de la viga) debe colocarse en toda la longitud de la viga, se tiene,

$$\begin{aligned}(A_y)_{\max} &= 3000(1.33) + 24(9.81)\left[\frac{1}{2}(4)(1.33)\right] \\ &= 4.63 \text{ kN}\end{aligned}$$

Resp.

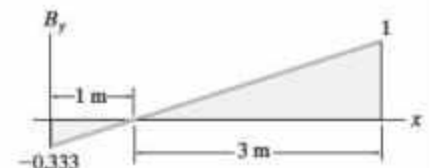
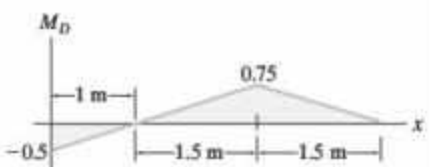
Reacción máxima en B. La línea de influencia (o viga) toma la forma que se muestra en la figura 6-11c. Los valores en C y B se determinan con base en la estática. Aquí, la plataforma rodante debe estar en B . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(B_y)_{\max} &= 3000(1) + 24(9.81)\left[\frac{1}{2}(3)(1)\right] + 24(9.81)\left[\frac{1}{2}(1)(-0.333)\right] \\ &= 3.31 \text{ kN}\end{aligned}$$

Resp.

Momento máximo en D. La línea de influencia tiene la forma que se muestra en la figura 6-11d. Los valores en C y D se determinan a partir de la estática. En este caso,

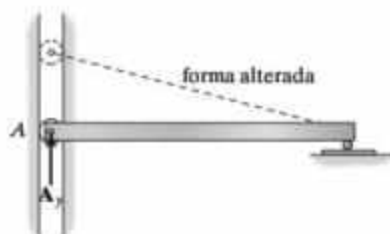
$$\begin{aligned}(M_D)_{\max} &= 3000(0.75) + 24(9.81)\left[\frac{1}{2}(1)(-0.5)\right] + 24(9.81)\left[\frac{1}{2}(3)(0.75)\right] \\ &= 2.46 \text{ kN} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Resp.línea de influencia para A_y
(b)línea de influencia para B_y
(c)línea de influencia para M_D
(d)**Figura 6-11**

6.3 Líneas de influencia cualitativa



(a)



(b)

En 1886, Heinrich Müller-Breslau desarrolló una técnica para construir con rapidez la forma de una línea de influencia. Este método conocido como el *principio de Müller-Breslau*, establece que la línea de influencia para una función (reacción, fuerza cortante o momento) está a la misma escala que la forma alterada de la viga cuando sobre ésta actúa la función. Para dibujar apropiadamente la forma alterada, debe *removerse* la capacidad de la viga para resistir la función de modo que la viga pueda deformarse al aplicar la función. Por ejemplo, considere la viga de la figura 6-12a. Si debe determinarse la forma de la línea de influencia para la reacción vertical en A, primero se sustituye el pasador por una guía de rodillos como se muestra en la figura 6-12b. Se requiere una guía de rodillos puesto que la viga todavía deberá resistir una fuerza horizontal en A, pero *ninguna fuerza vertical*. Cuando la fuerza positiva (hacia arriba) A_y se aplica en A, la viga se deforma hasta la posición marcada con líneas discontinuas,* lo que representa la forma general de la línea de influencia para A_y , figura 6-12c. (Los valores numéricos para este caso específico ya se calcularon en el ejemplo 6-1.) Si debe determinarse la forma de la línea de influencia para la fuerza cortante en C, figura 6-13a, la conexión en C puede simbolizarse mediante una *guía de rodillos* como se muestra en la figura 6-13b. Este dispositivo resistirá un momento y una fuerza axial, pero *ninguna fuerza cortante*.† Al aplicar una fuerza cortante positiva V_C a la viga en C y al permitir que la viga se deforme hasta la posición indicada con líneas discontinuas, se encuentra la forma de la línea de influencia, como se muestra en la figura 6-13c. Por último, si debe determinarse la forma de la línea de influencia para el momento en C, figura 6-14a, se coloca una *bisagra* o *pasador interno* en C, puesto que esta conexión resistirá fuerzas axiales y cortantes, pero *no puede resistir un momento*, figura 6-14b. Al aplicar los momentos positivos M_C a la viga, ésta se deforma hasta la posición indicada con líneas discontinuas, que es la forma de la línea de influencia, figura 6-14c.

La comprobación del principio de Müller-Breslau puede establecerse mediante el principio del trabajo virtual. Recuerde que el *trabajo* es el



(c)

Figura 6-12



El diseño de la trabe de este puente se basa en las líneas de influencia que debieron construirse para la carga del tren.

*A lo largo del análisis todas las posiciones alteradas se dibujan a una escala exagerada para ilustrar el concepto.

†Aquí los rodillos simbolizan los apoyos que soportan cargas, tanto en tensión como en compresión, vea la tabla 2-1, soporte (2).

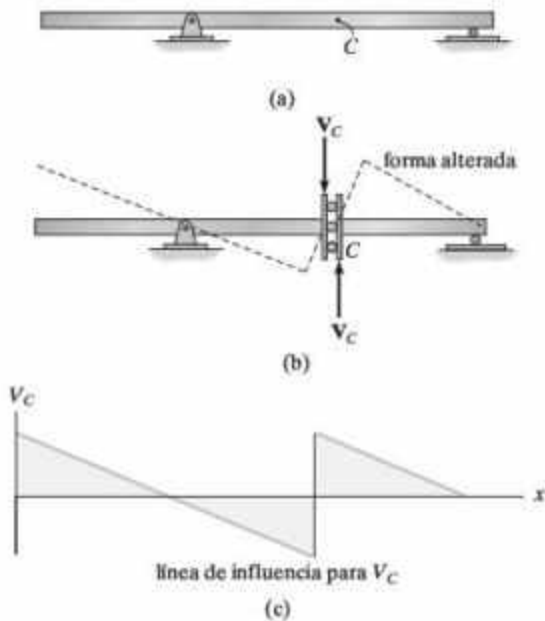


Figura 6-13

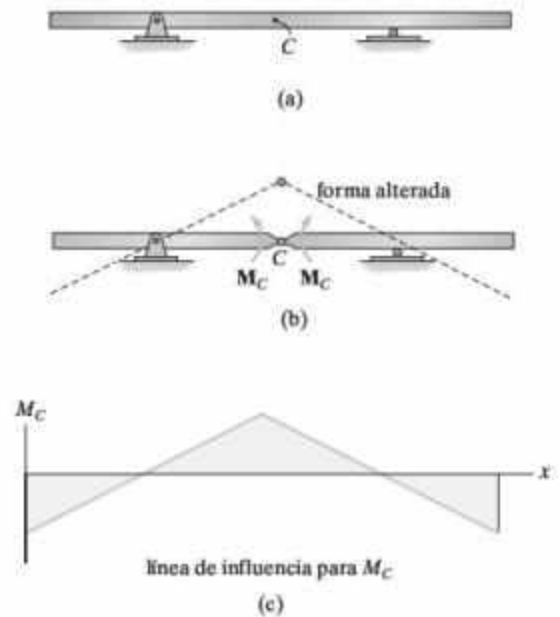


Figura 6-14

producto de un desplazamiento lineal por una fuerza en la dirección del desplazamiento o bien de un desplazamiento de rotación por el momento en la dirección del desplazamiento. Si un cuerpo rígido (viga) está en equilibrio, la suma de todas las fuerzas y todos los momentos debe ser igual a cero. En consecuencia, si al cuerpo se le da un desplazamiento imaginario o virtual, el trabajo realizado por todas estas fuerzas y momentos de par también debe ser igual a cero. Por ejemplo, considere la viga simplemente apoyada que se muestra en la figura 6-15a, la cual está sometida a una carga unitaria colocada en un punto arbitrario de toda su longitud. Si a la viga se le da un desplazamiento virtual (o imaginario) δy en el soporte A , figura 6-15b, entonces sólo la reacción del soporte A_y y la carga unitaria realizan trabajo virtual. En específico, A_y realiza el trabajo positivo $A_y \delta y$ y la carga unitaria realiza el trabajo negativo $-1 \delta y'$. (El soporte en B no se mueve y, por lo tanto, la fuerza en B no hace ningún trabajo.) Dado que la viga está en equilibrio y por ende no se mueve, el trabajo virtual suma cero, es decir,

$$A_y \delta y - 1 \delta y' = 0$$

Si se establece que δy es igual a 1, entonces

$$A_y = \delta y'$$

En otras palabras, el valor de A_y representa la ordenada de la línea de influencia en la posición de la carga unitaria. Como este valor es equivalente al desplazamiento $\delta y'$ en la posición de la carga unitaria, muestra que se ha establecido la forma de la línea de influencia para la reacción en A . Lo anterior comprueba el principio de Müller-Breslau para las reacciones.

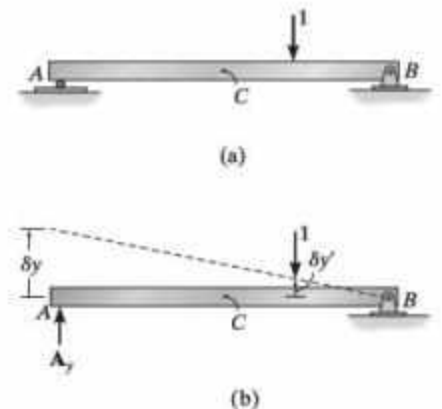


Figura 6-15

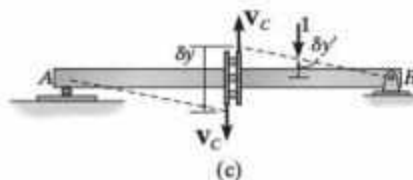


Figura 6-15

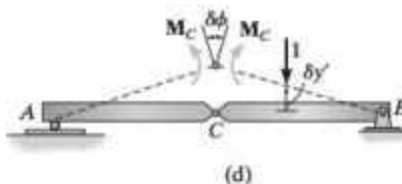
De la misma manera, si la viga se secciona en C y experimenta un desplazamiento virtual δy en este punto, figura 6-15c, entonces sólo la fuerza cortante en C y la carga unitaria realizan trabajo. Por lo tanto, la ecuación del trabajo virtual es

$$V_C \delta y - 1 \delta y' = 0$$

De nuevo, si $\delta y = 1$, entonces

$$V_C = \delta y'$$

y se establece la *forma* de la línea de influencia para la fuerza cortante en C .



Por último, suponga la introducción de una bisagra o pasador en el punto C de la viga, figura 6-15d. Si se presenta una rotación virtual $\delta \phi$ en el pasador, sólo el momento interno y la carga unitaria realizarán trabajo virtual. Así que

$$M_C \delta \phi - 1 \delta y' = 0$$

Si se establece $\delta \phi = 1$, se observa que

$$M_C = \delta y'$$

lo cual indica que la viga deformada tiene la misma *forma* que la línea de influencia para el momento interno en el punto C (vea la figura 6-14).

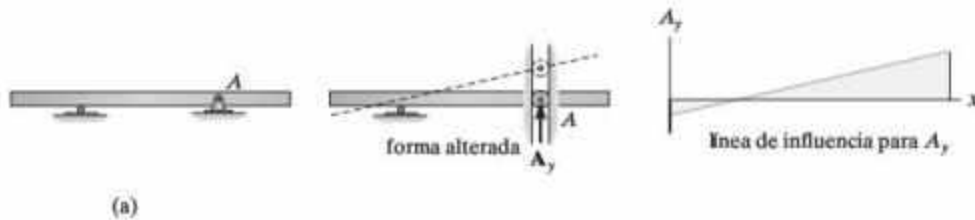
Por supuesto, el principio de Müller-Breslau proporciona un método rápido para establecer la *forma* de la línea de influencia. Una vez que se sabe esto, las ordenadas en los picos pueden determinarse aplicando el método básico analizado en la sección 6-1. Además, con sólo conocer la forma general de la línea de influencia es posible *ubicar* la carga viva sobre la viga y luego determinar el valor máximo de la función por el *uso de la estática*. En el ejemplo 6-12 se ilustra esta técnica.

EJEMPLO 6.9

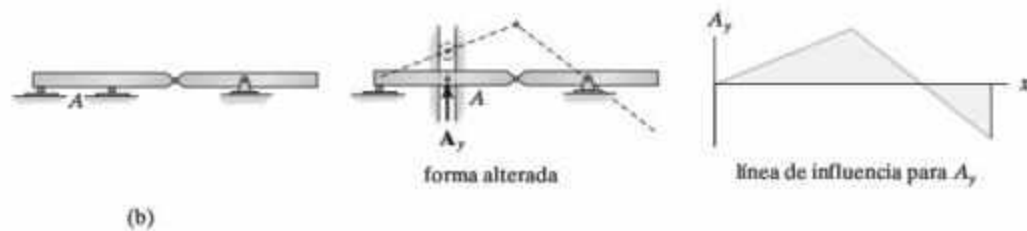
Para cada viga de las que aparecen en las figuras 6-16a a 6-16c, trace la línea de influencia para la reacción vertical en A .

SOLUCIÓN

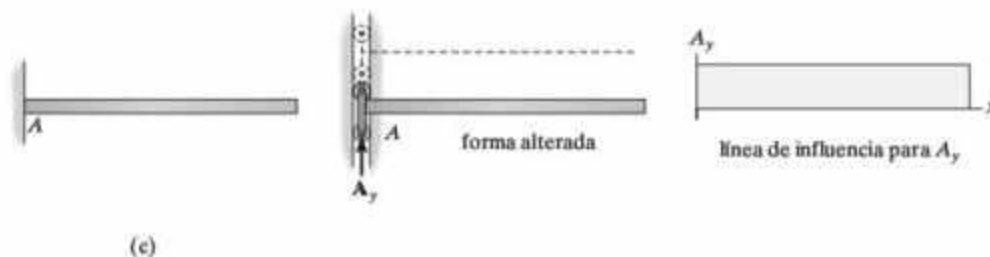
El soporte en A se sustituye por una guía de rodillos, puesto que resistirá A_x , pero no A_y . Después se aplica la fuerza A_y .

**Figura 6-16**

De nuevo, se coloca una guía de rodillos en A y se aplica la fuerza A_y .



En este caso debe usarse una *guía de doble rodillo*, puesto que este tipo de soporte resistirá tanto un momento M_A en el soporte fijo como una carga axial A_x , pero no resistirá A_y .

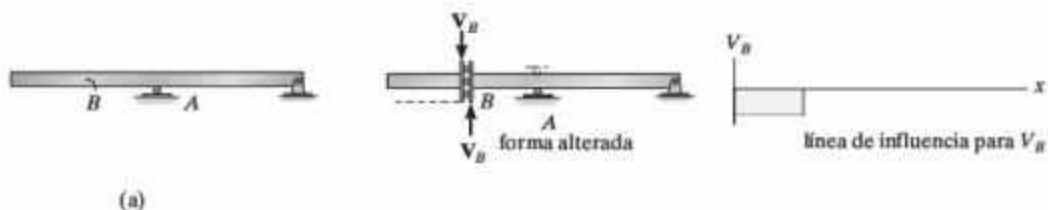


EJEMPLO 6.10

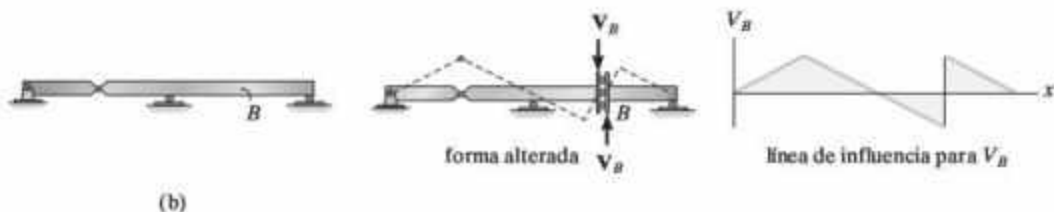
Para cada viga de las que aparecen en las figuras 6-17a a 6-17c, trace la línea de influencia para la fuerza cortante en B .

SOLUCIÓN

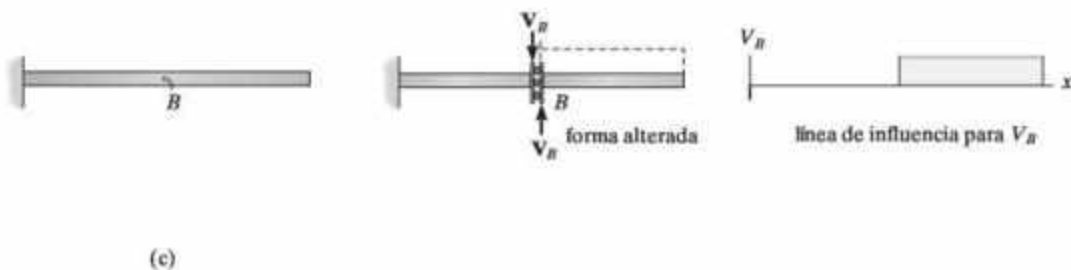
La guía de rodillos se introduce en B y se aplica la fuerza cortante positiva V_B . Observe que el segmento derecho de la viga *no se deformará* porque el rodillo en realidad limita el movimiento vertical de la viga, ya sea hacia arriba o hacia abajo. [Vea el soporte (2) de la tabla 2-1].

**Figura 6-17**

Al colocar la guía de rodillos en B y aplicar la fuerza cortante positiva en B se obtiene la forma alterada y la línea de influencia correspondiente.



Una vez más, la guía de rodillos se coloca en B , se aplica la fuerza cortante positiva, y se muestran la forma alterada y la línea de influencia correspondiente. Observe que el segmento izquierdo de la viga no se deforma debido al soporte fijo.

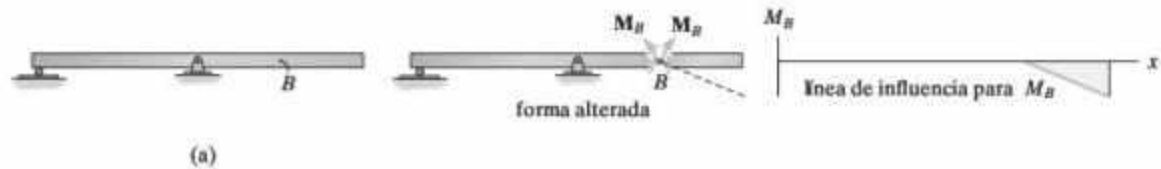


EJEMPLO 6.11

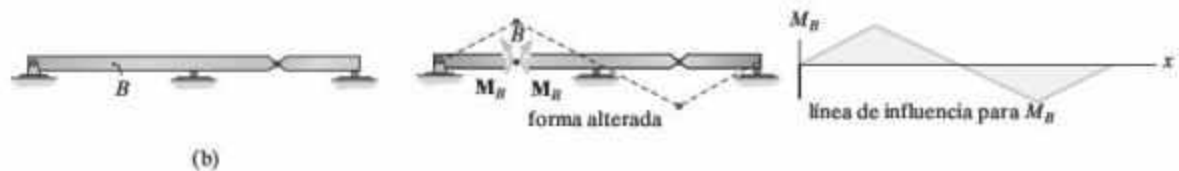
Para cada viga de las que aparecen en las figuras 6-18a a 6-18c, trace la línea de influencia para el momento en B .

SOLUCIÓN

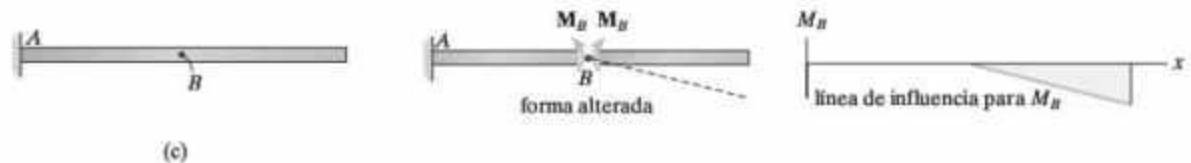
Se introduce una bisagra en B y se aplican los momentos positivos M_B a la viga. En la figura se muestran la forma alterada y la línea de influencia correspondiente.

**Figura 6-18**

Al colocar una bisagra en B y al aplicar los momentos positivos M_B a la viga se obtiene la forma alterada y la línea de influencia.

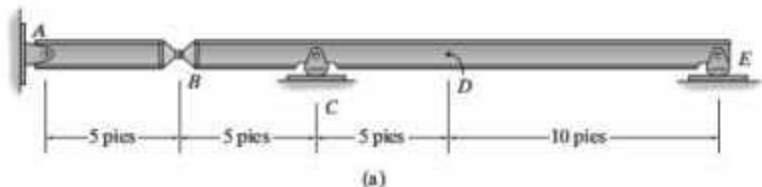


Con la bisagra y el momento positivo en B , se muestran la forma alterada y la línea de influencia. El movimiento del segmento izquierdo de la viga está restringido debido a la pared fija en A .



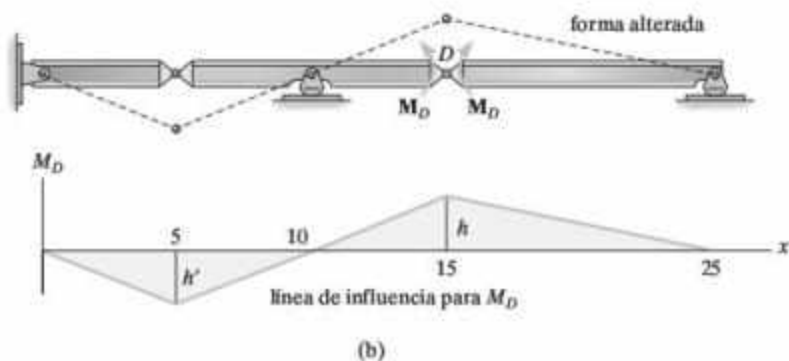
EJEMPLO 6.12

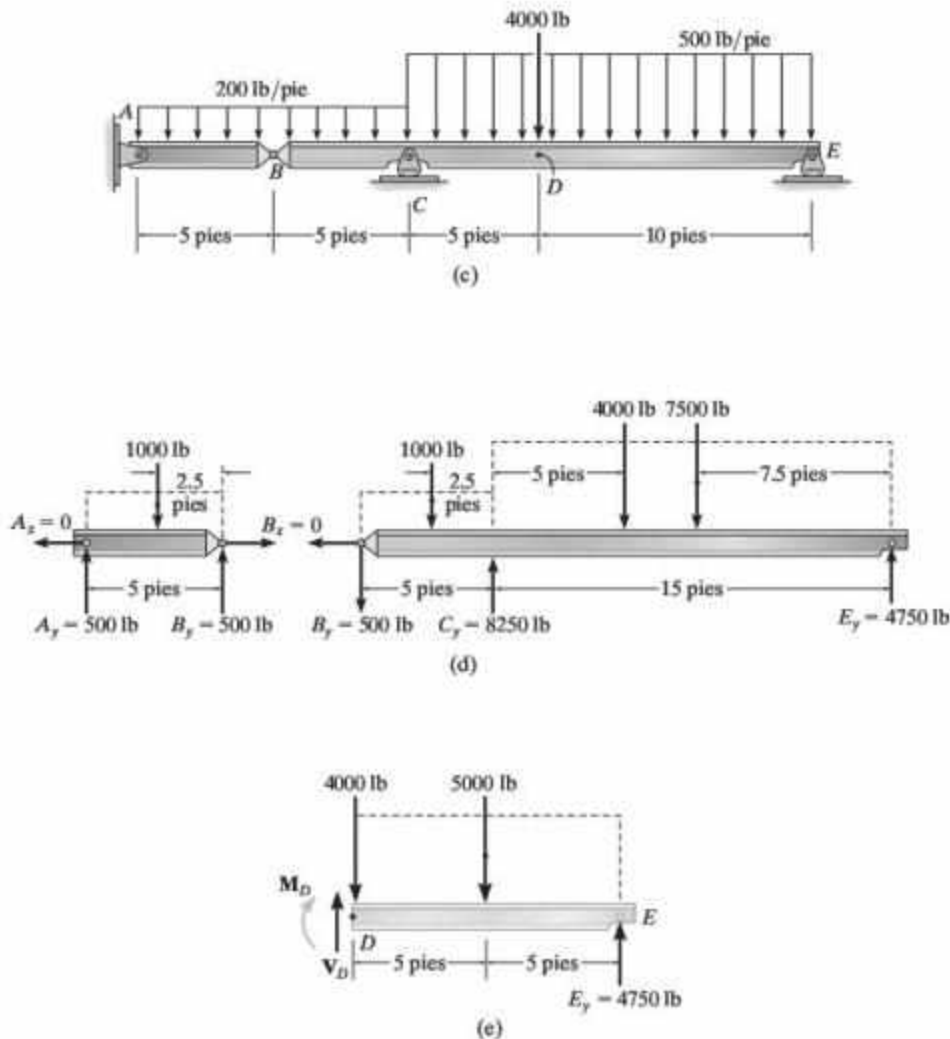
Determine el momento positivo máximo que puede desarrollarse en el punto D de la viga que se muestra en la figura 6-19a, debido a una carga móvil concentrada de 4000 lb, una carga móvil uniforme de 300 lb/pie, y el peso de la viga que es de 200 lb/pie.

**Figura 6-19****SOLUCIÓN**

Se coloca una bisagra en D y se aplican a la viga los momentos positivos M_D . La forma alterada y la línea de influencia correspondiente se muestran en la figura 6-19b. De inmediato se reconoce que la carga móvil concentrada de 4000 libras crea un momento *positivo* máximo en D cuando se coloca ahí, es decir, el pico de la línea de influencia. Además, la carga móvil uniforme de 300 lb/pie debe extenderse desde C hasta E para cubrir la región donde el área de la línea de influencia es positiva. Por último, el peso uniforme de 200 lb/pie actúa a *todo lo largo* de la viga. En la figura 6-19c se muestran las cargas sobre la viga. Cuando se conoce la posición de las cargas, es posible determinar el momento máximo en D empleando la estática. En la figura 6-19d se calculan las reacciones en BE . Al seccionar la viga en D y usar el segmento DE , figura 6-19e, se tiene

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0; \quad & -M_D - 5000(5) + 4750(10) = 0 \\ & M_D = 22\,500 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 22.5 \text{ k} \cdot \text{pie} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$





Este problema también puede solucionarse usando *valores numéricos* para la línea de influencia como en la sección 6-1. En realidad, al inspeccionar la figura 6-19b, sólo debe determinarse el valor pico h en D . Esto requiere colocar una carga unitaria sobre la viga en el punto D de la figura 6-19a y luego determinar el momento interno en la viga en D . Demuestre que el valor obtenido es $h = 3.33$. Por triángulos semejantes, $h'/(10-5) = 3.33/(15-10)$ o bien $h' = 3.33$. Por lo tanto, con las cargas sobre la viga como se muestran en la figura 6-19c y empleando las áreas y valores pico de la línea de influencia, figura 6-19b, se tiene

$$\begin{aligned}
 M_D &= 500\left[\frac{1}{2}(25-10)(3.33)\right] + 4000(3.33) - 200\left[\frac{1}{2}(10)(3.33)\right] \\
 &= 22\,500 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 22.5 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F6-1. Utilice el principio de Müller-Breslau y trace las líneas de influencia para la reacción vertical en A , la fuerza cortante en C y el momento en C .



F6-1

F6-2. Utilice el principio de Müller-Breslau y trace las líneas de influencia para la reacción vertical en A , la fuerza cortante en D y el momento en B .



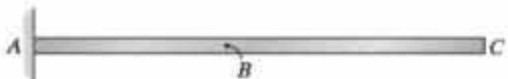
F6-2

F6-3. Utilice el principio de Müller-Breslau y trace las líneas de influencia para la reacción vertical en A , la fuerza cortante en D y el momento en D .



F6-3

F6-4. Utilice el principio de Müller-Breslau y trace las líneas de influencia para la reacción vertical en A , la fuerza cortante en B y el momento en B .



F6-4

F6-5. Utilice el principio de Müller-Breslau y trace las líneas de influencia para la reacción vertical en A , la fuerza cortante en C y el momento en C .



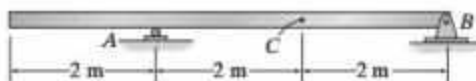
F6-5

F6-6. Utilice el principio de Müller-Breslau y trace las líneas de influencia para la reacción vertical en A , la fuerza cortante justo a la izquierda del soporte de rodillo en E y el momento en A .



F6-6

F6-7. La viga soporta una carga viva distribuida de 1.5 kN/m y una sola carga concentrada de 8 kN . La carga muerta es de 2 kN/m . Determine (a) el momento positivo máximo en C , y (b) la fuerza cortante positiva máxima en C .



F6-7

F6-8. La viga soporta una carga viva distribuida de 2 kN/m , y una sola carga concentrada de 6 kN . La carga muerta es de 4 kN/m . Determine (a) la reacción vertical positiva máxima en C , y (b) el momento negativo máximo en A .

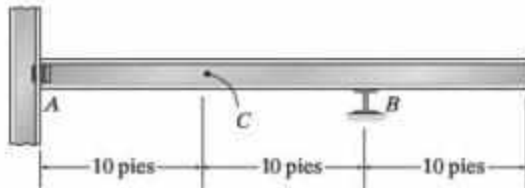


F6-8

PROBLEMAS

6-1. Dibuje las líneas de influencia para (a) el momento en C ; (b) la reacción en B , y (c) la fuerza cortante en C . Suponga que A está articulado y que B es un rodillo. Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6-1.

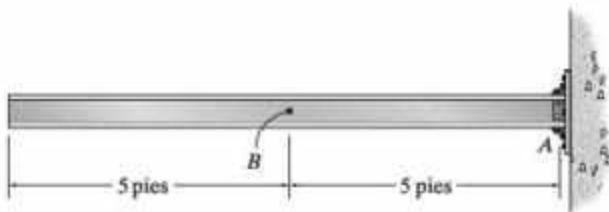
6-2. Resuelva el problema 6-1 usando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6-1/6-2

6-3. Dibuje las líneas de influencia para (a) la reacción vertical en A ; (b) el momento en A , y (c) la fuerza cortante en B . Suponga que el soporte en A es fijo. Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6-1.

***6-4.** Resuelva el problema 6-3 empleando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6-3/6-4

6-5. Dibuje las líneas de influencia para (a) la reacción vertical en B ; (b) la fuerza cortante justo a la derecha del oscilador en A , y (c) el momento en C . Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6-1.

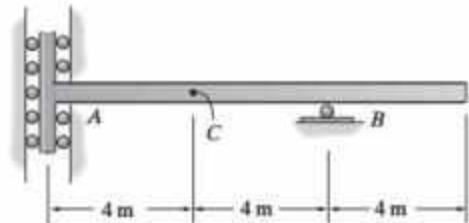
6-6. Resuelva el problema 6-5 empleando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6-5/6-6

6-7. Dibuje la línea de influencia para (a) el momento en B ; (b) la fuerza cortante en C , y (c) la reacción vertical en B . Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6-1. *Sugerencia:* El soporte en A sólo resiste una fuerza horizontal y un momento flexionante.

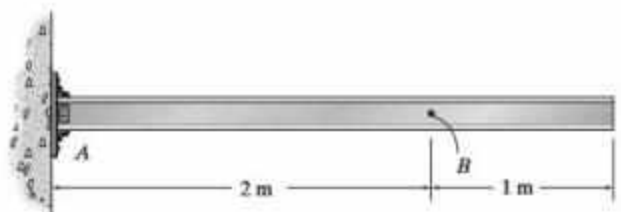
***6-8.** Resuelva el problema 6-7 empleando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6-7/6-8

6-9. Dibuje la línea de influencia para (a) la reacción vertical en A ; (b) la fuerza cortante en B , y (c) el momento en B . Suponga que A está fijo. Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6-1.

6-10. Resuelva el problema 6-9 empleando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6-9/6-10

6-11. Dibuje las líneas de influencia para (a) la reacción vertical en A ; (b) la fuerza cortante en C , y (c) el momento en C . Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6-1.

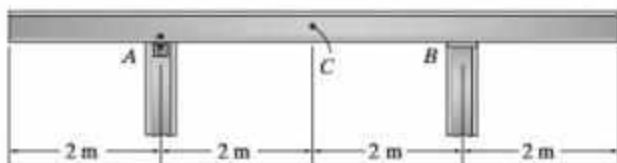
***6-12.** Resuelva el problema 6-11 empleando el principio de Müller-Breslau.



Probs. 6-11/6-12

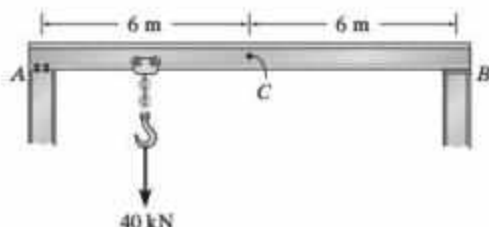
6-13. Dibuje las líneas de influencia para (a) la reacción vertical en A ; (b) la reacción vertical en B ; (c) la fuerza cortante justo a la derecha del soporte en A , y (d) el momento en C . Suponga que el soporte en A está articulado y que B es un rodillo. Resuelva este problema usando el método básico de la sección 6-1.

6-14. Resuelva el problema 6-13 empleando el principio de Müller-Breslau.



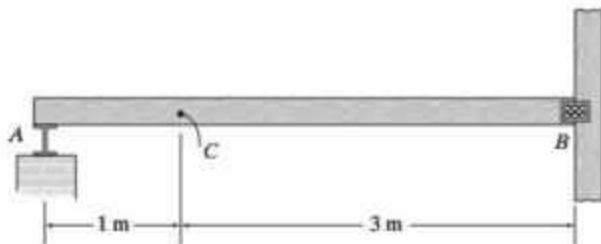
Probs. 6-13/6-14

6-15. La viga está sometida a una carga muerta uniforme de 1.2 kN/m y una sola carga viva de 40 kN . Determine (a) el momento máximo creado por estas cargas en C , y (b) la fuerza cortante positiva máxima en C . Suponga que A está articulado y que B es un rodillo.



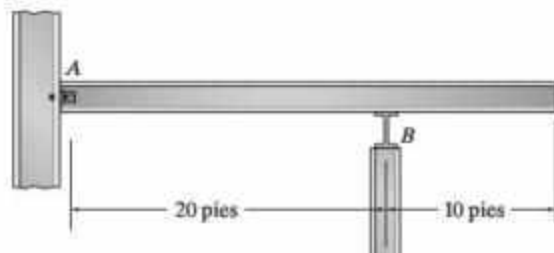
Prob. 6-15

***6-16.** La viga soporta una carga muerta uniforme de 500 N/m y una sola fuerza viva concentrada de 3000 N . Determine (a) el momento positivo máximo en C , y (b) la fuerza cortante positiva máxima en C . Suponga que el soporte en A es un rodillo y que B está articulado.



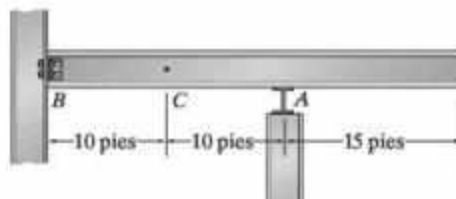
Prob. 6-16

6-17. En la barra se colocarán una carga viva uniforme de 300 lb/pie y una sola fuerza viva concentrada de 1500 lb . La viga tiene un peso de 150 lb/pie . Determine (a) la reacción vertical máxima en el soporte B , y (b) el momento negativo máximo en el punto B . Suponga que el soporte en A está articulado y que B es un rodillo.



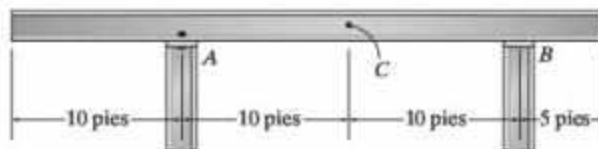
Prob. 6-17

6-18. La viga soporta una carga muerta uniforme de 0.4 k/pie ; una carga viva de 1.5 k/pie , y una sola fuerza viva concentrada de 8 k . Determine (a) el momento positivo máximo en C , y (b) la reacción vertical positiva máxima en B . Suponga que A es un rodillo y que B está articulado.



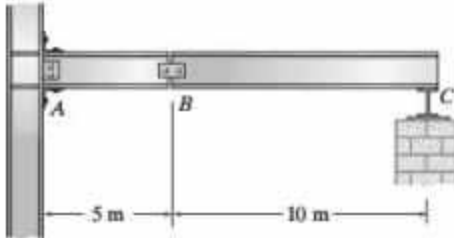
Prob. 6-18

6-19. La viga se utiliza para soportar una carga muerta de 0.6 k/pie , una carga viva de 2 k/pie y una carga viva concentrada de 8 k . Determine (a) la reacción positiva máxima (hacia arriba) en A ; (b) el momento positivo máximo en C , y (c) la fuerza cortante positiva máxima a la derecha del soporte en A . Suponga que el soporte en A está articulado y que B es un rodillo.



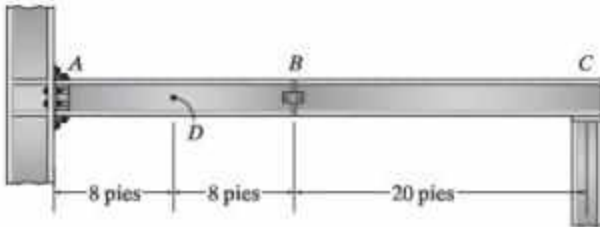
Prob. 6-19

***6-20.** La viga compuesta está sometida a una carga muerta uniforme de 1.5 kN/m y a una sola carga viva de 10 kN . Determine (a) el momento negativo máximo creado por estas cargas en A , y (b) la fuerza cortante positiva máxima en B . Suponga que A es un soporte fijo, B está articulado y C es un rodillo.



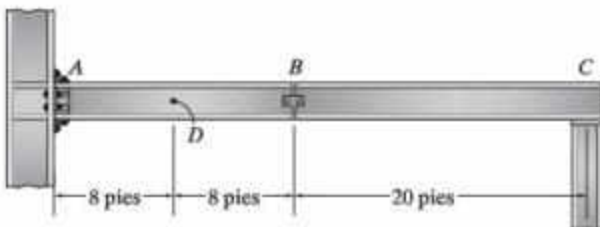
Prob. 6-20

6-21. ¿Dónde debe colocarse una sola carga viva de 500 lb sobre la viga que se muestra, de modo que cause el mayor momento en D ? ¿Qué valor tiene ese momento? Suponga que el soporte en A es fijo, que B está articulado y que C es un rodillo.



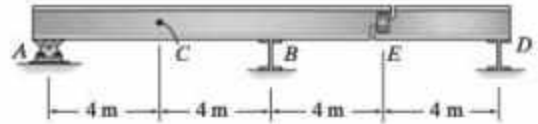
Prob. 6-21

6-22. ¿Dónde debe cargarse la viga ABC con una carga viva uniformemente distribuida de 300 lb/pie de modo que ocasione (a) el mayor momento en el punto A y (b) la mayor fuerza cortante en D ? Calcule los valores del momento y la fuerza cortante. Suponga que el soporte en A es fijo, que B está articulado y que C es un rodillo.



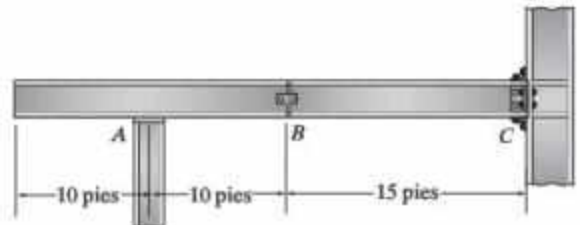
Prob. 6-22

6-23. La viga se emplea para soportar una carga muerta de 800 N/m , una carga viva de 4 kN/m y una carga viva concentrada de 20 kN . Determine (a) la reacción positiva máxima (hacia arriba) en B ; (b) el momento positivo máximo en C , y (c) la fuerza cortante negativa máxima en C . Suponga que B y D están articulados.



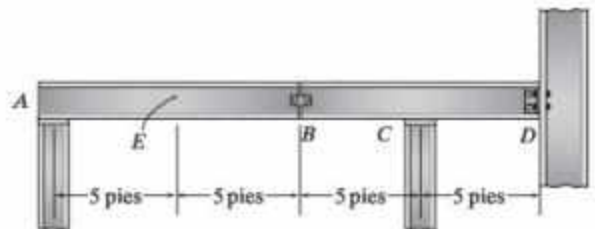
Prob. 6-23

***6-24.** La viga se usa para soportar una carga muerta de 400 lb/pie , una carga viva de 2 k/pie y una carga viva concentrada de 8 k . Determine (a) la reacción vertical positiva máxima en A ; (b) la fuerza cortante positiva máxima justo a la derecha del soporte en A , y (c) el momento negativo máximo en C . Suponga que A es un rodillo, C está fijo y B está articulado.



Prob. 6-24

6-25. La viga se usa para soportar una carga muerta de 500 lb/pie , una carga viva de 2 k/pie y una carga viva concentrada de 8 k . Determine (a) la reacción positiva máxima (hacia arriba) en A ; (b) el momento positivo máximo en E , y (c) la fuerza cortante positiva máxima a la derecha del soporte en C . Suponga que A y C son rodillos y que D está articulado.



Prob. 6-25

6.4 Líneas de influencia para vigas de piso

Ocasionalmente, los sistemas de piso se construyen como se muestra en la figura 6-20a, donde puede observarse que las cargas del piso se transmiten de las *losas* a las *vigas de piso*, luego a las *trabes laterales* y, finalmente, a las *columnas* de soporte. En la vista de planta de la figura 6-20b se muestra un modelo idealizado de este sistema. Aquí se supone que la losa es de una sola vía y se divide en claros simplemente apoyados que descansan sobre las vigas de piso. Además, la trabe está simplemente apoyada en las columnas. Dado que las trabes son los principales elementos de carga en este sistema, a veces es necesario construir sus líneas de influencia de fuerza cortante y de momento. Esto es especialmente cierto para los edificios industriales que se someten a fuertes cargas concentradas. En este sentido, tenga en cuenta que una carga unitaria sobre la losa del piso se transfiere a la trabe sólo en los puntos donde hay contacto con las vigas de piso, es decir, en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. Estos puntos se denominan *puntos de panel* y la región que existe entre estos puntos se llama *panel*, como *BC* en la figura 6-20b.

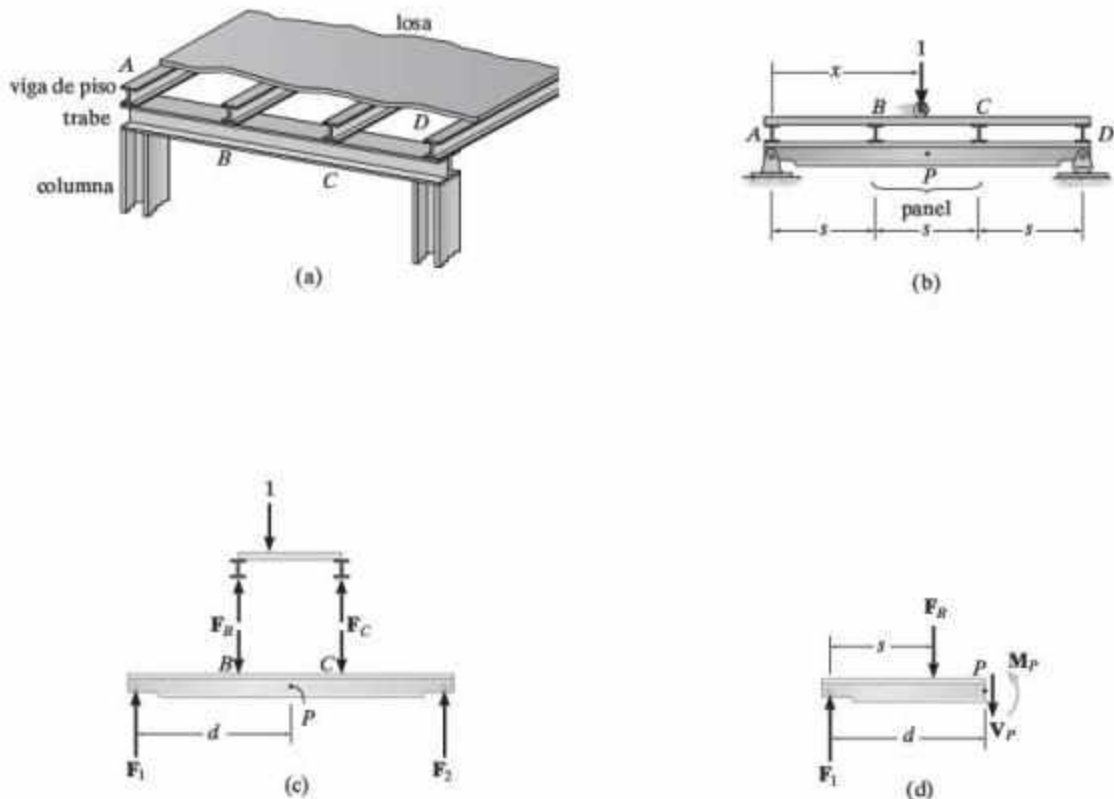


Figura 6-20

La línea de influencia para un punto específico sobre la viga puede determinarse mediante el mismo procedimiento estático que se usó en la sección 6-1, es decir, colocar la carga unitaria en diversos puntos x de la losa del piso y calcular siempre la función (de fuerza cortante o de momento) en el punto específico P de la viga, figura 6-20b. Al graficar estos valores en función de x se obtiene la línea de influencia para la función en P . En particular, el valor para el momento interno en un panel de la trabe dependerá de dónde se elija el punto P para la línea de influencia, puesto que la magnitud de M_P depende de la ubicación del punto desde el extremo de la trabe. Por ejemplo, si la carga unitaria actúa sobre la losa del piso como se muestra en la figura 6-20c, primero se encuentran las reacciones F_B y F_C sobre la losa y luego se calculan las reacciones en los soportes F_1 y F_2 sobre la trabe. Después se determina el momento interno en P mediante el método de las secciones, figura 6-20d. Esto resulta en $M_P = F_1 d - F_B(d - s)$. Por medio de un análisis similar, es posible determinar la fuerza cortante interna V_P . Sin embargo, en este caso V_P será constante a lo largo del panel BC ($V_P = F_1 - F_B$) y, por lo tanto, no depende de la ubicación exacta d de P en el panel. Por esta razón, las líneas de influencia para la fuerza cortante en vigas de piso se especifican para los paneles de la trabe y no en puntos específicos a lo largo de ésta. La fuerza cortante se conoce entonces como *fuerza cortante de panel*. También debe hacerse notar que como la trabe sólo se ve afectada por las cargas transmitidas por las vigas de piso, generalmente la carga unitaria se coloca en cada ubicación de las vigas de piso para establecer los datos necesarios para dibujar la línea de influencia.

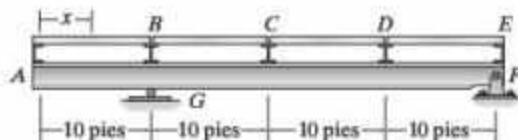
Los siguientes ejemplos numéricos deben clarificar el análisis de fuerzas.



El diseño del sistema del piso en este almacén debe tener en cuenta las ubicaciones críticas de los materiales de almacenamiento sobre el piso. Para este propósito deben utilizarse líneas de influencia. (Fotografía cortesía de Portland Cement Association).

EJEMPLO 6.13

Dibuje la línea de influencia para la fuerza cortante en el panel CD de la viga de piso que se muestra en la figura 6-21a.



(a)

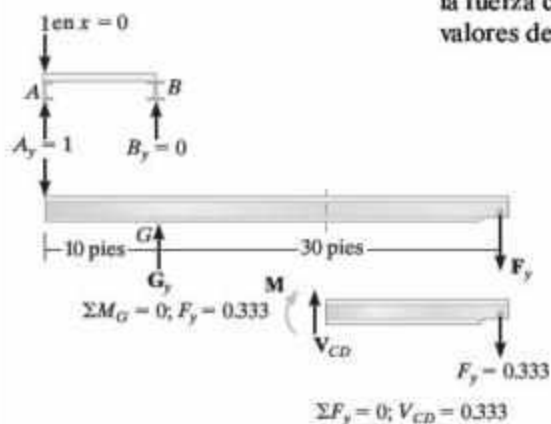
Figura 6-21

x	V_{CD}
0	0.333
10	0
20	-0.333
30	0.333
40	0

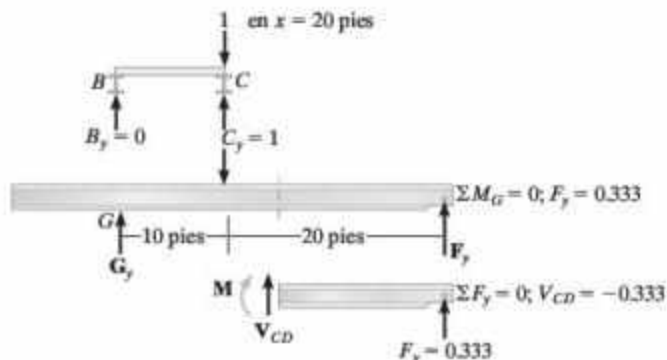
(b)

SOLUCIÓN

Tabulación de valores. La carga unitaria se coloca en cada ubicación de las vigas de piso y se calcula la fuerza cortante en el panel CD . En la figura 6-21b se muestra una tabla con los resultados. Los detalles de los cálculos, cuando $x = 0$ y $x = 20$ pies, se dan en las figuras 6-21c y 6-21d, respectivamente. Observe cómo, en cada caso, primero se calculan las reacciones de las vigas de piso sobre la trabe, luego se determina la reacción del soporte en el punto F de la trabe (G_y no es necesario), y finalmente se considera un segmento de la trabe y se calcula la fuerza cortante de panel interna V_{CD} . Como ejercicio, verifique los valores de V_{CD} cuando $x = 10$ pies, 30 pies y 40 pies.

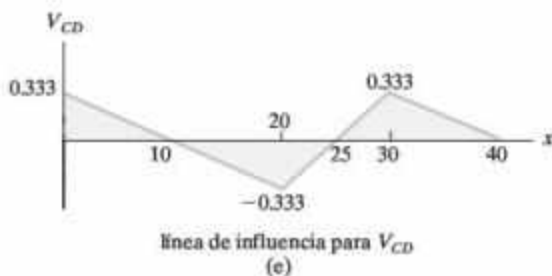


(c)



(d)

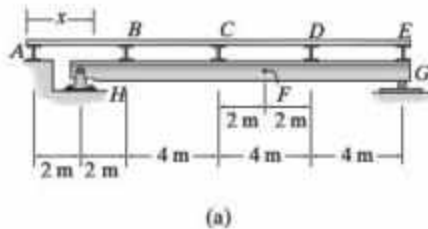
Línea de influencia. Si se grafican los valores tabulares y se conectan los puntos con segmentos de línea recta, la línea de influencia resultante para V_{CD} es como se muestra en la figura 6.21e.



(e)

EJEMPLO 6.14

Dibuje la línea de influencia para el momento en el punto F de la trabe de piso que se muestra en la figura 6-22a.



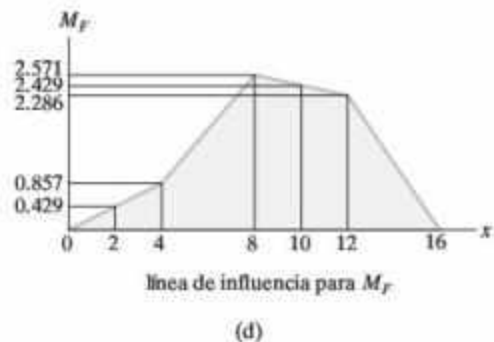
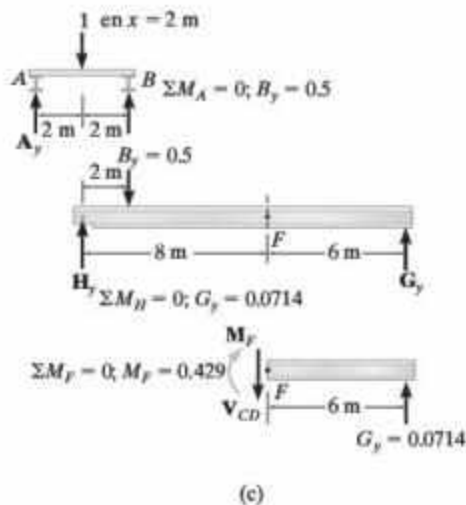
x	M_F
0	0
2	0.429
4	0.857
8	2.571
10	2.429
12	2.286
16	0

(b)

Figura 6-22**SOLUCIÓN**

Tabulación de valores. La carga unitaria se coloca en $x = 0$ y en cada punto posterior en el panel. Los valores correspondientes para M_F se calculan y se muestran en la tabla, figura 6-22b. Los detalles de los cálculos para $x = 2$ m se muestran en la figura 6-22c. Al igual que en el ejemplo anterior, primero es necesario determinar las reacciones de las vigas de piso sobre la trabe, seguidas por la determinación de la reacción de la trabe de apoyo G_y (H_y no es necesaria) y, finalmente, se considera el segmento GF de la viga y se calcula el momento interno M_F . Como ejercicio, determine los otros valores de M_F listados en la figura 6-22b.

Línea de influencia. Al graficar los valores de la tabla se obtiene la línea de influencia para M_F , figura 6-22d.



6.5 Líneas de influencia para armaduras



Los elementos de este puente de armaduras se diseñaron usando las líneas de influencia, de acuerdo con las especificaciones de AASHTO.

Las armaduras se utilizan como elementos principales para el soporte de cargas en puentes. Por lo tanto, para el diseño es importante poder construir las líneas de influencia de cada uno de sus elementos. Como se muestra en la figura 6-23, la carga sobre la cubierta del puente se transmite a los largueros, que a su vez transmiten la carga a las vigas de piso y luego a las *juntas* a lo largo de la cuerda inferior de la armadura. Dado que los elementos de la armadura sólo se ven afectados por la carga en las juntas, es posible obtener los valores de las ordenadas de la línea de influencia para un elemento al cargar cada junta a lo largo de la cubierta con una carga unitaria, para después usar el método de los nudos o el método de las secciones a fin de calcular la fuerza en el elemento. Los datos pueden disponerse en forma tabular, listando la “carga unitaria en la junta” contra la “fuerza en el elemento”. Como una convención, si la fuerza en el elemento es de *tensión* se considera un valor *positivo*; y si es de *compresión* el valor será *negativo*. La línea de influencia para el elemento se construye al graficar los datos y dibujar líneas rectas entre los puntos.

Los siguientes ejemplos ilustran el método de construcción.

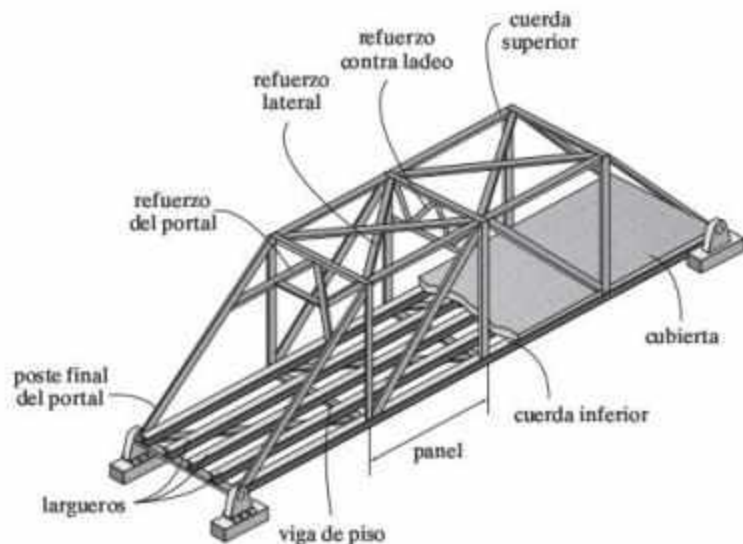


Figura 6-23

EJEMPLO 6.15

Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento GB de la armadura de puente que se muestra en la figura 6-24a.

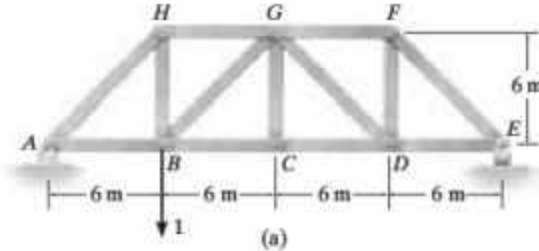


Figura 6-24

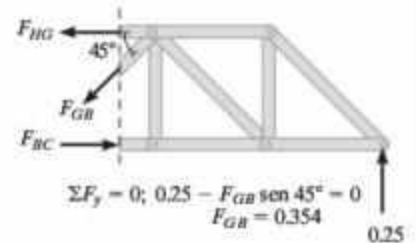
SOLUCIÓN

Tabulación de valores. Aquí, a cada junta sucesiva en la cuerda inferior se le agrega una carga unitaria y se calcula la fuerza en el elemento GB aplicando el método de las secciones, figura 6-24b. Por ejemplo, al colocar la carga unitaria en $x = 6$ m (junta B), primero se calcula la reacción en el soporte E , figura 6-24a, y luego se pasa una sección a través de HG , GB , BC y aislando el segmento de la derecha, se determina la fuerza en GB , figura 6-24c. De la misma manera, se determinan los otros valores enlistados en la tabla.

x	F_{GB}
0	0
6	0.354
12	-0.707
18	-0.354
24	0

(b)

Línea de influencia. Al graficar los datos tabulares y conectar los puntos se obtiene la línea de influencia para el elemento GB , figura 6-24d. Como la línea de influencia se extiende por todo el claro de la armadura, el elemento GB se conoce como un *elemento primario*. Esto significa que GB está sometido a una fuerza, independientemente de dónde esté cargada la cubierta del puente (carretera), excepto, por supuesto, en $x = 8$ m. El punto de fuerza cero, $x = 8$ m, se determina por triángulos semejantes entre $x = 6$ m y $x = 12$ m, es decir, $(0.354 + 0.707)/(12 - 6) = 0.354/x'$, $x' = 2$ m, de modo que $x = 6 + 2 = 8$ m.



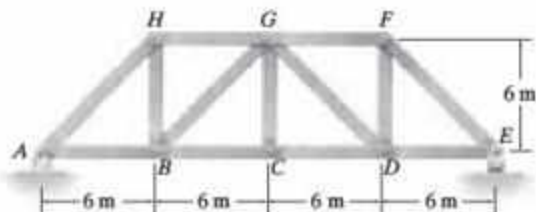
(c)



(d)

EJEMPLO 6.16

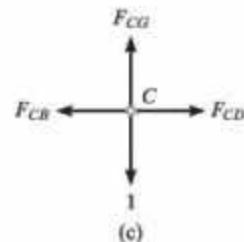
Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento CG de la armadura de puente que se muestra en la figura 6-25a.



(a)

x	F_{CG}
0	0
6	0
12	1
18	0
24	0

(b)



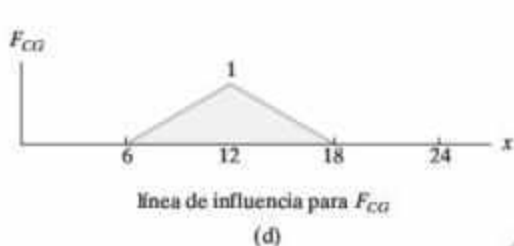
(c)

Figura 6-25

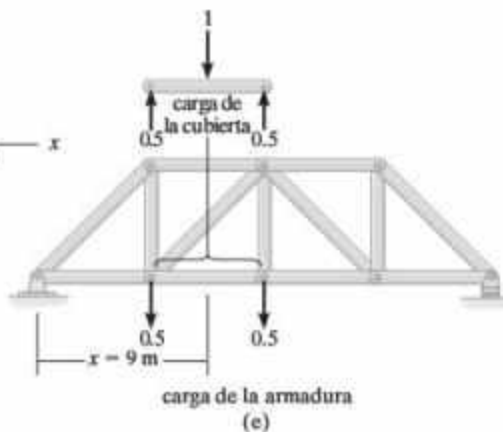
SOLUCIÓN

Tabulación de valores. En la figura 6-25b se muestra una tabla con la posición de la carga unitaria en las juntas de la cuerda inferior contra la fuerza en el elemento CG . Estos valores se obtienen fácilmente al aislar la junta C , figura 6-25c. Aquí se ve que CG es un elemento de fuerza cero a menos que la carga unitaria se aplique en la junta C , en cuyo caso $F_{CG} = 1(T)$.

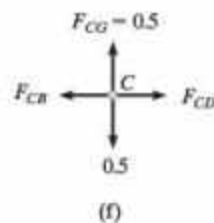
Línea de influencia. Al graficar los datos tabulares y conectar los puntos se obtiene la línea de influencia para el elemento CG como se muestra en la figura 6-25d. En particular, observe que cuando la carga unitaria está en $x = 9$ m, la fuerza en el elemento CG es $F_{CG} = 0.5$. Esta situación requiere que la carga unitaria se ubique sobre la cubierta del puente *entre* las juntas. La transferencia de esta carga desde la cubierta hasta la armadura se muestra en la figura 6-25e. A partir de esto puede verse que, efectivamente, $F_{CG} = 0.5$ al analizar el equilibrio de la junta C , figura 6-25f. Dado que la línea de influencia para CG no se extiende a todo el claro de la armadura, figura 6-25d, el elemento CG se conoce como un *elemento secundario*.



(d)



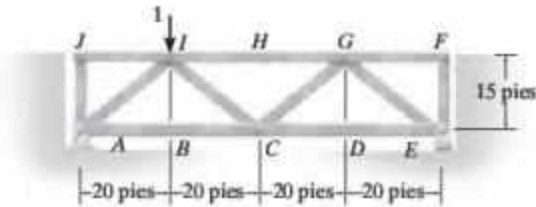
(e)



(f)

EJEMPLO 6.17

Para determinar la fuerza máxima en cada elemento de la armadura Warren que se muestra en la fotografía, primero deben dibujarse las líneas de influencia de los elementos. Si se considera una armadura similar a la de la figura 6.26a, determine la fuerza más grande que puede desarrollarse en el elemento BC debida a una fuerza móvil de 25 k y una carga móvil distribuida de 0.6 k/pie. La carga se aplica en la cuerda superior.



(a)

x	F_{BC}
0	0
20	1
40	0.667
60	0.333
80	0

(b)

Figura 6-26**SOLUCIÓN**

Tabulación de valores. En la figura 6-26b se muestra una tabla de la posición x de la carga unitaria en las juntas a lo largo de la cuerda superior contra la fuerza en el elemento BC . Para los cálculos puede usarse el método de las secciones. Por ejemplo, cuando la carga unitaria está en la junta I ($x = 20$ pies), figura 6-26a, primero se determina la reacción E_y ($E_y = 0.25$). Después, la armadura se secciona a través de BC , IC y HI y se aísla el segmento de la derecha, figura 6-26c. F_{BC} se obtiene al sumar los momentos respecto al punto I , para eliminar F_{HI} y F_{IC} . Los demás valores de la figura 6-26b se determinan de igual manera.

Línea de influencia. Al graficar los valores tabulares se obtiene la línea de influencia, figura 6-26d. Por inspección, BC es un elemento primario. ¿Por qué?

Fuerza viva concentrada. La mayor fuerza en el elemento BC ocurre cuando la fuerza móvil de 25 k se coloca en $x = 20$ pies. Por lo tanto,

$$F_{BC} = (1.00)(25) = 25.0 \text{ k}$$

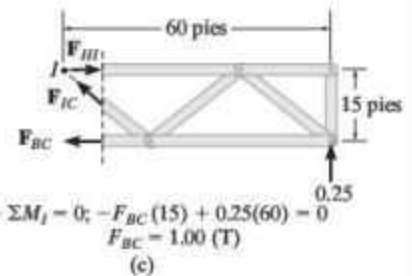
Carga viva distribuida. La carga viva uniforme debe colocarse sobre toda la cubierta de la armadura para crear la mayor fuerza de tensión BC .* Entonces,

$$F_{BC} = \left[\frac{1}{2}(80)(1.00) \right] 0.6 = 24.0 \text{ k}$$

Fuerza máxima total.

$$(F_{BC})_{\max} = 25.0 \text{ k} + 24.0 \text{ k} = 49.0 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

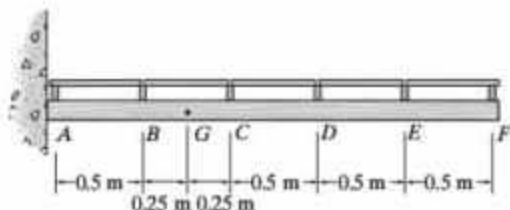
*La mayor fuerza de tensión en el elemento GB del ejemplo 6-15 se crea cuando la carga distribuida actúa sobre la cubierta de la armadura desde $x = 0$ hasta $x = 8$ m, figura 6-24d.



(d)

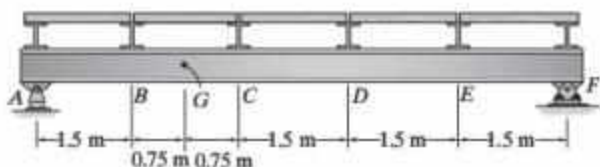
PROBLEMAS

6-26. Una carga viva uniforme de 1.8 kN/m y una sola fuerza viva concentrada de 4 kN se colocan sobre las vigas de piso. Determine (a) la fuerza cortante positiva máxima en el panel BC de la trabe, y (b) el momento máximo en el punto G de la trabe.



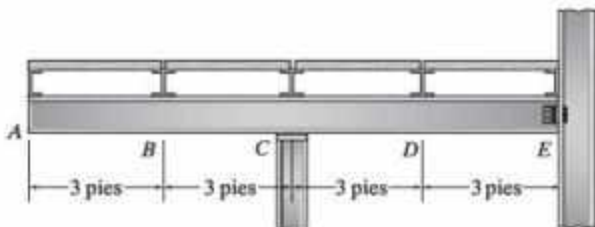
Prob. 6-26

6-27. Una carga viva uniforme de 2.8 kN/m y una sola fuerza viva concentrada de 20 kN se colocan sobre las vigas de piso. Si las vigas también soportan una carga muerta uniforme de 700 N/m , determine (a) la fuerza cortante positiva máxima en el panel BC de la trabe y (b) el momento positivo máximo en el punto G de la trabe.



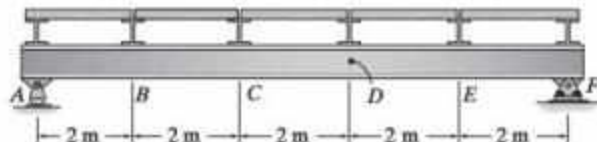
Prob. 6-27

*6-28. Una carga viva uniforme de 2 k/pie y una sola fuerza viva concentrada de 6 k se colocan sobre las vigas de piso. Si las vigas también soportan una carga muerta uniforme de 350 lb/pie , determine (a) la fuerza cortante positiva máxima del panel CD de la trabe, y (b) el momento negativo máximo en el punto D de la trabe. Suponga que el soporte en C es un rodillo y que E está articulado.



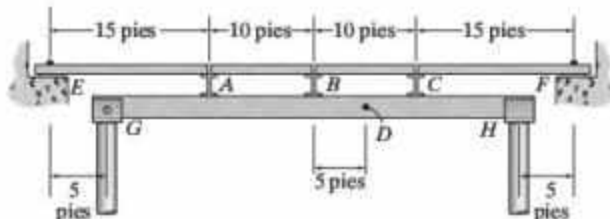
Prob. 6-28

6-29. Dibuje la línea de influencia para (a) la fuerza cortante en el panel BC de la trabe, y (b) el momento en D .



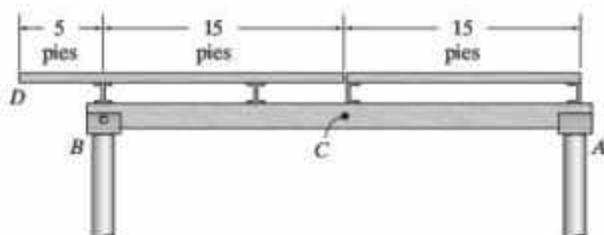
Prob. 6-29

6-30. Una carga viva uniforme de 250 lb/pie y una sola fuerza viva concentrada de 1.5 k deben colocarse sobre las vigas de piso. Determine (a) la fuerza cortante positiva máxima en el panel AB , y (b) el momento máximo en D . Suponga que en los soportes sólo se producen reacciones verticales.



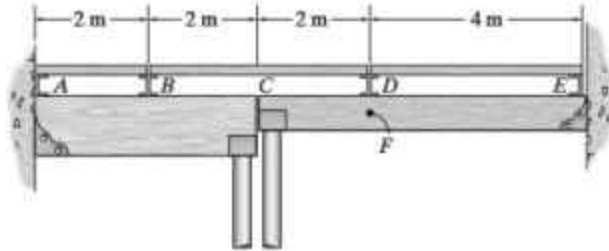
Prob. 6-30

6-31. Una carga viva uniforme de 0.6 k/pie y una sola fuerza viva concentrada de 5 k deben colocarse sobre las vigas superiores. Determine (a) la fuerza cortante positiva máxima en el panel BC de la trabe, y (b) el momento positivo máximo en C . Suponga que el soporte en B es un rodillo y que D está articulado.



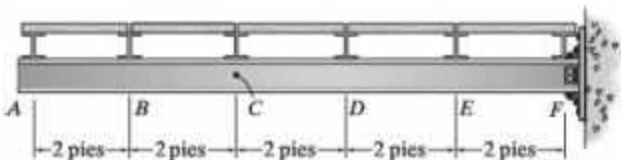
Prob. 6-31

***6-32.** Dibuje la línea de influencia para el momento en el punto F de la trabe. Determine el momento vivo positivo máximo en el punto F de la trabe, si una sola fuerza viva concentrada de 8 kN se mueve a través de las vigas de piso superiores. Suponga que los soportes de todos los elementos sólo pueden ejercer fuerzas hacia arriba o hacia abajo sobre los elementos.



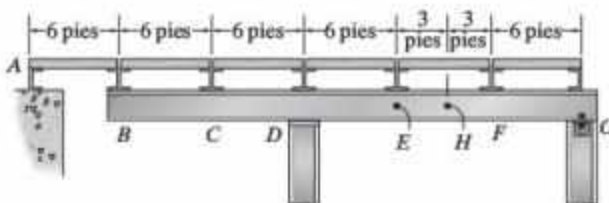
Prob. 6-32

6-33. Una carga viva uniforme de 4 k/pie y una sola fuerza viva concentrada de 20 k se colocan sobre las vigas de piso. Si las vigas también soportan una carga muerta uniforme de 700 lb/pie, determine (a) la fuerza cortante negativa máxima en el panel DE de la trabe, y (b) el momento negativo máximo en el punto C de la trabe.



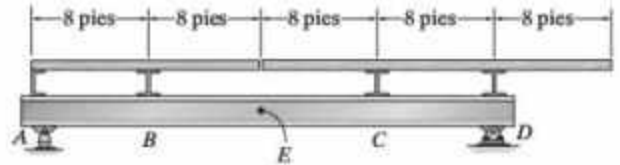
Prob. 6-33

6-34. Una carga viva uniforme de 0.2 k/pie y una sola fuerza viva concentrada de 4 k se colocan sobre las vigas de piso. Determine (a) la fuerza cortante positiva máxima en el panel DE de la trabe, y (b) el momento positivo máximo en H .



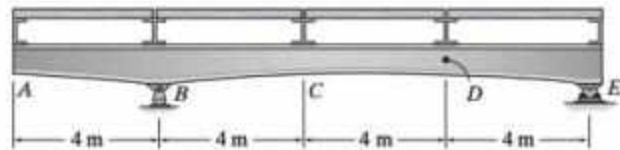
Prob. 6-34

6-35. Dibuje la línea de influencia para la fuerza cortante en el panel CD de la trabe. Determine la fuerza cortante negativa máxima en el panel CD , debida a una carga viva uniforme de 500 lb/pie que actúa sobre las vigas superiores.



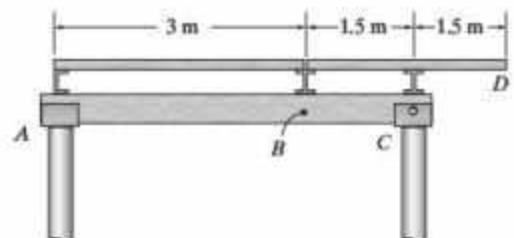
Prob. 6-35

***6-36.** Una carga viva uniforme de 6 kN/m y una sola fuerza viva concentrada de 15 kN se colocan sobre las vigas de piso. Si las vigas también soportan una carga muerta uniforme de 600 N/m, determine (a) la fuerza cortante positiva máxima en el panel CD de la trabe, y (b) el momento positivo máximo en el punto D de la trabe.



Prob. 6-36

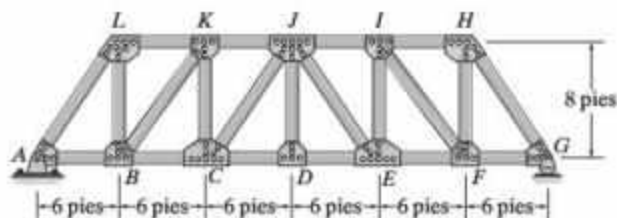
6-37. Una carga viva uniforme de 1.75 kN/m y una sola fuerza viva concentrada de 8 kN se colocan sobre las vigas de piso. Si las vigas también soportan una carga muerta uniforme de 250 N/m, determine (a) la fuerza cortante negativa máxima en el panel BC de la trabe, y (b) el momento positivo máximo en B .



Prob. 6-37

6-38. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en (a) el elemento KJ y (b) el elemento CJ .

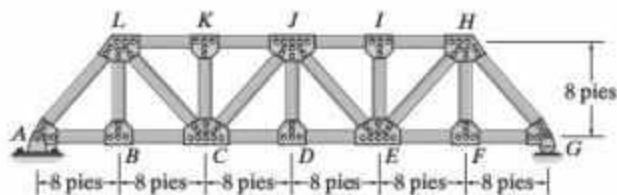
6-39. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en (a) el elemento JI ; (b) el elemento IE , y (c) el elemento EF .



Probs. 6-38/6-39

***6-40.** Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento KJ .

6-41. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento JE .

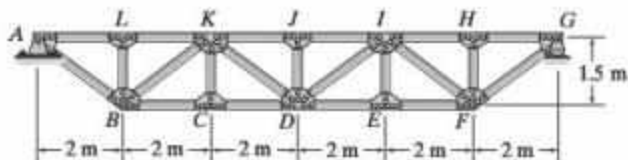


Probs. 6-40/6-41

6-42. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento CD .

6-43. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento JK .

***6-44.** Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento DK .

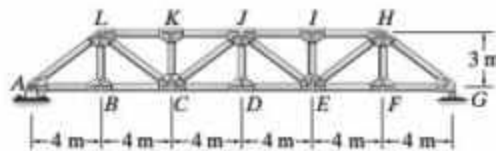


Probs. 6-42/6-43/6-44

6-45. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en (a) el elemento EH y (b) el elemento JE .

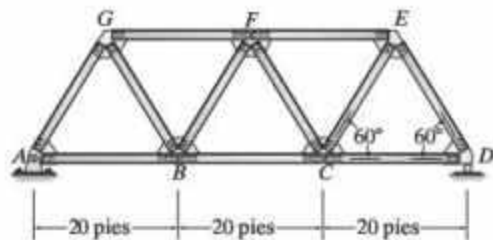
6-46. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento JI .

6-47. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento AL .



Probs. 6-45/6-46/6-47

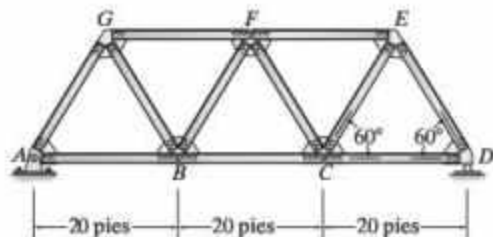
***6-48.** Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento BC de la armadura Warren. Indique los valores numéricos de los picos. Todos los elementos tienen la misma longitud.



Prob. 6-48

6-49. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento BF de la armadura Warren. Indique los valores numéricos de los picos. Todos los elementos tienen la misma longitud.

6-50. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento FE de la armadura Warren. Indique los valores numéricos de los picos. Todos los elementos tienen la misma longitud.

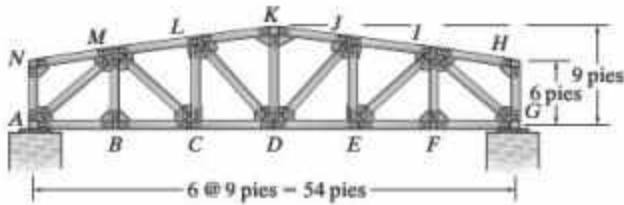


Probs. 6-49/6-50

6-51. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento CL .

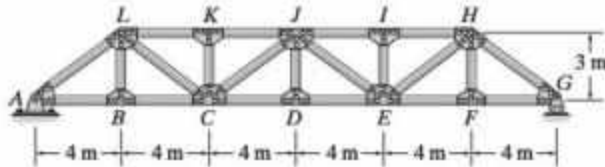
***6-52.** Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento DL .

6-53. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento CD .



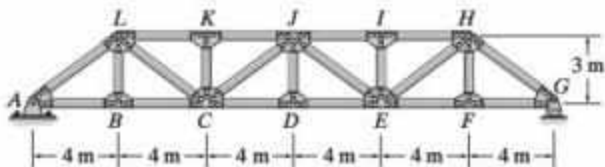
Probs. 6-51/6-52/6-53

6-54. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento CD .



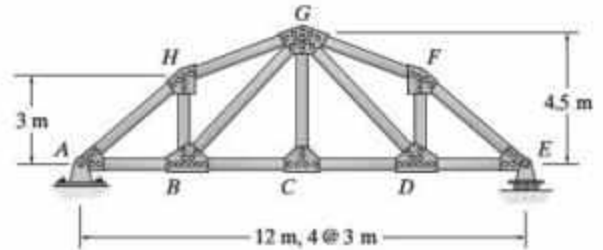
Prob. 6-54

6-55. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento KJ .



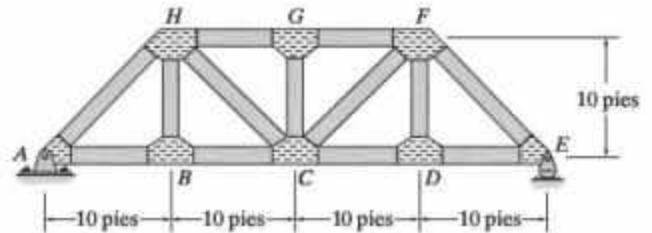
Prob. 6-55

***6-56.** Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento GD , luego determine la fuerza máxima (en tensión o compresión) que puede desarrollarse en este elemento debido a una carga viva uniforme de 3 kN/m que actúa sobre la cubierta del puente a lo largo de la cuerda inferior de la armadura.



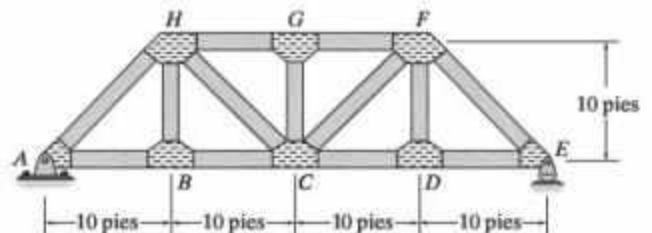
Prob. 6-56

6-57. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento CD y después determine la fuerza máxima (en tensión o compresión) que puede desarrollarse en este elemento debido a la carga viva uniforme de 800 lb/pie , la cual actúa a lo largo de la cuerda inferior de la armadura.



Prob. 6-57

6-58. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento CF y después determine la fuerza máxima (en tensión o compresión) que puede desarrollarse en este elemento debido a la carga viva uniforme de 800 lb/pie , que se transmite a la armadura lo largo de su cuerda inferior.



Prob. 6-58

6.6 Influencia máxima en un punto debido a una serie de cargas concentradas



Cuando el tren pasa sobre este puente de vigas, la locomotora y sus vagones ejercen reacciones verticales sobre la trabe. Para el diseño del puente, deben considerarse estas reacciones junto con la carga muerta del puente.

Una vez que se ha establecido la línea de influencia de una función para un punto de una estructura, el efecto máximo causado por una fuerza viva concentrada se determina al multiplicar la ordenada máxima de la línea de influencia por la magnitud de la fuerza. Sin embargo, en algunos casos se deben colocar *varias* fuerzas concentradas sobre la estructura; por ejemplo, las cargas de las ruedas de un camión o un tren. Para determinar el efecto máximo en este caso puede usarse un procedimiento de prueba y error, o bien un método basado en el cambio en la función que se presente con el movimiento de la carga. A continuación se dará una explicación de cada uno de estos métodos, específicamente aplicados a la fuerza cortante y el momento.

Fuerza cortante. Considere la viga simplemente apoyada con la línea de influencia asociada para la fuerza cortante en el punto C de la figura 6-27a. La *fuerza cortante positiva* máxima en el punto C está determinada por la serie de cargas concentrada (ruedas) que se mueven de derecha a izquierda sobre la viga. La carga crítica se producirá cuando una de las cargas se coloque *justo a la derecha* del punto C , el cual es coincidente con el pico positivo de la línea de influencia. Entonces, cada uno de los tres casos posibles puede investigarse mediante prueba y error, figura 6-27b. Se tiene

$$\text{Caso 1: } (V_C)_1 = 1(0.75) + 4(0.625) + 4(0.5) = 5.25 \text{ k}$$

$$\text{Caso 2: } (V_C)_2 = 1(-0.125) + 4(0.75) + 4(0.625) = 5.375 \text{ k}$$

$$\text{Caso 3: } (V_C)_3 = 1(0) + 4(-0.125) + 4(0.75) = 2.5 \text{ k}$$

En el caso 2, con la fuerza de 1 k localizada a 5⁺ pies del soporte izquierdo, se obtiene el valor más grande de V_C y, por lo tanto, representa la carga crítica. En realidad, la investigación del caso 3 no es necesaria, puesto que por inspección puede verse que un arreglo de cargas como éste generaría un valor de $(V_C)_3$, que sería menor que $(V_C)_2$.

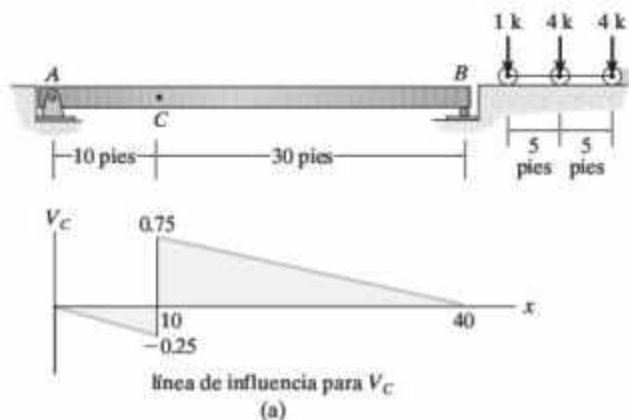
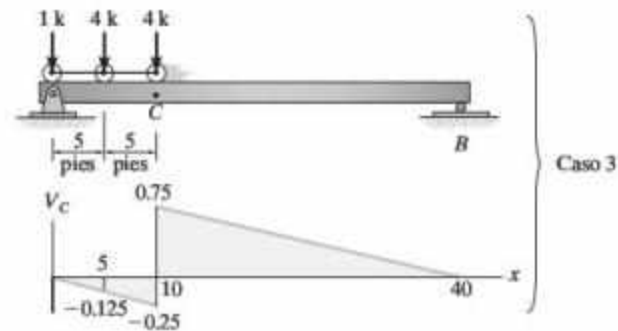
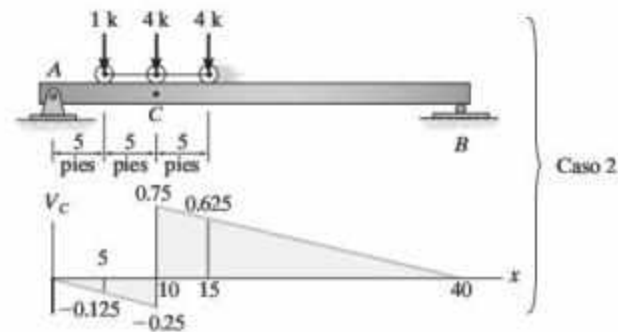
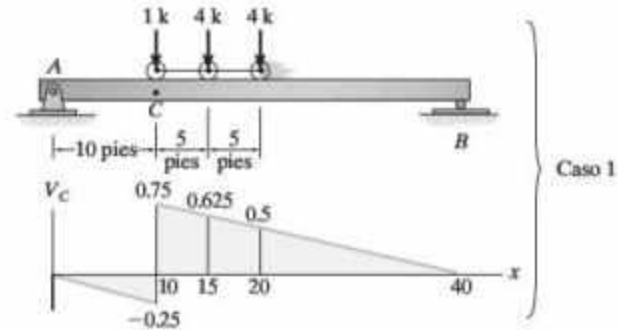
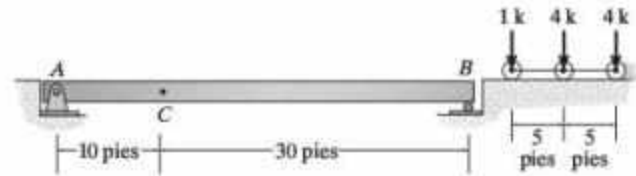


Figura 6-27



(b)

Figura 6-27

Cuando muchas cargas concentradas actúan sobre el claro, como en el caso de la carga de E-72 de la figura 1-11, los cálculos por prueba y error utilizados anteriormente pueden resultar tediosos. En vez de esto, la posición crítica de las cargas puede determinarse de una manera más directa si se encuentra el cambio en la fuerza cortante, ΔV , que se produce cuando las cargas se mueven del caso 1 al caso 2; luego del caso 2 al caso 3 y así sucesivamente. Siempre que cada ΔV calculado sea *positivo*, la nueva posición producirá una fuerza cortante más grande en el punto C de la viga que la posición anterior. Se investiga cada movimiento hasta que se presente un cambio negativo en la fuerza cortante. Cuando esto ocurre, la posición anterior de las cargas proporcionará el valor crítico. El cambio ΔV en la fuerza cortante para una carga P que se mueve desde la posición x_1 hasta x_2 sobre una viga puede determinarse al multiplicar P por el cambio en la ordenada de la línea de influencia, es decir $(y_2 - y_1)$. Si la pendiente de la línea de influencia es s , entonces $(y_2 - y_1) = s(x_2 - x_1)$ y, por lo tanto

$$\Delta V = Ps(x_2 - x_1) \quad (6-1)$$

Línea inclinada

Si la carga se mueve más allá de un punto en el que hay una discontinuidad o "salto" en la línea de influencia, como el punto C de la figura 6-27a, entonces el cambio en la fuerza cortante no es más que

$$\Delta V = P(y_2 - y_1) \quad (6-2)$$

Salto

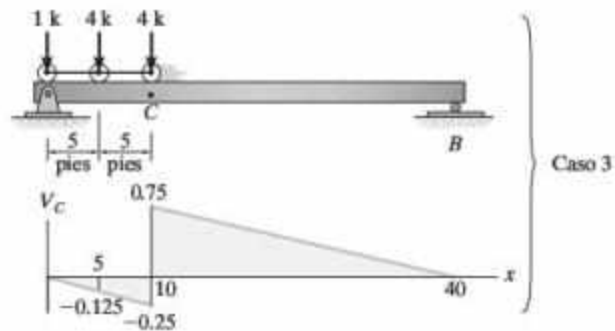
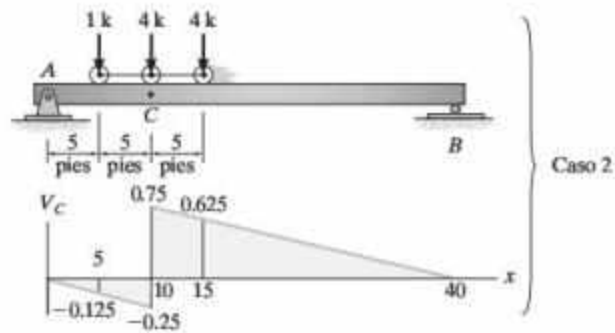
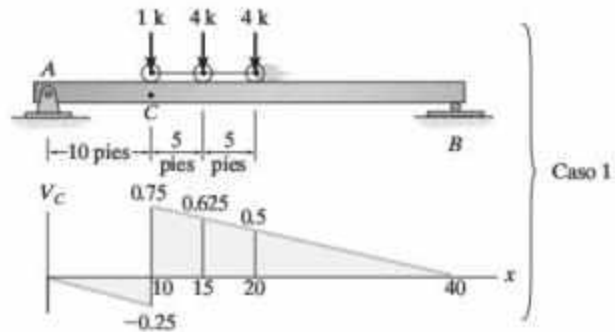
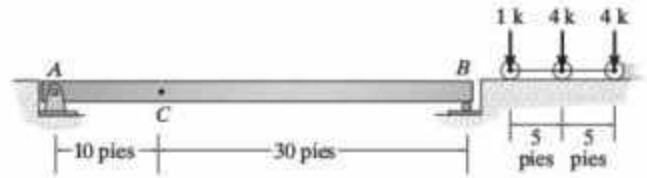
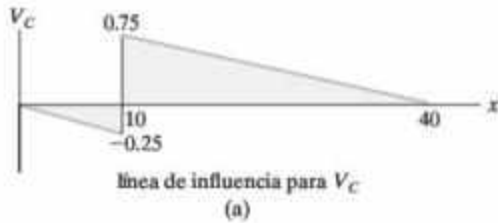
El uso de las ecuaciones anteriores se ilustrará con referencia a la viga, la carga y la línea de influencia para V_C , que se muestra en la figura 6-28a. Observe que la magnitud de la pendiente de la línea de influencia es $s = 0.75/(40 - 10) = 0.25/10 = 0.025$, y el salto en C tiene una magnitud de $0.75 + 0.25 = 1$. Considere que las cargas del caso 1 se mueven 5 pies hasta el caso 2, figura 6-28b. Cuando esto ocurre, la carga de 1 k salta *hacia abajo* (-1) y *todas* las cargas se mueven *hacia arriba* por la pendiente de la línea de influencia. Esto causa un cambio de la fuerza cortante,

$$\Delta V_{1-2} = 1(-1) + [1 + 4 + 4](0.025)(5) = +0.125 \text{ k}$$

Como ΔV_{1-2} es positivo, el caso 2 generará un valor más grande para V_C que el caso 1. [Compare las respuestas para $(V_C)_1$ y $(V_C)_2$ calculadas previamente, donde de hecho $(V_C)_2 = (V_C)_1 + 0.125$.] Al investigar ΔV_{2-3} que se produce cuando el caso 2 se mueve hasta el caso 3, figura 6-28b, debe tenerse en cuenta el salto hacia abajo (negativo) de la carga de 4 k y el movimiento horizontal de 5 pies de todas las cargas *hacia arriba* por la pendiente de la línea de influencia. Se tiene

$$\Delta V_{2-3} = 4(-1) + (1 + 4 + 4)(0.025)(5) = -2.875 \text{ k}$$

Como ΔV_{2-3} es negativo, el caso 2 es la posición crítica de la carga, como se determinó previamente.



(b)

Figura 6-28



Las traveses de este puente deben resistir el momento máximo causado por el peso de este avión a propulsión mientras pasa sobre él.

Momento. Los métodos anteriores también pueden utilizarse para determinar la posición crítica de una serie de fuerzas concentradas para que creen el mayor momento interno en un punto específico de una estructura. Por supuesto, primero es necesario dibujar la línea de influencia para el momento en el punto y determinar las pendientes s de sus segmentos de línea. Para un movimiento horizontal $(x_2 - x_1)$ de una fuerza concentrada P , el cambio en el momento ΔM , es equivalente a la magnitud de la fuerza por el cambio en la ordenada de la línea de influencia bajo la carga, es decir,

$$\Delta M = Ps(x_2 - x_1) \quad \text{Línea inclinada} \quad (6-3)$$

Como ejemplo, considere la viga, la carga y la línea de influencia para el momento en el punto C de la figura 6-29a. Si cada una de las tres fuerzas concentradas se coloca sobre la viga, en forma coincidente con el pico de la línea de influencia, se obtendrá la mayor influencia de cada fuerza. En la figura 6-29b se muestran los tres casos de carga. Cuando las cargas del caso 1 se mueven 4 pies a la izquierda hasta el caso 2, se observa que la carga de 2 k disminuye ΔM_{1-2} , ya que la pendiente $(7.5/10)$ es descendente, figura 6-29a. Asimismo, las fuerzas de 4 k y 3 k ocasionan un aumento de ΔM_{1-2} , puesto que la pendiente $[7.5/(40 - 10)]$ es ascendente. Se tiene

$$\Delta M_{1-2} = -2\left(\frac{7.5}{10}\right)(4) + (4 + 3)\left(\frac{7.5}{40 - 10}\right)(4) = 1.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

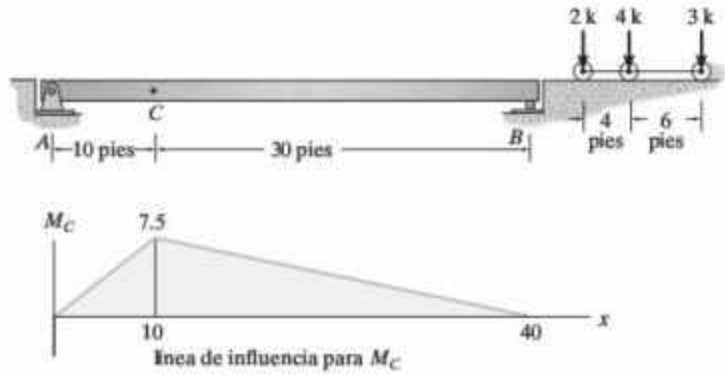
Como ΔM_{1-2} es positivo, es necesario investigar aún más el movimiento de las cargas de 6 pies del caso 2 al caso 3.

$$\Delta M_{2-3} = -(2 + 4)\left(\frac{7.5}{10}\right)(6) + 3\left(\frac{7.5}{40 - 10}\right)(6) = -22.5 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

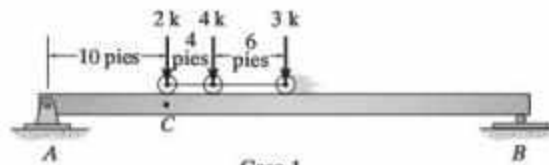
Aquí el cambio es negativo, por lo que el mayor momento en C ocurrirá cuando la viga esté cargada como se muestra en el caso 2, figura 6-29c. Por lo tanto, el momento máximo en C es

$$(M_C)_{\max} = 2(4.5) + 4(7.5) + 3(6.0) = 57.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

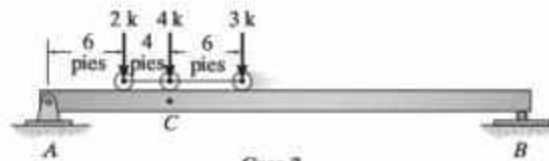
Los siguientes ejemplos ilustran aún más este método.



(a)



Caso 1

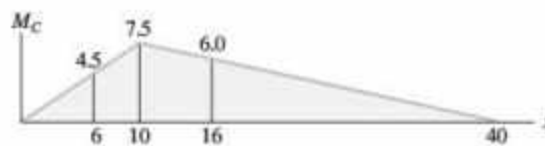


Caso 2



Caso 3

(b)

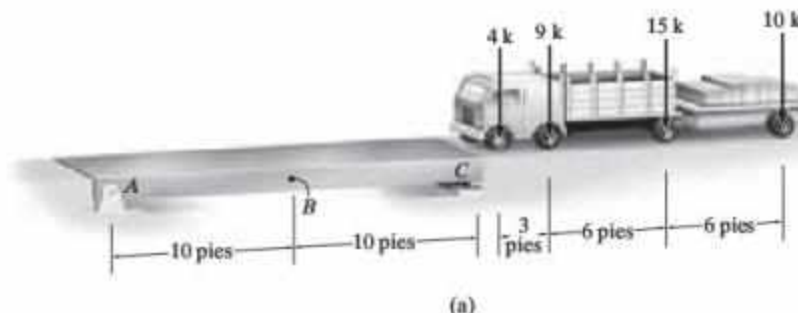


(c)

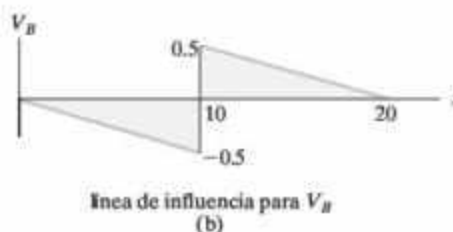
Figura 6-29

EJEMPLO 6.18

Determine la fuerza cortante positiva máxima creada en el punto B de la viga que se muestra en la figura 6-30a, debido a las cargas de las ruedas del camión en movimiento.

**Figura 6-30****SOLUCIÓN**

La línea de influencia para la fuerza cortante en B se muestra en la figura 6-30b.



Movimiento de 3 pies de la carga de 4 k. Imagine que la carga de 4 k actúa justo a la derecha del punto B , de manera que se obtiene su influencia positiva máxima. Dado que el segmento de viga BC tiene 10 pies de largo, la carga de 10 k no está todavía sobre la viga. Cuando el camión se mueve 3 pies a la izquierda, la carga de 4 k salta 1 unidad hacia abajo sobre la línea de influencia y las cargas de 4 k, 9 k y 15 k crean un incremento positivo en ΔV_B , puesto que la pendiente es ascendente hacia la izquierda. Aunque la carga de 10 k también se mueve hacia adelante 3 pies, aún no está sobre la viga. Por lo tanto,

$$\Delta V_B = 4(-1) + (4 + 9 + 15)\left(\frac{0.5}{10}\right)3 = +0.2 \text{ k}$$

Movimiento de 6 pies de la carga de 9 k. Cuando la carga de 9 k actúa justo a la derecha de B , y después el camión se mueve 6 pies a la izquierda, se tiene

$$\Delta V_B = 9(-1) + (4 + 9 + 15)\left(\frac{0.5}{10}\right)(6) + 10\left(\frac{0.5}{10}\right)(4) = +1.4 \text{ k}$$

Observe en el cálculo que la carga de 10 k sólo se mueve 4 pies sobre la viga.

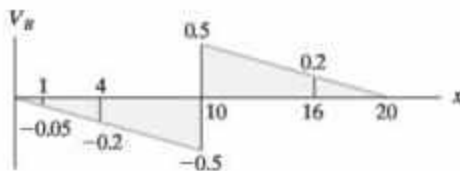
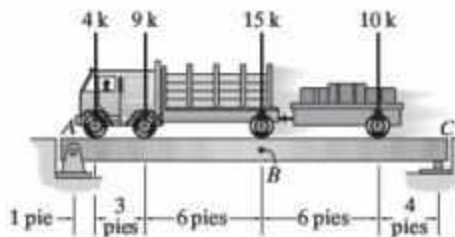
Movimiento de 6 pies de la carga de 15 k. Si la carga de 15 k se coloca justo a la derecha de B y después el camión se mueve 6 pies a la izquierda, la carga de 4 k sólo se mueve un pie hasta que está fuera de la viga, y también la carga de 9 k se mueve sólo 4 pies hasta que queda fuera de la viga. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta V_B &= 15(-1) + 4\left(\frac{0.5}{10}\right)(1) + 9\left(\frac{0.5}{10}\right)(4) + (15 + 10)\left(\frac{0.5}{10}\right)(6) \\ &= -5.5 \text{ k}\end{aligned}$$

Como ΔV_B ahora es negativo, la posición correcta de las cargas se produce cuando la carga de 15 k está justo a la derecha del punto B , figura 6-30c. En consecuencia,

$$\begin{aligned}(V_B)_{\max} &= 4(-0.05) + 9(-0.2) + 15(0.5) + 10(0.2) \\ &= 7.5 \text{ k} \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

En la práctica, también debe considerarse el movimiento del camión de izquierda a derecha y luego elegir el valor máximo entre estas dos situaciones



(c)

EJEMPLO 6.19

Determine el momento positivo máximo creado en el punto B de la viga que se muestra en la figura 6-31a, debido a las cargas de las ruedas de la grúa.

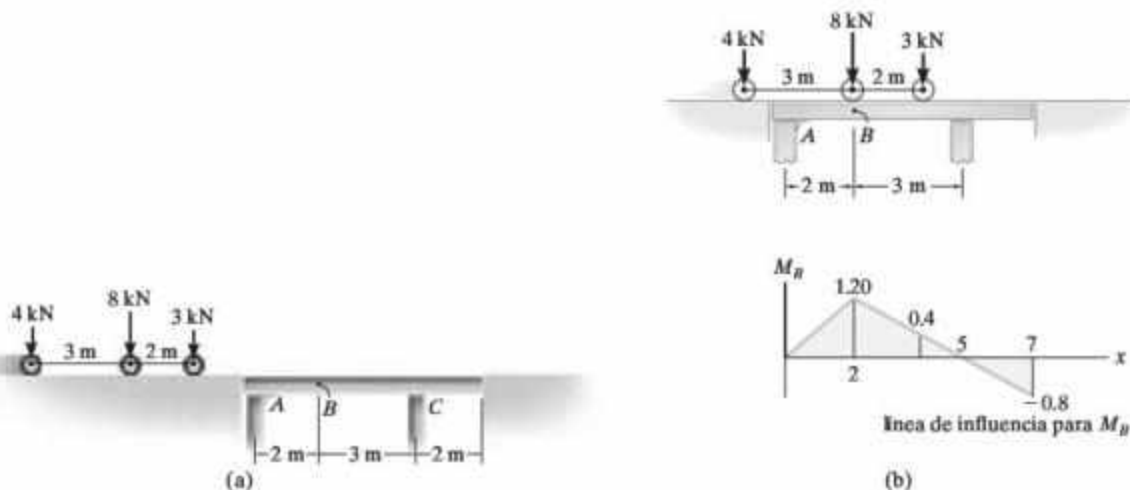


Figura 6-31

SOLUCIÓN

La línea de influencia para el momento en B se muestra en la figura 6-31b.

Movimiento de 2 m de la carga de 3 kN. Si se supone que la carga de 3 kN actúa en B y luego se mueve 2 m a la derecha, figura 6-31b, el cambio en el momento es

$$\Delta M_B = -3\left(\frac{1.20}{3}\right)(2) + 8\left(\frac{1.20}{3}\right)(2) = 7.20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

¿Por qué no se incluye la carga de 4 kN en los cálculos?

Movimiento de 3 m de la carga de 8 kN. Si se supone que la carga de 8 kN actúa en B y luego se mueve 3 m hacia la derecha, el cambio en el momento es

$$\begin{aligned} \Delta M_B &= -3\left(\frac{1.20}{3}\right)(3) - 8\left(\frac{1.20}{3}\right)(3) + 4\left(\frac{1.20}{2}\right)(2) \\ &= -8.40 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

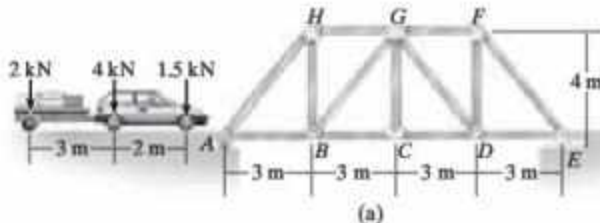
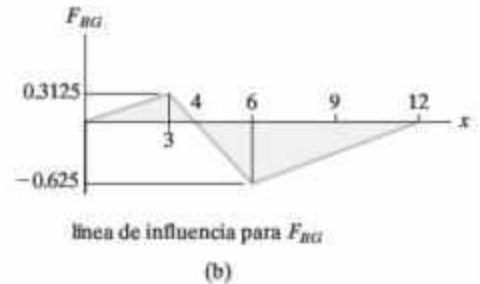
Observe aquí que la carga de 4 kN estaba inicialmente 1 m fuera de la viga, por lo que se mueve sólo 2 m sobre la viga.

Como no hay un cambio de signo en DM_B , la posición correcta de las cargas para el momento positivo máximo en B se produce cuando la fuerza de 8 kN está en B , figura 6-31b. Por lo tanto,

$$(M_B)_{\max} = 8(1.20) + 3(0.4) = 10.8 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 6.20

Determine la fuerza máxima de compresión desarrollada en el elemento BG de la armadura lateral que se muestra en la figura 6-32a, debido a las cargas de las ruedas del lado derecho del automóvil y el remolque. Suponga que las cargas se aplican directamente a la armadura y que se mueven sólo a la derecha.

**Figura 6-32****SOLUCIÓN**

La línea de influencia para la fuerza en el elemento BG se muestra en la figura 6-32b. Aquí se usará un enfoque de prueba y error para obtener la solución. Como se busca la máxima fuerza negativa (compresión) en BG , se comienza de la siguiente manera:

Carga de 1.5 kN en el punto C. En este caso,

$$F_{BG} = 1.5 \text{ kN}(-0.625) + 4(0) + 2 \text{ kN}\left(\frac{0.3125}{3 \text{ m}}\right)(1 \text{ m})$$

$$= -0.729 \text{ kN}$$

Carga de 4 kN en el punto C. Por inspección, éste parece un caso más razonable que el anterior.

$$F_{BG} = 4 \text{ kN}(-0.625) + 1.5 \text{ kN}\left(\frac{-0.625}{6 \text{ m}}\right)(4 \text{ m}) + 2 \text{ kN}(0.3125)$$

$$= -2.50 \text{ kN}$$

Carga de 2 kN en el punto C. En este caso todas las cargas crearán una fuerza de compresión en BC .

$$F_{BG} = 2 \text{ kN}(-0.625) + 4 \text{ kN}\left(\frac{-0.625}{6 \text{ m}}\right)(3 \text{ m}) + 1.5 \text{ kN}\left(\frac{-0.625}{6 \text{ m}}\right)(1 \text{ m})$$

$$= -2.66 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Como este último caso resulta en la respuesta más grande, la carga crítica se produce cuando la carga de 2 kN está en C.

6.7 Fuerza cortante y momento máximo absoluto

En la sección 6-6 se desarrollaron los métodos para calcular la fuerza cortante y el momento máximos en un *punto específico* de una viga debido a una serie de cargas móviles concentradas. Un problema más general involucra la determinación tanto de la *ubicación del punto* en la viga como de la *posición de la carga en la viga* de modo que se obtenga la fuerza cortante y el momento *máximo absolutos* resultantes de las cargas. Si la viga está en voladizo o simplemente apoyada, este problema puede resolverse con facilidad.

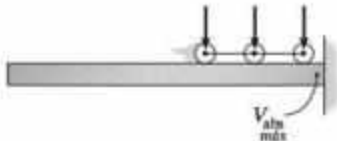


Figura 6-33

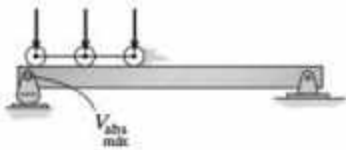


Figura 6-34

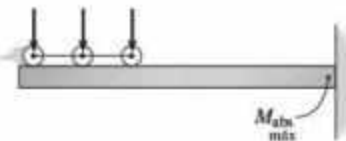


Figura 6-35

Fuerza cortante. Para una *viga en voladizo* la fuerza cortante máxima absoluta se producirá en un punto situado justo enseguida del soporte fijo. La fuerza cortante máxima se encuentra por el método de las secciones, con las cargas ubicadas en cualquier lugar del claro, figura 6-33.

Para las *vigas simplemente apoyadas* la fuerza cortante máxima absoluta se produce justo enseguida de uno de los soportes. Por ejemplo, si las cargas son equivalentes, se colocan de forma que la primera en la secuencia se ubique cerca del soporte, como en la figura 6-34.

Momento. El momento máximo absoluto de una *viga en voladizo* se produce en el mismo punto donde ocurre la fuerza cortante máxima absoluta, aunque en este caso las cargas concentradas deben ubicarse en el *otro extremo* de la viga, como en la figura 6-35.

Para una *viga simplemente apoyada*, en general, la posición crítica de las cargas y el momento máximo absoluto asociado no pueden determinarse por inspección. Sin embargo, es posible determinar la posición de manera analítica. Para fines de este análisis, considere una viga sometida a las fuerzas F_1 , F_2 , F_3 que se muestra en la figura 6-36a. Dado que el diagrama de momento para una serie de fuerzas concentradas consta de segmentos de recta que tienen picos en cada fuerza, el momento máximo absoluto ocurrirá bajo una de las fuerzas. Suponga que este momento máximo se produce bajo F_2 . La posición de las cargas F_1 , F_2 , F_3 sobre la viga estará especificada por la distancia x , medida desde F_2 hasta la línea central de la viga, tal como se muestra. Para determinar un valor específico de x , primero se obtiene la fuerza resultante del sistema, F_R , y su dis-

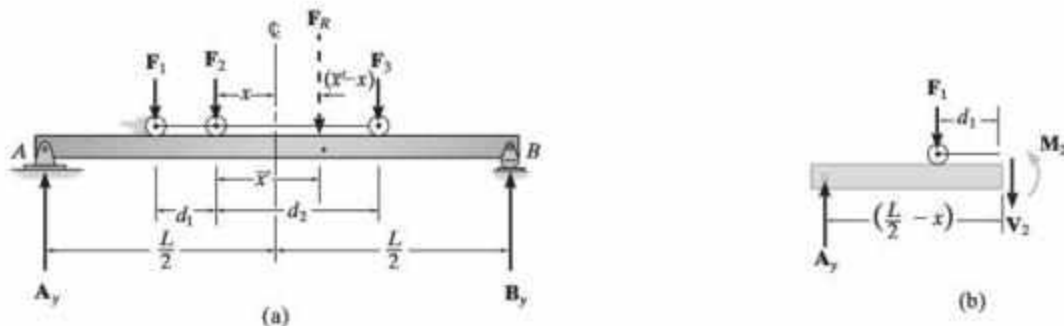


Figura 6-36

tancia \bar{x}' medida desde F_2 . Una vez hecho esto, los momentos se suman respecto a B , de donde se obtiene la reacción a la izquierda de la viga, A_y , es decir,

$$\Sigma M_B = 0; \quad A_y = \frac{1}{L} (F_R) \left[\frac{L}{2} - (\bar{x}' - x) \right]$$

Si la viga se secciona justo a la izquierda de F_2 , el diagrama de cuerpo libre resultante es como se muestra en la figura 6-36b. Por lo tanto, el momento M_2 bajo F_2 es

$$\begin{aligned} \Sigma M = 0; \quad M_2 &= A_y \left(\frac{L}{2} - x \right) - F_1 d_1 \\ &= \frac{1}{L} (F_R) \left[\frac{L}{2} - (\bar{x}' - x) \right] \left(\frac{L}{2} - x \right) - F_1 d_1 \\ &= \frac{F_R L}{4} - \frac{F_R \bar{x}'}{2} - \frac{F_R x^2}{L} + \frac{F_R x \bar{x}'}{L} - F_1 d_1 \end{aligned}$$

Para que M_2 sea máximo se requiere

$$\frac{dM_2}{dx} = \frac{-2F_R x}{L} + \frac{F_R \bar{x}'}{L} = 0$$

o bien,

$$x = \frac{\bar{x}'}{2}$$

Por lo tanto, se puede concluir que el *momento máximo absoluto en una viga simplemente apoyada se produce bajo una de las fuerzas concentradas, por lo que esta fuerza se coloca sobre la viga de modo que ella y la fuerza resultante del sistema sean equidistantes desde la línea central de la viga*. Puesto que hay una serie de cargas sobre el claro (por ejemplo, F_1, F_2, F_3 en la figura 6-36a), este principio tendrá que aplicarse a cada carga de la serie y deberá calcularse en cada momento máximo correspondiente. Por comparación, el momento más grande será el momento máximo absoluto. Sin embargo, como regla general el momento máximo absoluto suele ocurrir bajo la fuerza más grande que se ubica más cerca de la fuerza resultante del sistema.

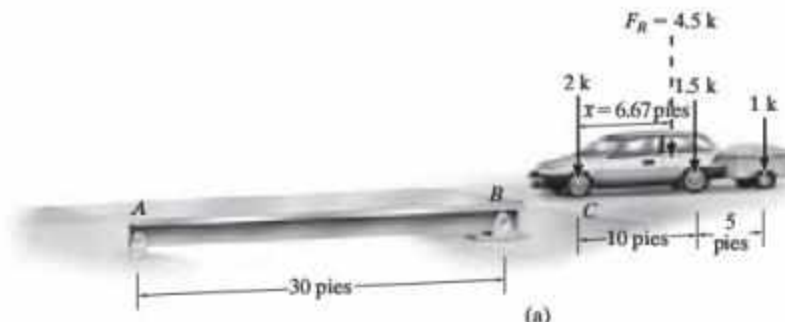
Envolvente de los valores máximos de la línea de influencia. Las reglas o fórmulas para determinar la fuerza cortante o el momento máximos absolutos son difíciles de establecer para las vigas que se apoyan de una manera distinta al voladizo o al apoyo simple, que ya se analizaron aquí. No obstante, una forma elemental de proceder para la solución de este problema requiere la construcción de líneas de influencia para la fuerza cortante o el momento en los puntos seleccionados a lo largo de toda la viga y el cálculo posterior de la fuerza cortante o el momento máximos en la viga para cada punto, empleando para ello los métodos de la sección 6-6. Al graficar estos valores se obtiene una "envolvente de máximos", a partir de la cual puede determinarse tanto el valor máximo absoluto de la fuerza cortante o del momento como su ubicación. Por supuesto, se recomienda una solución en computadora para las situaciones complicadas de este problema, ya que el trabajo puede ser tedioso si se realiza manualmente.



El momento máximo absoluto en este puente de traves es el resultado de las cargas móviles concentradas causadas por las ruedas de los vagones del tren. Los vagones deben estar en la posición crítica y debe identificarse la ubicación del punto en la viga donde se produce el momento máximo absoluto.

EJEMPLO 6.21

Determine el momento máximo absoluto en la cubierta del puente simplemente apoyado de la figura 6-37a.

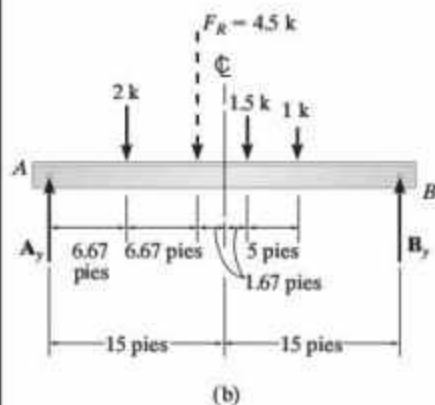
**SOLUCIÓN**

Primero se determinan la magnitud y la posición de la fuerza resultante del sistema, figura 6-37a. Se tiene

$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \quad F_R = 2 + 1.5 + 1 = 4.5 \text{ k}$$

$$\uparrow + M_{R_C} = \Sigma M_C; \quad 4.5\bar{x} = 1.5(10) + 1(15)$$

$$\bar{x} = 6.67 \text{ pies}$$



Suponga en primer lugar que el momento máximo absoluto ocurre bajo la carga de 1.5 k. La carga y la fuerza resultante se colocan equidistantes de la línea central de la viga, figura 6-37b. Si se calcula primero A_y , figura 6-37b, resulta

$$\downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad -A_y(30) + 4.5(16.67) = 0 \quad A_y = 2.50 \text{ k}$$

Ahora, usando la sección izquierda de la viga, figura 6-37c, se obtiene

$$\downarrow + \Sigma M_S = 0; \quad -2.50(16.67) + 2(10) + M_S = 0$$

$$M_S = 21.7 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

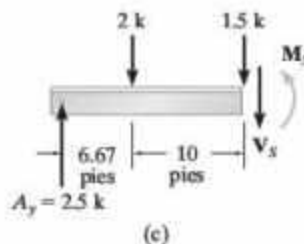


Figura 6-37

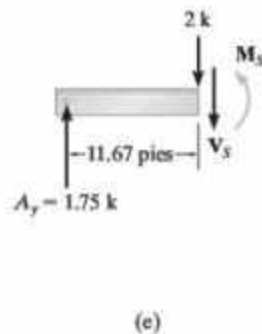
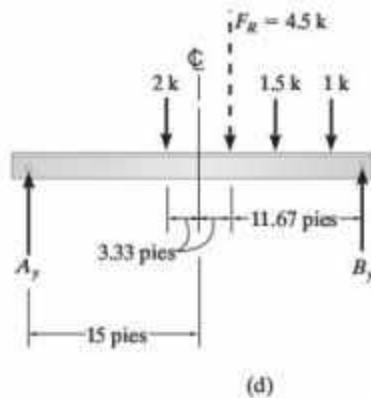
Hay una posibilidad de que el momento máximo absoluto pueda ocurrir bajo la carga de 2 k, puesto que $2 \text{ k} > 1.5 \text{ k}$ y F_R está entre 2 k y 1.5 k. Para investigar este caso, la carga de 2 k y F_R se colocan equidistantes de la línea central de la viga, figura 6-37d. Demuestre que $A_y = 1.75 \text{ k}$ como se indica en la figura 6-37e y que

$$M_S = 20.4 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Por comparación, el momento máximo absoluto es

$$M_S = 21.7 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

el cual se produce bajo la carga de 1.5 k, cuando las cargas se ubican sobre la viga como se muestra en la figura 6-37b.



EJEMPLO 6.22

El camión tiene una masa de 2 Mg y un centro de gravedad en G , como se muestra en la figura 6-38a. Determine el momento máximo absoluto que se desarrolla en la cubierta del puente simplemente apoyado, debido al peso del camión. El puente tiene una longitud de 10 m .

SOLUCIÓN

Como se observa en la figura 6-38a, el peso del camión, $2(10^3) \text{ kg}$ (9.81 m/s^2) = 19.62 kN , y las reacciones de las ruedas se calcularon con base en la estática. Dado que la mayor reacción se produce en la rueda delantera, se seleccionará esta rueda junto con la fuerza resultante y se colocarán *equidistantes* de la línea central del puente, figura 6-38b. Se usará la fuerza resultante en lugar de las cargas de las ruedas, entonces la reacción vertical en B es

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad & B_y(10) - 19.62(4.5) = 0 \\ & B_y = 8.829 \text{ kN} \end{aligned}$$

El momento máximo ocurre bajo la carga de la rueda delantera. Utilizando la sección derecha de la cubierta del puente, figura 6-38c, se tiene

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_s = 0; \quad & 8.829(4.5) - M_s = 0 \\ & M_s = 39.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Resp.

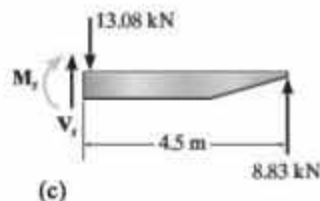
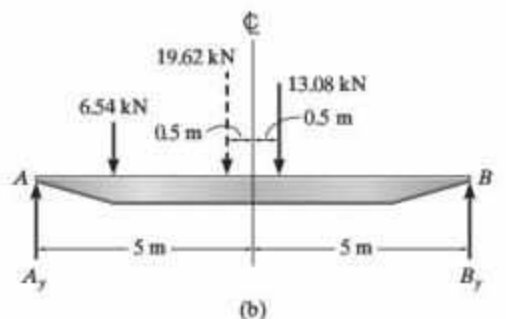
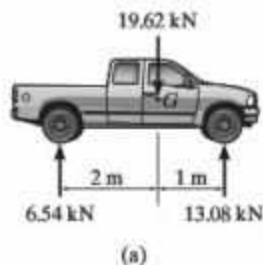
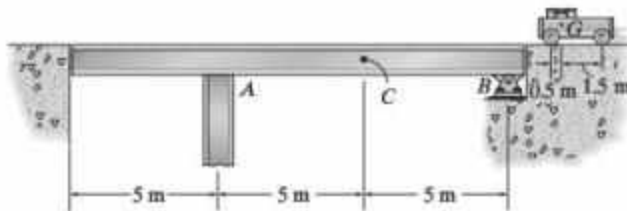


Figura 6-38

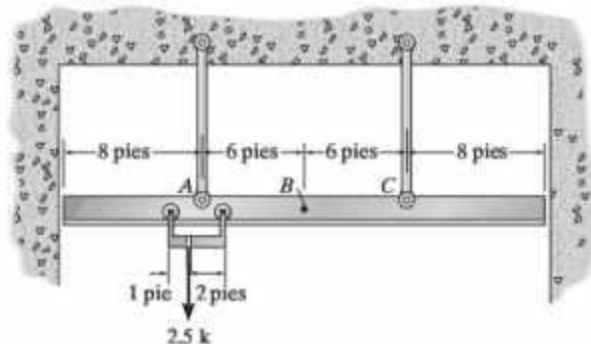
PROBLEMAS

6-59. Determine el momento máximo en el punto C de la trabe simple, causado por el movimiento de la plataforma móvil que tiene una masa de 2 Mg y un centro de masa en G . Suponga que A es un rodillo.



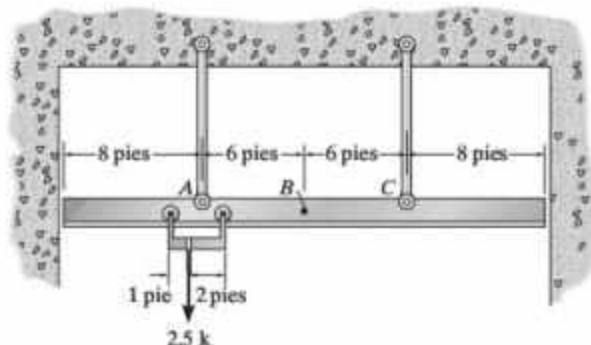
Prob. 6-59

***6-60.** Determine el momento máximo en el punto B del carril suspendido si éste soporta la carga de 2.5 k sobre el carro.



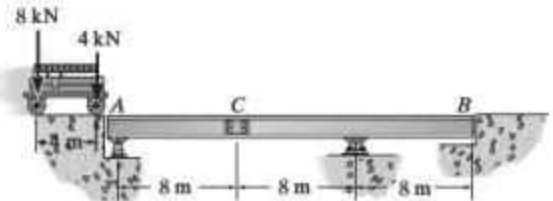
Prob. 6-60

6-61. Determine la fuerza cortante positiva máxima en el punto B si el carril soporta la carga de 2.5 k sobre el carro.



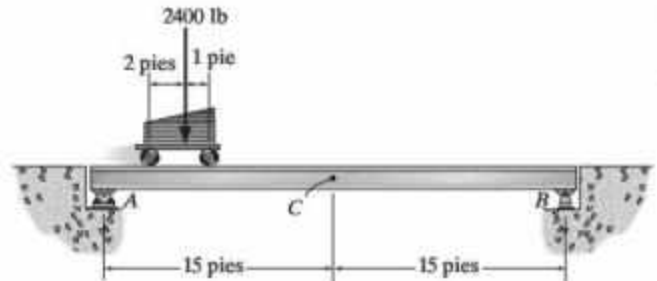
Prob. 6-61

6-62. Determine el momento positivo máximo en el empalme C sobre la trabe lateral, causado por la carga móvil que se desplaza a lo largo del centro del puente.



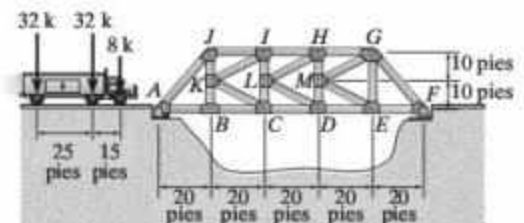
Prob. 6-62

6-63. Determine el momento máximo en C debido a la carga móvil.



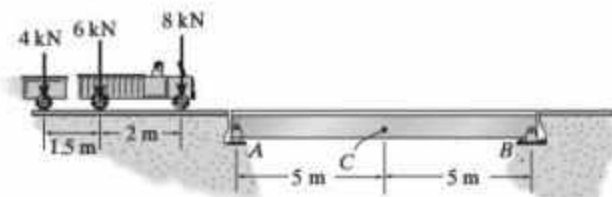
Prob. 6-63

***6-64.** Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento IH de la armadura para puente. Determine la fuerza máxima (en tensión o compresión) que puede desarrollarse en este elemento debido a un camión de 72 k que tiene las cargas de las ruedas que se muestran en la figura. Suponga que el camión puede viajar en cualquier dirección a lo largo del centro de la cubierta, de modo que la mitad de su carga se transfiere a cada una de las dos armaduras laterales. Suponga también que los elementos están articulados en las placas de refuerzo.



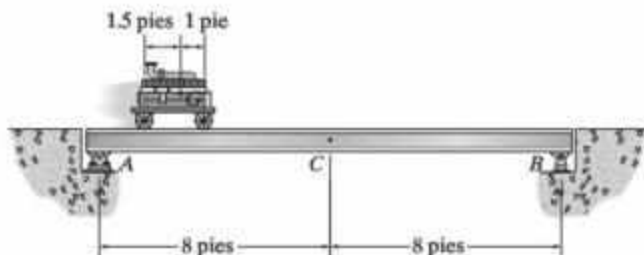
Prob. 6-64

6-65. Determine el momento positivo máximo en el punto C sobre la trabe simple, debido a la carga móvil.



Prob. 6-65

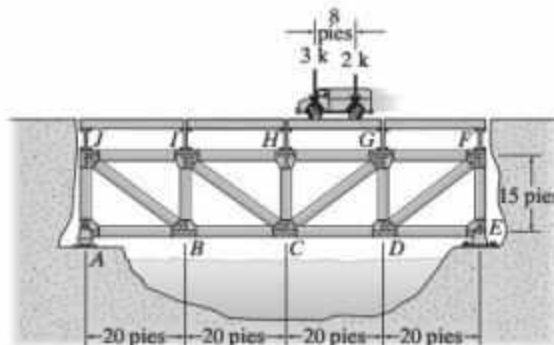
6-66. El carro tiene un peso de 2500 libras y un centro de gravedad en G . Determine el momento máximo positivo creado en el punto C de la trabe lateral mientras pasa por el puente. Suponga que el carro puede viajar en cualquier dirección a lo largo del *centro* de la cubierta, de modo que la *mitad* de su carga se transfiere a cada una de las dos traves laterales.



Prob. 6-66

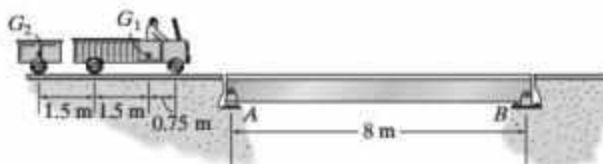
6-67. Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento BC de la armadura para puente. Determine la fuerza máxima (en tensión o compresión) que puede desarrollarse en el elemento debido a un camión de 5 k que tiene las cargas de las ruedas que se muestran en la figura. Suponga que el camión puede viajar en cualquier dirección a lo largo del *centro* de la cubierta, de modo que la *mitad* de la carga se transfiere a cada una de las dos armaduras laterales. Suponga también que los elementos están articulados en las placas de refuerzo.

***6-68.** Dibuje la línea de influencia para la fuerza en el elemento IC de la armadura para puente. Determine la fuerza máxima (en tensión o compresión) que puede desarrollarse en el elemento debido a un camión de 5 k con las cargas de las ruedas que se muestran en la figura. Suponga que el camión puede viajar en cualquier dirección a lo largo del *centro* de la cubierta, de modo que la mitad de la carga se transfiere a cada una de las dos armaduras laterales. Suponga también que los elementos están articulados en las placas de refuerzo.



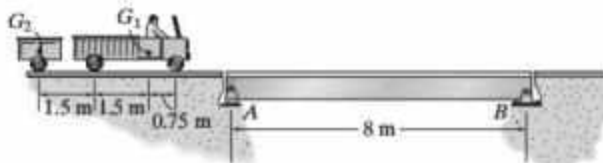
Probs. 6-67/6-68

6-69. El camión tiene una masa de 4 Mg y centro de masa en G_1 , por su parte el remolque tiene una masa de 1 Mg y centro de masa en G_2 . Determine el momento vivo máximo absoluto desarrollado en el puente.



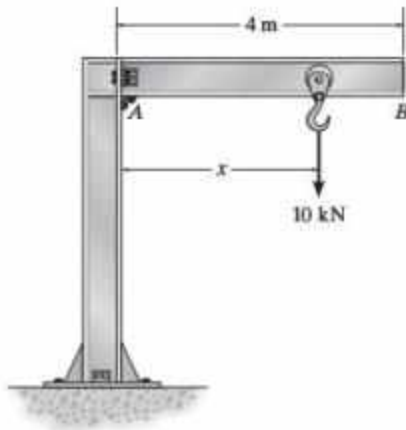
Prob. 6-69

6-70. Determine el momento vivo máximo absoluto en el puente del problema 6-69 si se retira el remolque.



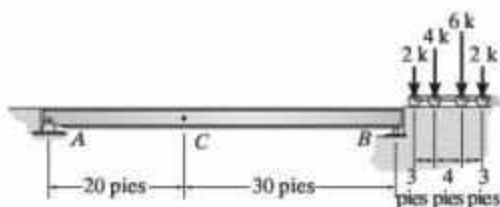
Prob. 6-70

6-71. Determine la fuerza cortante viva y el momento vivo máximos absolutos en el brazo AB de la grúa, debidos a la carga de 10 kN. Las restricciones en los extremos requieren que $0.1 \text{ m} \leq x \leq 3.9 \text{ m}$.



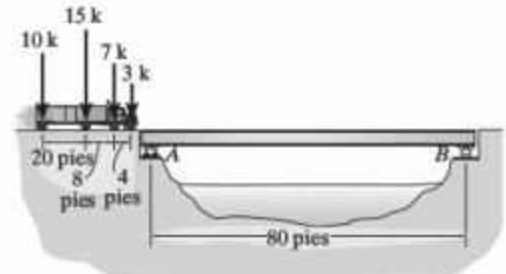
Prob. 6-71

***6-72.** Determine el momento máximo en C causado por las cargas móviles.



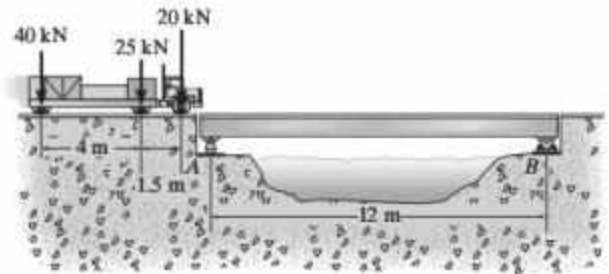
Prob. 6-72

6-73. Determine el momento máximo absoluto en el puente de traves, debido a las cargas del camión que se muestra. Las cargas se aplican directamente sobre la trabe.



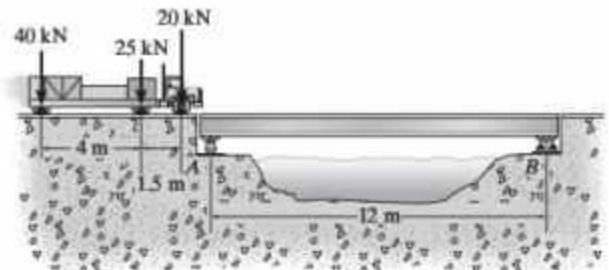
Prob. 6-73

6-74. Determine la fuerza cortante máxima absoluta en la viga debido a las cargas mostradas.



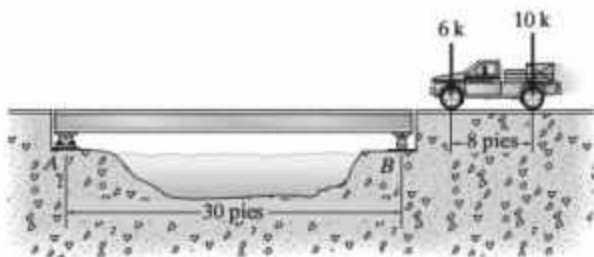
Prob. 6-74

6-75. Determine el momento máximo absoluto en la viga debido a las cargas mostradas.



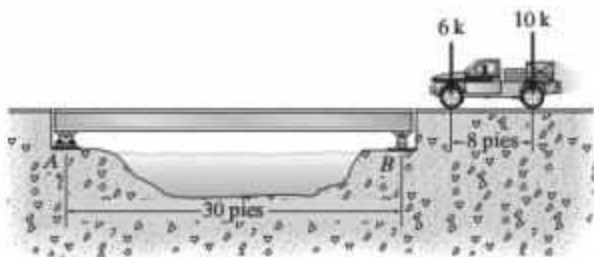
Prob. 6-75

***6-76.** Determine la fuerza cortante máxima absoluta en la trabe del puente, debido a las cargas mostradas.



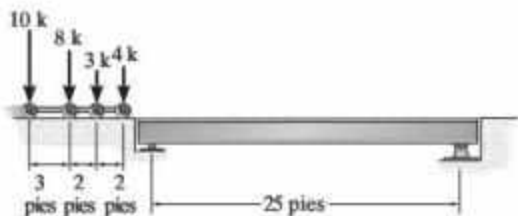
Prob. 6-76

6-77. Determine el momento máximo absoluto en la trabe del puente, debido a las cargas mostradas.



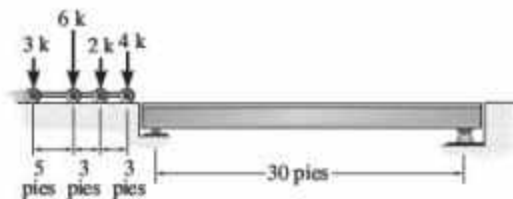
Prob. 6-77

6-78. Determine el momento máximo absoluto en la trabe debido a las cargas mostradas.



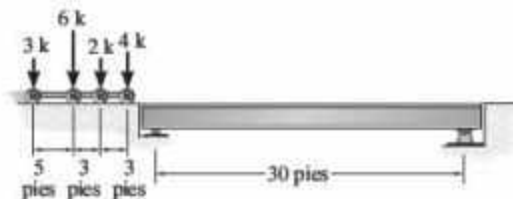
Prob. 6-78

6-79. Determine la fuerza cortante máxima absoluta en la viga debido a las cargas mostradas.



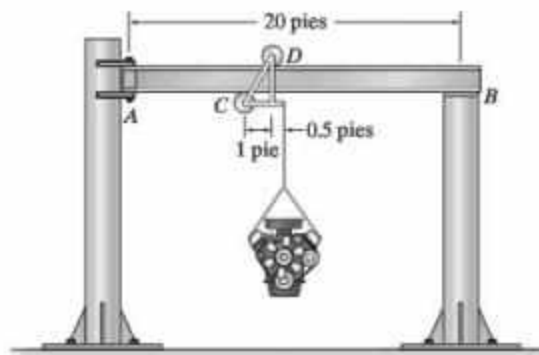
Prob. 6-79

***6-80.** Determine el momento máximo absoluto en el puente debido a las cargas mostradas.



Prob. 6-80

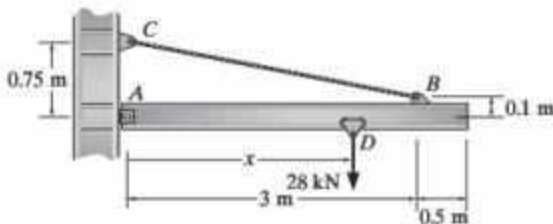
6-81. El carro rueda en *C* y *D* a lo largo de las alas inferior y superior de la viga *AB*. Determine el momento máximo absoluto desarrollado en la viga si la carga soportada por el carro es de 2 K. Suponga que el soporte en *A* está articulado y que *B* es un rodillo.



Prob. 6-81

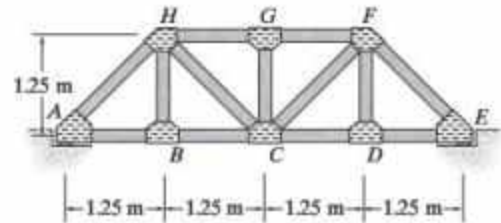
PROBLEMAS DE PROYECTO

6-1P. El polipasto de cadena puede colocarse en cualquier punto a lo largo del aguilón de una grúa de pared ($0.1 \text{ m} < x < 3.4 \text{ m}$) y tiene una capacidad nominal de 28 kN . Use un factor de impacto de 0.3 para determinar el momento flexionante máximo absoluto en el aguilón y la fuerza máxima desarrollada en la varilla de refuerzo BC . El aguilón está articulado a la columna de pared en su extremo izquierdo A . Pase por alto el tamaño del carro en D .

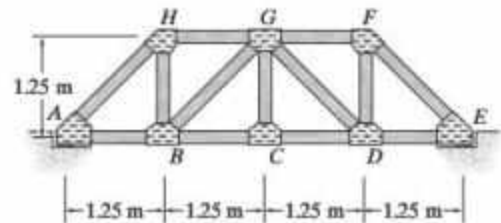


Prob. 6-1P

6-2P. Se va a construir un puente peatonal simplemente apoyado en un parque de la ciudad, por lo que se han propuesto dos modelos que se muestran como caso *a* y caso *b*. Los elementos de la armadura deben estar hechos de madera. La cubierta se compone de planchas de 1.5 metros de largo que tienen una masa de 20 kg/m^2 . Un código local establece que la carga viva sobre la cubierta debe ser de 5 kPa con un factor de impacto de 0.2 . Considere que la cubierta estará simplemente apoyada en los largueros. Entonces, las vigas de piso transmiten la carga a las juntas inferiores de la armadura (vea la figura 6-23). En cada caso, encuentre cuál es el elemento sometido a la mayor carga en tensión y en compresión, y sugiera por qué debe elegirse un diseño sobre el otro. No tome en cuenta el peso de los elementos de la armadura.



caso *a*



caso *b*

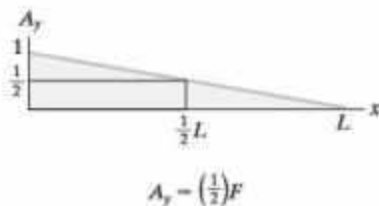
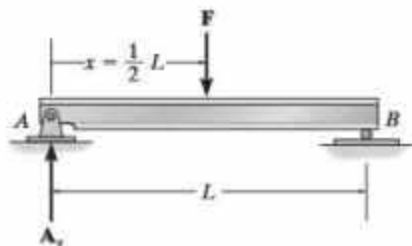
Prob. 6-2P

REPASO DEL CAPÍTULO

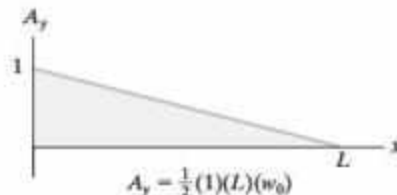
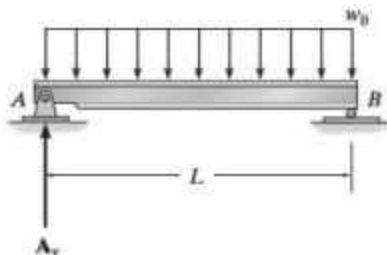
Una línea de influencia indica el valor de una reacción, una fuerza cortante o un momento en un punto específico de un elemento, cuando una carga unitaria se mueve sobre éste.

Después de construir la línea de influencia para una reacción, una fuerza cortante o un momento (función), se podrá localizar la carga viva sobre el elemento que produzca el máximo valor positivo o negativo de la función.

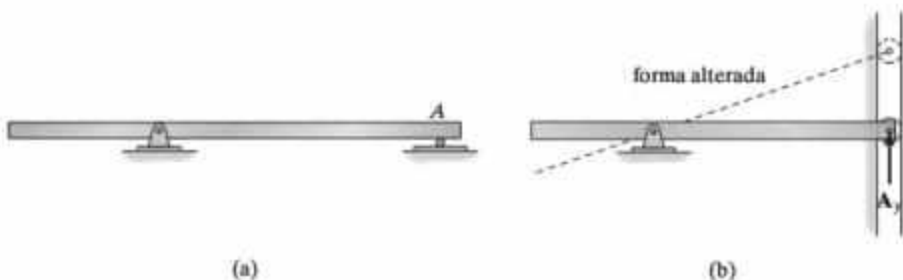
Una fuerza viva concentrada se aplica en los picos positivos (negativos) de la línea de influencia. El valor de la función es igual al producto de la ordenada de la línea de influencia por la magnitud de la fuerza.



Una carga uniformemente distribuida se extiende sobre una región positiva (negativa) de la línea de influencia. El valor de la función es igual al producto de la zona bajo la línea de influencia para la región y la magnitud de la carga uniforme.

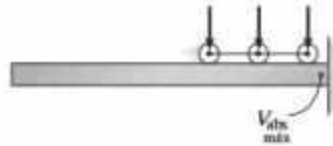


La forma general de la línea de influencia puede determinarse mediante el principio de Müller-Breslau, el cual establece que la línea de influencia para una reacción, una fuerza cortante o un momento, está a la misma escala que la forma alterada del elemento cuando actúan sobre él la reacción, la fuerza cortante o el momento.

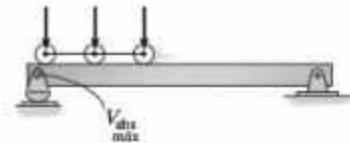


Las líneas de influencia para traveses de piso y armaduras pueden establecerse al colocar la carga unitaria en cada punto o junta del panel, y calcular el valor de la reacción, la fuerza cortante o el momento necesarios.

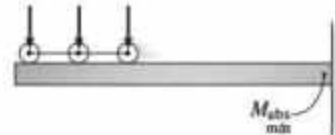
Si sobre el elemento pasa una serie de cargas concentradas, entonces deben considerarse las diferentes posiciones de la carga sobre el elemento a fin de determinar la mayor fuerza cortante o el mayor momento en el elemento. En general, coloque la carga de manera que cada una aporte su máxima influencia, la cual se determina multiplicando cada carga por la ordenada de la línea de influencia. Este proceso de encontrar la posición real puede hacerse mediante una técnica de prueba y error, o buscando el cambio en la fuerza cortante o el momento cuando las cargas se mueven de una posición a otra. Cada momento se investiga hasta que se presenta un valor negativo de la fuerza cortante o el momento. Una vez que ocurre esto, la posición anterior definirá la carga crítica.



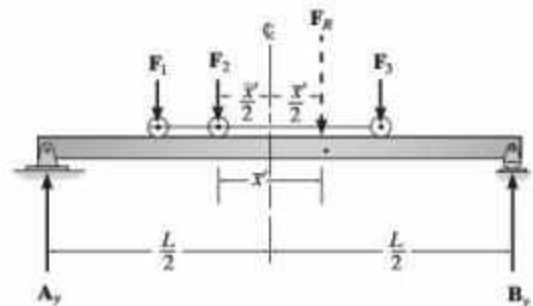
La fuerza cortante máxima absoluta en una viga en voladizo o simplemente apoyada se producirá en un soporte, cuando una de las cargas se coloque al lado de ese soporte.



El momento máximo absoluto en una viga en voladizo se produce cuando la serie de cargas concentradas se colocan en el punto más alejado del soporte fijo.



Para determinar el momento máximo absoluto en una viga simplemente apoyada, primero se determina la fuerza resultante del sistema. Después, junto con una de las fuerzas concentradas en el sistema, se coloca de modo que las dos fuerzas se encuentren equidistantes de la línea central de la viga. El momento máximo se produce bajo la fuerza seleccionada. Cada fuerza en el sistema se selecciona de esta manera y, por comparación, la más grande de todos estos casos es el momento máximo absoluto.





El portal de este puente debe resistir cargas laterales debidas al viento y al tráfico. Para hacer un diseño preliminar de los elementos puede realizarse un análisis aproximado de las fuerzas producidas, antes de llevar a cabo un análisis estructural más preciso.

Análisis aproximado de estructuras estáticamente indeterminadas

En este capítulo se presentarán algunos de los métodos aproximados para analizar armaduras y marcos estáticamente indeterminados. Estas técnicas se desarrollaron con base en el comportamiento estructural y, en la mayoría de los casos, su precisión se compara favorablemente con métodos analíticos más exactos. Aunque aquí no se estudiarán todos los tipos de formas estructurales, mediante el estudio de estos métodos se pretende proporcionar un entendimiento suficiente para que el estudiante pueda determinar cuáles serían los mejores acercamientos para realizar un análisis aproximado de fuerzas de una estructura estáticamente indeterminada.

7.1 Uso de métodos aproximados

Cuando se utiliza un *modelo* para representar cualquier estructura, el análisis de la misma debe satisfacer *tanto* las condiciones de equilibrio *como* las de compatibilidad de desplazamiento en las juntas. Como se mostrará en capítulos posteriores de este texto, las condiciones de compatibilidad para una estructura *estáticamente indeterminada* pueden relacionarse con las cargas siempre que se conozca el módulo de elasticidad del material, así como el tamaño y la forma de los elementos. Sin embargo, para un diseño inicial *no* se conocerá el tamaño del elemento y, por ende, no se podrá considerar un análisis estáticamente indeterminado. Para llevar a cabo el análisis se requerirá desarrollar un modelo más simple de la estructura que sea estáticamente determinado. Una vez especificado este modelo, el estudio se denomina *análisis aproximado*. Mediante un análisis de este tipo puede hacerse un diseño preliminar de los elementos de una estructura, y al completar éste es posible realizar un análisis indeterminado más exacto y perfeccionar el diseño. Un análisis aproximado también proporciona información sobre el comportamiento de una estructura bajo carga y resulta útil al verificar la validez de un análisis más exacto o cuando el tiempo, el dinero o la capacidad no son suficientes para efectuar el análisis con mayor precisión.

Es necesario tener en cuenta que, por lo general, todos los métodos de análisis estructural son aproximados, simplemente porque las condiciones reales de carga, la geometría, el comportamiento del material y la resistencia de las juntas en los soportes nunca se conocen en un *sentido estricto*. Sin embargo, en este texto el análisis estáticamente indeterminado de una estructura se llamará *análisis exacto* y el análisis estáticamente determinado, que es más sencillo, se denominará *análisis aproximado*.

7.2 Armaduras

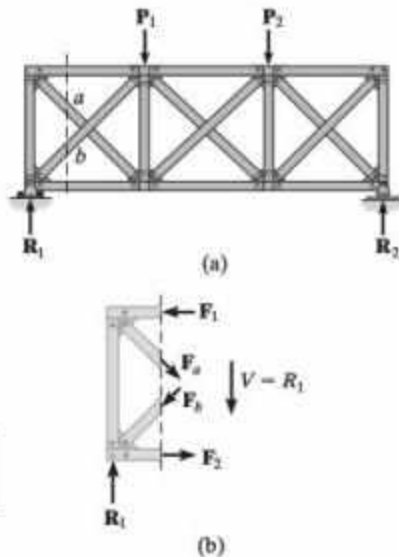


Figura 7-1

En la figura 7-1a se muestra un tipo común de armadura que se usa con frecuencia como soporte lateral para edificios o en las cuerdas superior e inferior de los puentes (vea también la figura 3-4). Cuando se usa para tal propósito, esta armadura no se considera un elemento primario para soportar la estructura y, en consecuencia, suele analizarse por métodos aproximados. En el caso que se muestra se podrá observar que al eliminar una diagonal de cada uno de los tres paneles, la armadura se vuelve estáticamente determinada. Entonces, la armadura es estáticamente indeterminada de tercer grado (a partir de la ecuación 3-1, $b + r > 2j$, o bien $16 + 3 > 8(2)$) y, por lo tanto, deben hacerse tres supuestos respecto de las fuerzas en las barras a fin de convertir la armadura en estáticamente determinada. Estos supuestos pueden hacerse con respecto a las diagonales transversales, si se observa que cuando una diagonal en un panel está en tensión, la correspondiente diagonal transversal está en compresión. Esto es evidente en la figura 7-1b, donde la “fuerza cortante del panel” V es soportada por la *componente vertical* de fuerza de tensión en el elemento a , y la *componente vertical* de la fuerza de compresión en el elemento b . En general se aceptan dos métodos de análisis.

Método 1: Si las diagonales se diseñan intencionalmente *largas y delgadas*, es razonable suponer que *no pueden* soportar una fuerza de compresión; de lo contrario, se pandearían con facilidad. Por consiguiente, la fuerza cortante del panel es resistida en su totalidad por la *diagonal de tensión*, mientras que la *diagonal de compresión se asume como un elemento de fuerza cero*.

Método 2: Si los elementos diagonales se construyen a partir de grandes secciones laminadas, como ángulos o canales, pueden ser igualmente capaces de soportar una fuerza de tensión que una de compresión. Aquí se supondrá que cada diagonal de tensión y de compresión soporta *la mitad* de la fuerza cortante del panel.

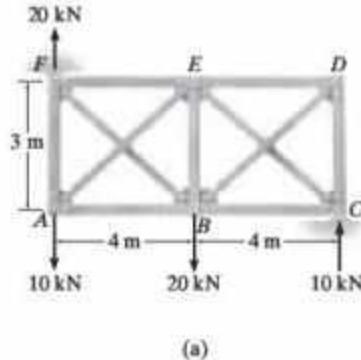
Estos dos métodos de análisis aproximado se ilustran numéricamente en los siguientes ejemplos.

Para determinar las fuerzas del refuerzo transversal en cada panel de este puente ferroviario levadizo, puede usarse un método aproximado. Aquí, los elementos transversales son delgados y, por lo tanto, puede suponerse que no soportan ninguna fuerza de compresión.



EJEMPLO 7.1

Determine (en forma aproximada) las fuerzas en los elementos de la armadura que se muestra en la figura 7-2a. Las diagonales deben diseñarse para soportar tanto fuerzas de tensión como de compresión y, por ende, se supone que cada una soporta la mitad de la fuerza cortante del panel. Las reacciones en los soportes ya se han calculado.

**Figura 7-2****SOLUCIÓN**

Por inspección, la armadura es estáticamente indeterminada de segundo grado. Los dos supuestos requieren que las diagonales de tensión y de compresión soporten fuerzas iguales, es decir, $F_{FB} = F_{AE} = F$. Para una sección vertical a través del panel izquierdo, figura 7-2b, se tiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 20 - 10 - 2\left(\frac{3}{5}\right)F = 0 \quad F = 8.33 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

de modo que

$$F_{FB} = 8.33 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$

$$F_{AE} = 8.33 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0; \quad -8.33\left(\frac{4}{5}\right)(3) + F_{FE}(3) = 0 \quad F_{FE} = 6.67 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_F = 0; \quad -8.33\left(\frac{4}{5}\right)(3) + F_{AB}(3) = 0 \quad F_{AB} = 6.67 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$

A partir de la junta A, figura 7-2c,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{AF} - 8.33\left(\frac{3}{5}\right) - 10 = 0 \quad F_{AF} = 15 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$

En la figura 7-2d se muestra una sección vertical a través del panel derecho. Demuestre que

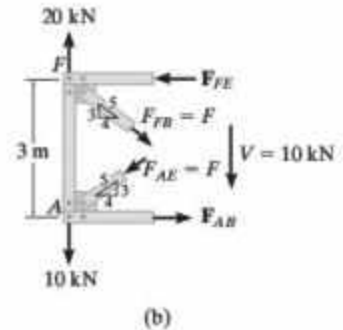
$$F_{DB} = 8.33 \text{ kN (T)}, \quad F_{ED} = 6.67 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$F_{EC} = 8.33 \text{ kN (C)}, \quad F_{BC} = 6.67 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$

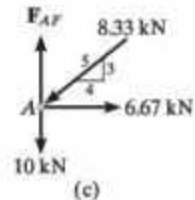
Por otra parte, empleando los diagramas de cuerpo libre de las articulaciones D y E, figuras 7-2e y 7-2f, demuestre que

$$F_{DC} = 5 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.}$$

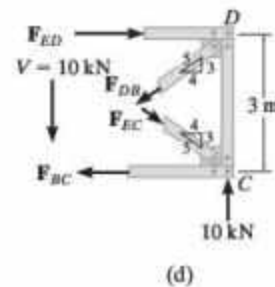
$$F_{EB} = 10 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$



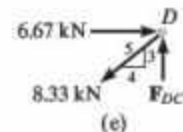
(b)



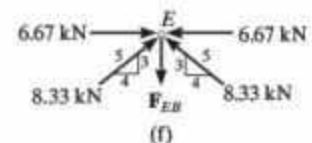
(c)



(d)



(e)



(f)

EJEMPLO 7.2



Para proporcionar soporte lateral a este puente contra el viento y las cargas desbalanceadas del tráfico, se emplea un refuerzo transversal. Determine (en forma aproximada) las fuerzas en los elementos de esta armadura. Suponga que las diagonales son delgadas y por lo tanto no soportan ninguna fuerza de compresión. Las cargas y las reacciones en los soportes se muestran en la figura 7-3a.

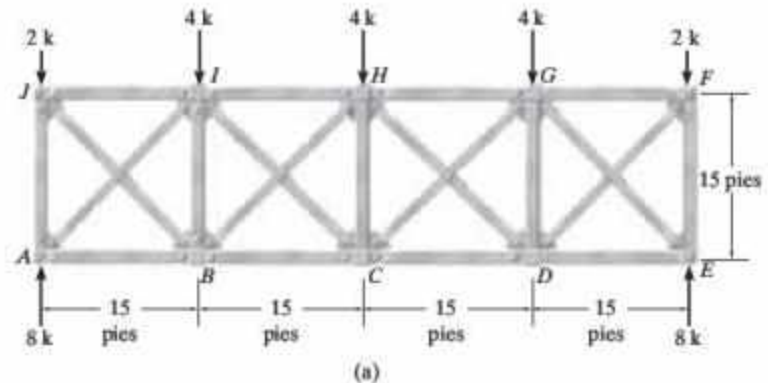
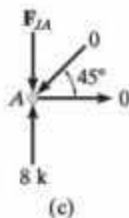
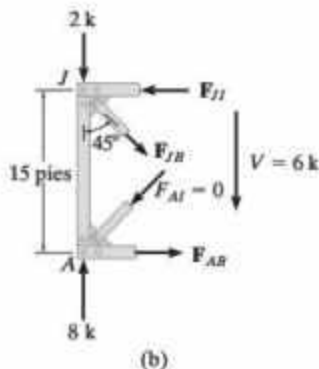


Figura 7-3



SOLUCIÓN

Por inspección, la armadura es estáticamente indeterminada de cuarto grado. Así, los cuatro supuestos que se utilizarán requieren que cada diagonal de compresión sostenga una fuerza nula. Por lo tanto, a partir de una sección vertical a través del panel izquierdo, figura 7-36, se tiene

$$F_{AI} = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 8 - 2 - F_{JB} \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{JB} = 8.49 \text{ k (T)} \quad \text{Resp.}$$

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad -8.49 \sin 45^\circ (15) + F_{JI} (15) = 0$$

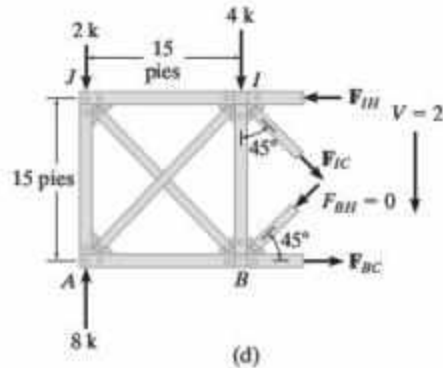
$$F_{JI} = 6 \text{ k (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$\zeta + \Sigma M_J = 0; \quad -F_{AB} (15) = 0$$

$$F_{AB} = 0 \quad \text{Resp.}$$

A partir de la junta A, figura 7-3c,

$$F_{JA} = 8 \text{ k (C)} \quad \text{Resp.}$$



En la figura 7-3d se muestra una sección vertical de la armadura a través de los elementos IH , IC , BH y BC . La fuerza cortante del panel es $V = \Sigma F_y = 8 - 2 - 4 = 2$ k. Se requiere que

$$F_{BH} = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 8 - 2 - 4 - F_{IC} \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{IC} = 2.83 \text{ k (T)} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad -8(15) + 2(15) - 2.83 \sin 45^\circ(15) + F_{IH}(15) = 0$$

$$F_{IH} = 8 \text{ k (C)} \quad \text{Resp.}$$

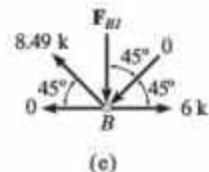
$$\downarrow + \Sigma M_I = 0; \quad -8(15) + 2(15) + F_{BC}(15) = 0$$

$$F_{BC} = 6 \text{ k (T)} \quad \text{Resp.}$$

A partir de la junta B , figura 7-3e,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 8.49 \sin 45^\circ - F_{BI} = 0$$

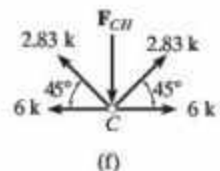
$$F_{BI} = 6 \text{ k (C)} \quad \text{Resp.}$$



Las fuerzas en los otros elementos se pueden determinar por simetría, excepto F_{CH} ; sin embargo, a partir de la junta C , figura 7-3f, se tiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2(2.83 \sin 45^\circ) - F_{CH} = 0$$

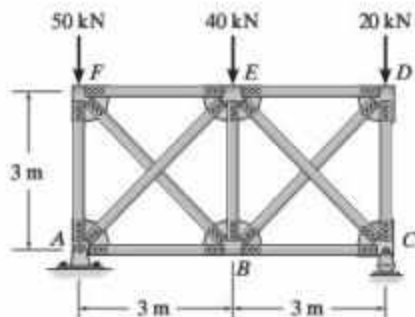
$$F_{CH} = 4 \text{ k (C)} \quad \text{Resp.}$$



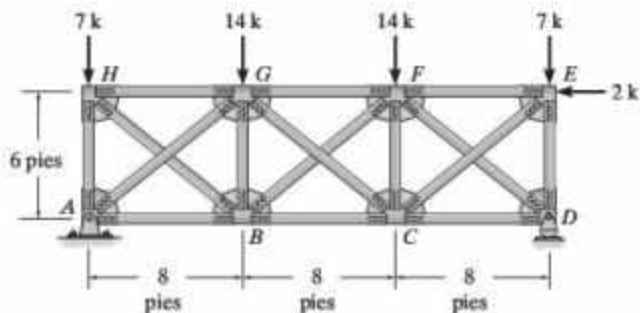
PROBLEMAS

7-1. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada elemento de la armadura. Suponga que las diagonales pueden soportar una fuerza de tensión o de compresión.

7-2. Resuelva el problema 7-1 suponiendo que las diagonales no pueden soportar una fuerza de compresión.



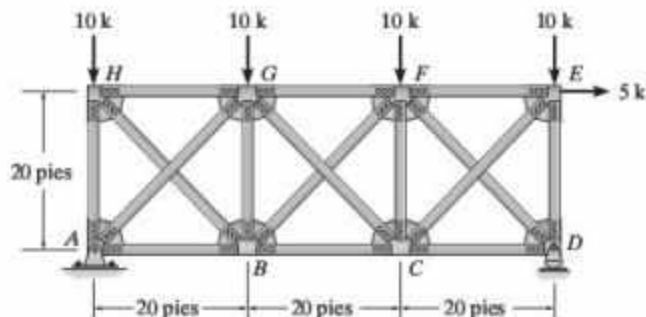
Probs. 7-1/7-2



Probs. 7-5/7-6

7-3. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada elemento de la armadura. Suponga que las diagonales pueden soportar una fuerza de tensión o de compresión.

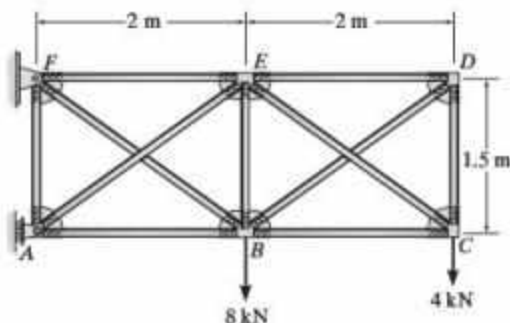
***7-4.** Resuelva el problema 7-3 suponiendo que las diagonales no pueden soportar una fuerza de compresión.



Probs. 7-3/7-4

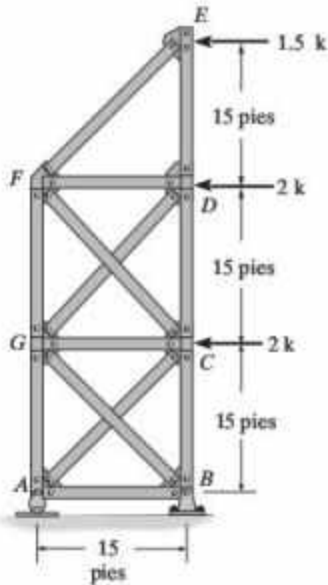
7-7. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada elemento de la armadura. Suponga que las diagonales pueden soportar una fuerza de tensión o de compresión.

***7-8.** Resuelva el problema 7-7 suponiendo que las diagonales no pueden soportar una fuerza de compresión.



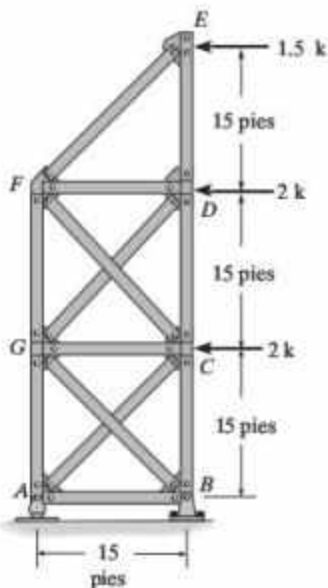
Probs. 7-7/7-8

7-9. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada elemento de la armadura. Suponga que las diagonales pueden soportar tanto fuerzas de tensión como de compresión.



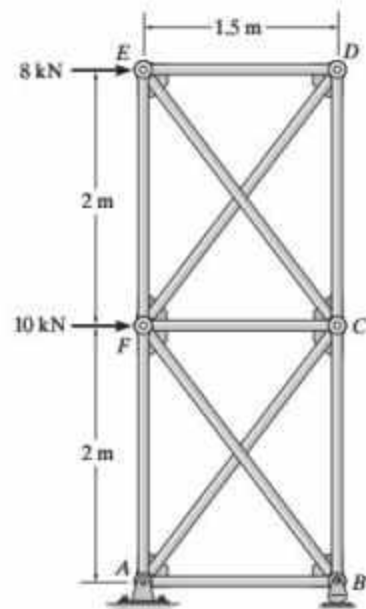
Prob. 7-9

7-10. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada elemento de la armadura. Suponga que las diagonales DG y AC no pueden soportar una fuerza de compresión.



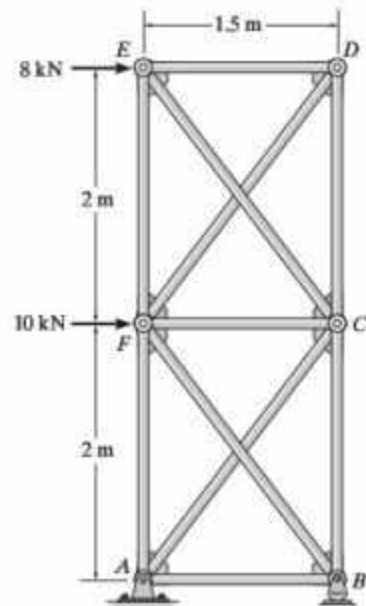
Prob. 7-10

7-11. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada elemento de la armadura. Suponga que las diagonales pueden soportar una fuerza de tensión o una de compresión.



Prob. 7-11

***7-12.** Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada elemento de la armadura. Suponga que las diagonales no pueden soportar una fuerza de compresión.



Prob. 7-12

7.3 Cargas verticales sobre marcos de construcción

Por lo común, los marcos de construcción consisten en traveses que están *conectados rígidamente* a columnas, de modo que toda la estructura tiene una mayor capacidad para resistir los efectos de las fuerzas laterales debidas al viento y a los terremotos. En la figura 7-4 se muestra un ejemplo de un marco rígido, denominado *caballete de edificio*.

En la práctica, un ingeniero estructural puede emplear diversas técnicas para realizar un análisis aproximado de un *caballete de edificio*. Cada uno se basa en el conocimiento de la forma en que la estructura *se deformará bajo carga*. Una técnica sería la de considerar solamente los elementos dentro de una región localizada de la estructura. Esto es posible siempre que las deflexiones de los elementos dentro de la región alteren poco a los que están fuera de ella. Sin embargo, con mucha frecuencia se toma en cuenta la curva de deflexión de toda la estructura. A partir de esto puede especificarse la ubicación aproximada de los puntos de inflexión; es decir, de los puntos donde el elemento cambia su curvatura. Estos puntos pueden considerarse como *articulaciones*, ya que en los puntos de inflexión del elemento se presentan momentos nulos. En esta sección se utilizará esta idea para analizar las fuerzas en los marcos de construcción debidas a las cargas verticales, y en las secciones 7-5 y 7-6 se presentará un análisis aproximado de los marcos sometidos a cargas laterales. Dado que el marco puede someterse a estas dos cargas al mismo tiempo, entonces, siempre que el material permanezca elástico, la carga resultante podrá determinarse por superposición.

Supuestos para el análisis aproximado. Considere una trabe típica localizada dentro de un *caballete de edificio* que está sometida a una carga vertical uniforme, como se muestra en la figura 7-5a. Los soportes de columna en *A* y *B* ejercerán, cada uno, tres reacciones sobre la viga, por lo que ésta es estáticamente indeterminada de tercer grado (6 reacciones – 3 ecuaciones de equilibrio). Entonces, un análisis aproxi-



Marco de construcción típica

Figura 7-4

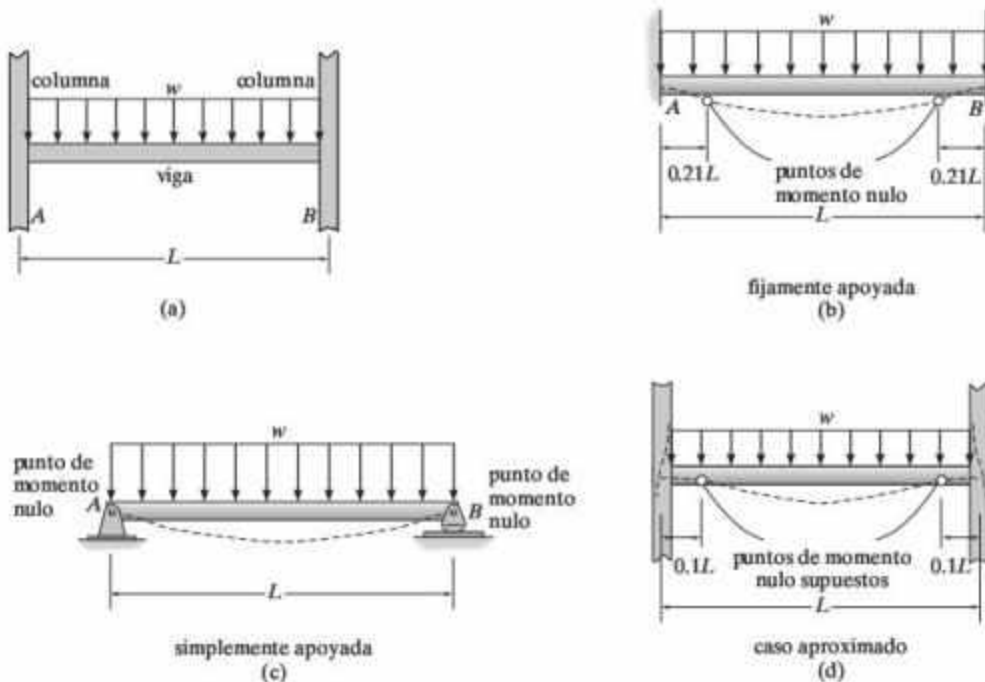


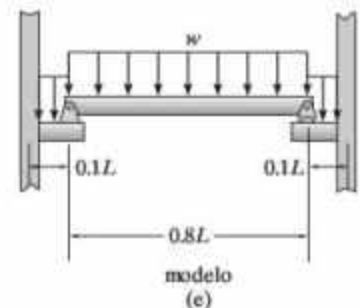
Figura 7-5

mado requerirá tres supuestos para hacer que la viga sea estáticamente determinada. Si las columnas son extremadamente rígidas no se producirá rotación en A y B , y la curva de deflexión de la trabe se parecerá a la que se muestra en la figura 7-5b. Si se emplea uno de los métodos que se presentan en los capítulos 9 a 11, un análisis exacto revela que en este caso los puntos de inflexión, o puntos de momento nulo, se producen a $0.21L$ de cada soporte. Sin embargo, si las conexiones de las columnas en A y B son muy flexibles, entonces, como si se tratara de una viga simplemente apoyada, se producirán momentos nulos en los soportes, figura 7-5c. No obstante, en realidad las columnas proporcionan cierta flexibilidad en los soportes y, por consiguiente, se supondrá que ocurre un momento nulo en el punto medio entre los dos extremos, es decir, a $(0.21L + 0)/2 \approx 0.1L$ de cada soporte, figura 7-5d. Por otra parte, un análisis exacto de los marcos que soportan cargas verticales indica que las fuerzas axiales en la trabe se pueden pasar por alto.

En resumen, cada trabe de longitud L puede modelarse mediante un claro simplemente apoyado de $0.8L$ de largo que descansa sobre dos extremos en voladizo, cada uno con una longitud de $0.1L$, figura 7-5e. En este modelo se han incorporado los siguientes tres supuestos:

1. Hay un momento nulo en la trabe a $0.1L$ del soporte izquierdo.
2. Hay un momento nulo en la trabe a $0.1L$ del soporte derecho.
3. La trabe no soporta una fuerza axial.

Ahora es posible obtener, mediante el uso de la estática, las cargas internas en las trabes y puede hacerse un diseño preliminar de sus secciones transversales. El siguiente ejemplo ilustra esto en forma numérica.



EJEMPLO 7.3

Determine (en forma aproximada) el momento en las juntas E y C causado por los elementos EF y CD del caballete de edificio que se muestra en la figura 7-6a.

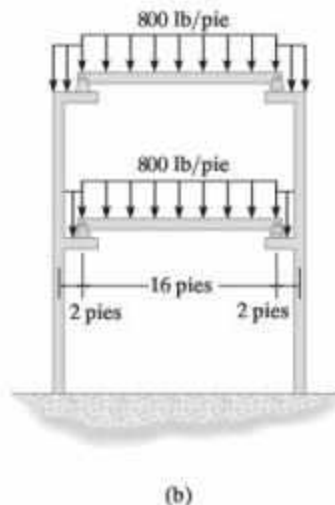
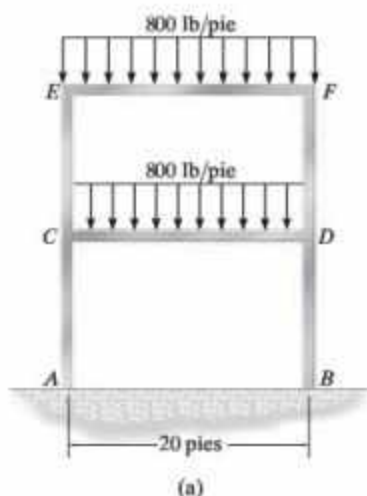


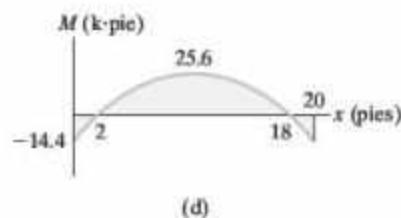
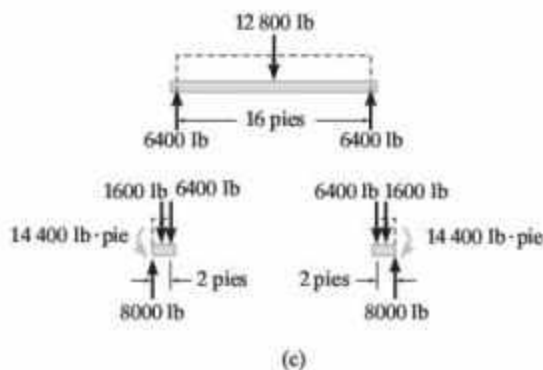
Figura 7-6

SOLUCIÓN

Para un análisis aproximado, el marco se modela de la manera que se muestra en la figura 7-6b. Tenga en cuenta que los claros en voladizo que soportan la parte central de la trabe tienen una longitud de $0.1L = 0.1(20) = 2$ pies. El equilibrio requiere que las reacciones en los extremos de la parte central de la trabe sean de 6400 lb, figura 7-6c. Entonces, los claros en voladizo están sometidos a un momento de reacción de

$$M = 1600(1) + 6400(2) = 14\,400 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 14.4 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

Este momento aproximado, con dirección opuesta, actúa sobre las juntas en E y C , figura 7-6a. Con base en los resultados, el diagrama de momento aproximado para una de las traveses es como se muestra en la figura 7-6d.

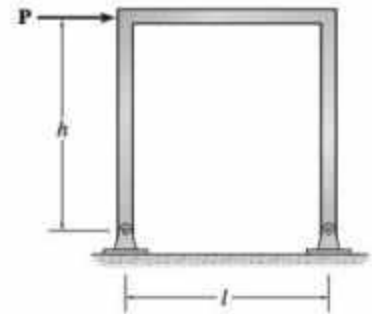


7.4 Marcos y armaduras de portal

Marcos. Los marcos de portal se suelen usar a la entrada de un puente* y como un elemento de refuerzo principal en el diseño de edificios con el fin de transferir fuerzas horizontales aplicadas en la parte superior del marco hacia los cimientos. En los puentes, estos marcos resisten las fuerzas producidas por el viento, los terremotos y las cargas desbalanceadas del tráfico sobre la cubierta del puente. Los portales pueden tener soportes articulados o fijos, o bien se pueden sostener mediante una fijación parcial. A continuación se estudiará el análisis aproximado de cada caso mediante un portal sencillo de tres elementos.

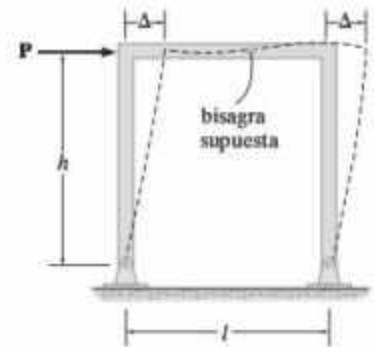
Articulados. En la figura 7-7a se muestra un marco de portal articulado. Dado que existen cuatro incógnitas en los soportes, pero sólo tres ecuaciones de equilibrio para obtener la solución, esta estructura es estáticamente indeterminada de primer grado. En consecuencia, sólo debe adoptarse un supuesto para convertir el marco en estáticamente determinado.

En la figura 7-7b se muestra la deflexión elástica del portal. Este diagrama indica que un punto de inflexión, es decir, aquel donde el momento cambia de flexión positiva a flexión negativa, se encuentra *aproximadamente* en el punto medio de la trabe. Como el momento es cero en este punto de la trabe, se puede *suponer* que allí existe una bisagra, para después proceder a determinar las reacciones en los soportes utilizando la estática. Si se hace esto, puede constatarse que las reacciones horizontales (fuerza cortante) en la base de cada columna son *iguales* y que las otras reacciones son las indicadas en la figura 7-7c. Además, los diagramas de momento para este marco son como lo indica la figura 7-7d.

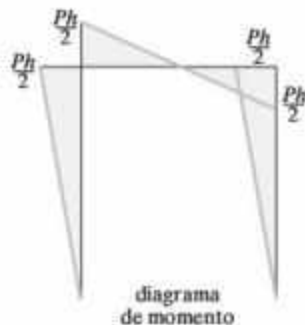


(a)

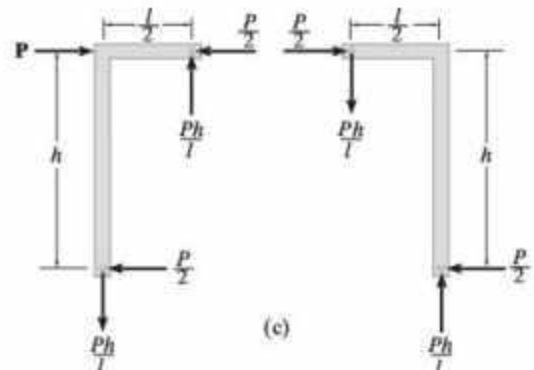
Figura 7-7



(b)



(d)



(c)

*Vea la figura 3-4.

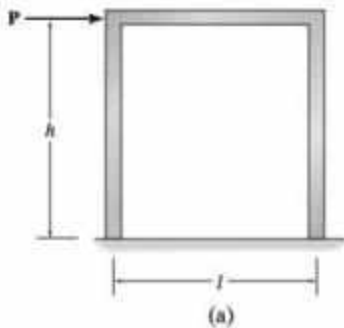
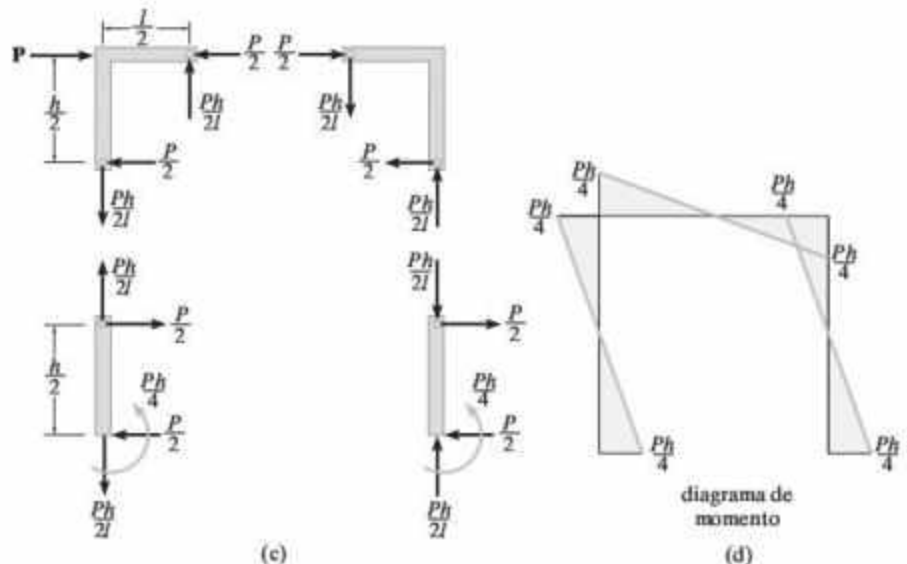
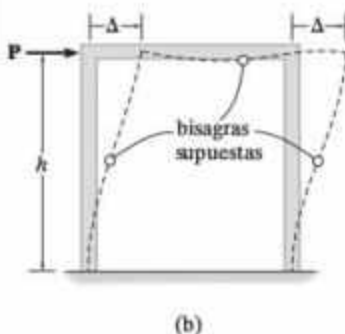


Figura 7-8

Fijamente apoyados. Los portales con dos soportes fijos, figura 7-8a, son estáticamente indeterminados de tercer grado, puesto que hay un total de seis incógnitas en los soportes. Si los elementos verticales tienen longitudes y áreas transversales iguales, el marco se deformará como se muestra en la figura 7-8b. En este caso se *supondrá* que los puntos de inflexión ocurren en los puntos medios de los tres elementos y, por lo tanto, las bisagras se colocan en estos puntos. Por consiguiente, las reacciones y los diagramas de momento para cada elemento pueden determinarse al desmembrar el marco en las bisagras y al aplicar las ecuaciones de equilibrio para cada una de las cuatro partes. Los resultados se muestran en la figura 7-8c. Tenga en cuenta que, como en el caso del portal articulado, las reacciones horizontales (fuerza cortante) en la base de cada columna son *iguales*. El diagrama de momento para este marco se indica en la figura 7-8d.



Fijación parcial. Dado que es difícil y costoso construir un soporte o cimiento perfectamente fijo para un marco de portal, es conservador y algo realista suponer que se produce una ligera rotación en los soportes, figura 7-9a. Como resultado, los puntos de inflexión en las columnas se encuentran en algún lugar entre el caso de tener un portal articulado, figura 7-7a, donde los "puntos de inflexión" están en los soportes (base de las columnas), y un portal fijamente apoyado, figura 7-8a, donde los puntos de inflexión están en el centro de las columnas. Muchos ingenieros definen arbitrariamente la ubicación en $h/3$, figura 7-9b, y por ende ubican bisagras en estos puntos, así como en el centro de la trabe.

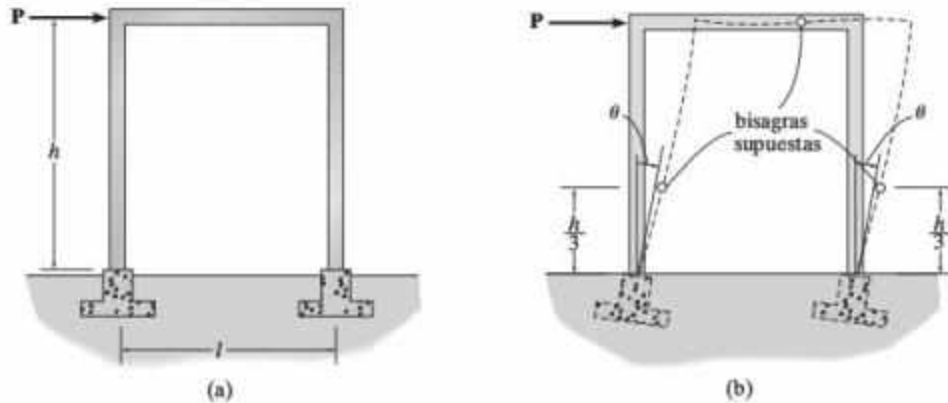


Figura 7-9

Armaduras. Cuando un portal se utiliza para abarcar grandes distancias, puede usarse una armadura en vez de la trabe horizontal. Dicha estructura se emplea en grandes puentes e inclinaciones transversales para grandes auditorios e instalaciones fabriles. Un ejemplo típico se muestra en la figura 7-10a. En todos los casos, se supone que la armadura suspendida está articulada en sus puntos de fijación a las columnas. Además, la armadura mantiene rectas las columnas dentro de la región de unión cuando el portal se somete al desplazamiento lateral Δ , figura 7-10b. En consecuencia, los portales de armadura pueden analizarse con los mismos supuestos que se usaron para los pórticos simples. Para las columnas articuladas, suponga que las reacciones horizontales (fuerza cortante) son iguales, como en la figura 7-7c. Para las columnas fijamente apoyadas, suponga que las reacciones horizontales son iguales y que en cada columna se produce un punto de inflexión (o bisagra) a media distancia entre la base de la columna y el punto más bajo de la conexión del elemento de la armadura con la columna, vea las figuras 7-8c y 7-10b.

El siguiente ejemplo ilustra la forma en que se determinan las fuerzas en los elementos de un portal de armaduras siguiendo el método de análisis aproximado que se describió anteriormente.

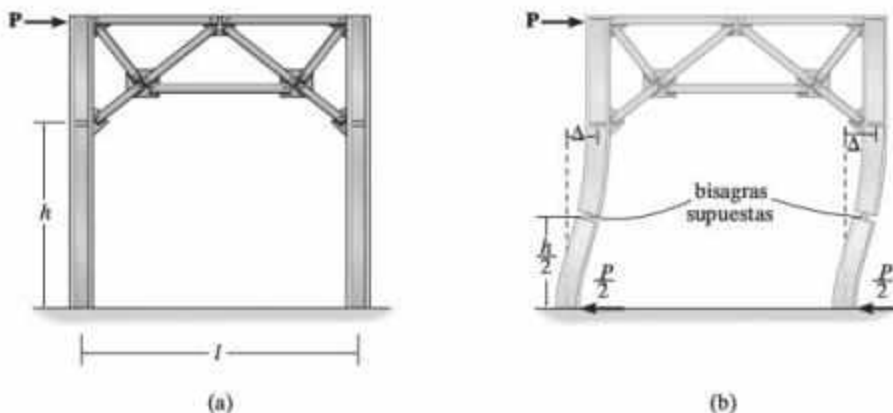


Figura 7-10

EJEMPLO 7.4

Determine mediante métodos aproximados las fuerzas que actúan en los elementos del portal Warren mostrado en la figura 7-11a.

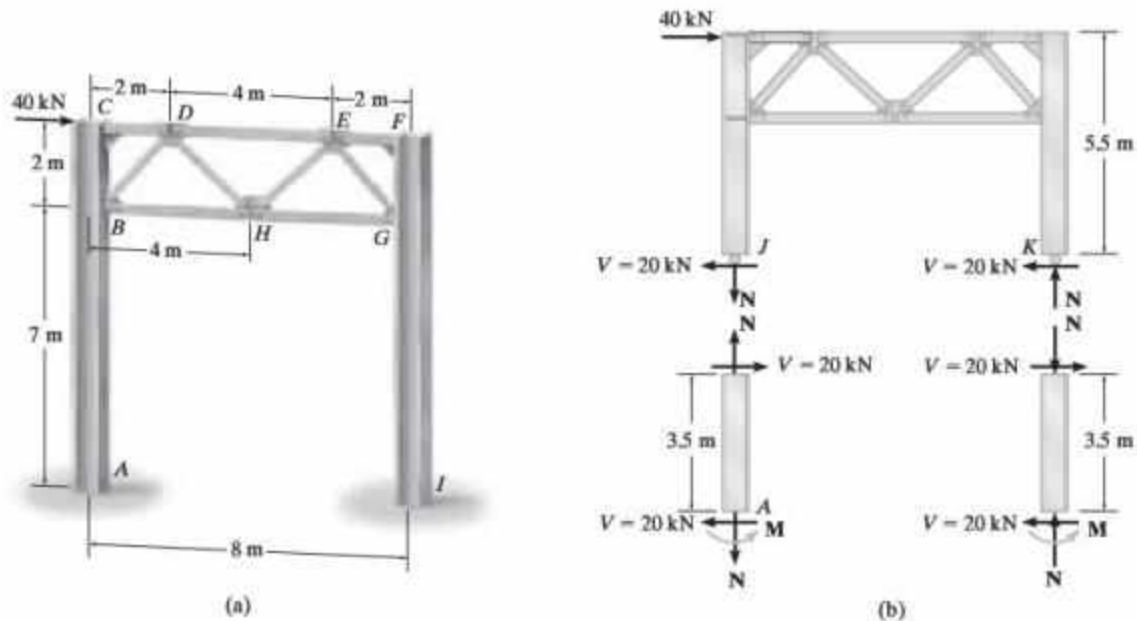


Figura 7-11

SOLUCIÓN

La porción B, C, F, G de la armadura actúa como una unidad rígida. Dado que los soportes están fijos, se supone que existe un punto de inflexión $7 \text{ m}/2 = 3.5 \text{ m}$ por encima de A e I , y que en la base de las columnas actúan reacciones horizontales o transversales iguales, es decir, $\Sigma F_x = 0$; $V = 40 \text{ kN}/2 = 20 \text{ kN}$. Con estos supuestos es posible separar la estructura en las bisagras J y K , figura 7-11b, y determinar las reacciones en las columnas de la siguiente manera:

Mitad inferior de la columna

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad M - 3.5(20) = 0 \quad M = 70 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Porción superior de la columna

$$\downarrow + \Sigma M_J = 0; \quad -40(5.5) + N(8) = 0 \quad N = 27.5 \text{ kN}$$

Con base en el método de las secciones, figura 7-11c, ahora es posible obtener las fuerzas en los elementos CD , BD y BH .

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; -27.5 + F_{BD} \sin 45^\circ = 0 \quad F_{BD} = 38.9 \text{ kN (T) Resp.}$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_B = 0; -20(3.5) - 40(2) + F_{CD}(2) = 0 \quad F_{CD} = 75 \text{ kN (C) Resp.}$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_D = 0; F_{BH}(2) - 20(5.5) + 27.5(2) = 0 \quad F_{BH} = 27.5 \text{ kN (T) Resp.}$$

De manera parecida, demuestre que los resultados pueden obtenerse en el diagrama de cuerpo libre de la columna FGI de la figura 7-11d. Con estos resultados, ahora puede encontrarse la fuerza en cada uno de los otros elementos de la armadura del portal empleando el método de los nudos.

Junta D, figura 7-11e

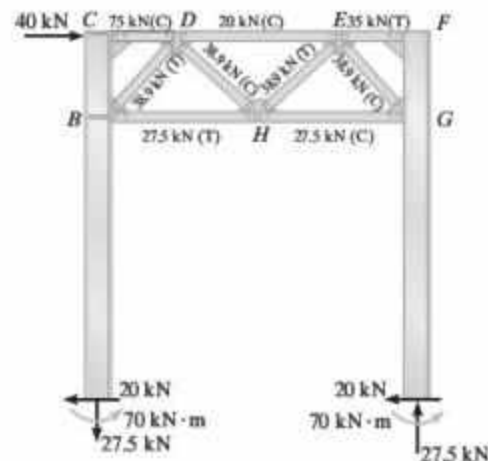
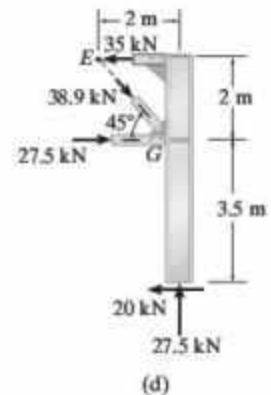
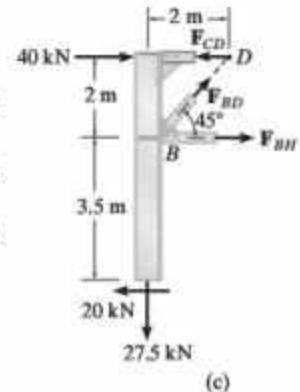
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; F_{DH} \sin 45^\circ - 38.9 \sin 45^\circ = 0 \quad F_{DH} = 38.9 \text{ kN (C) Resp.}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; 75 - 2(38.9 \cos 45^\circ) - F_{DE} = 0 \quad F_{DE} = 20 \text{ kN (C) Resp.}$$

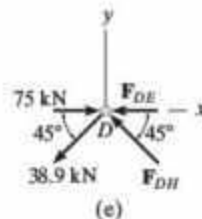
Junta H, figura 7-11f

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; F_{HE} \sin 45^\circ - 38.9 \sin 45^\circ = 0 \quad F_{HE} = 38.9 \text{ kN (T) Resp.}$$

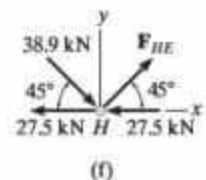
Estos resultados se resumen en la figura 7-11g.



(g)



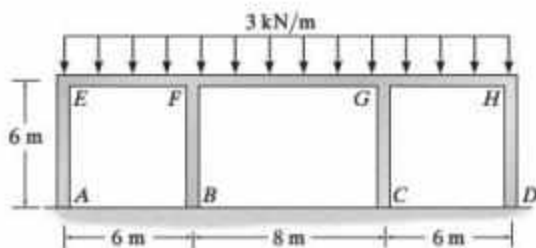
(e)



(f)

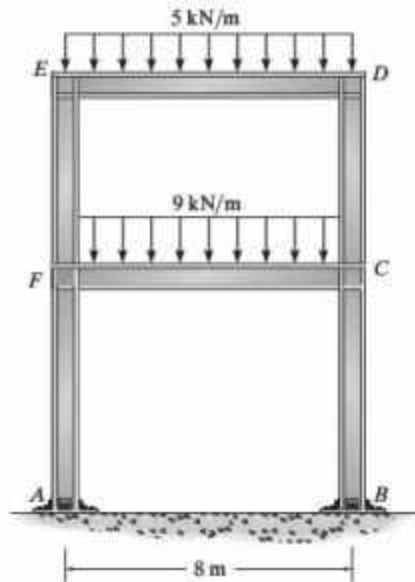
PROBLEMAS

7-13. Determine (en forma aproximada) los momentos internos en las juntas *A* y *B* del marco.



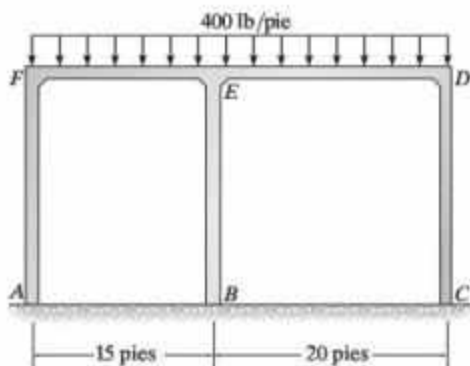
Prob. 7-13

7-15. Determine (en forma aproximada) los momentos internos en *A* causados por las cargas verticales.



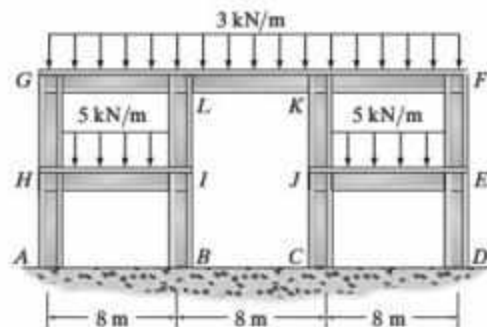
Prob. 7-15

7-14. Determine (en forma aproximada) los momentos internos en las juntas *F* y *D* del marco.



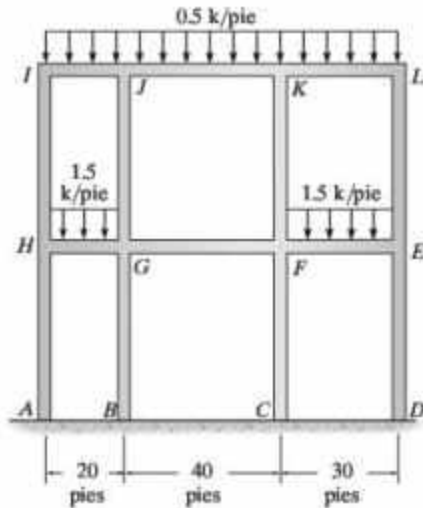
Prob. 7-14

***7-16.** Determine (en forma aproximada) los momentos internos en *A* y *B* causados por las cargas verticales.



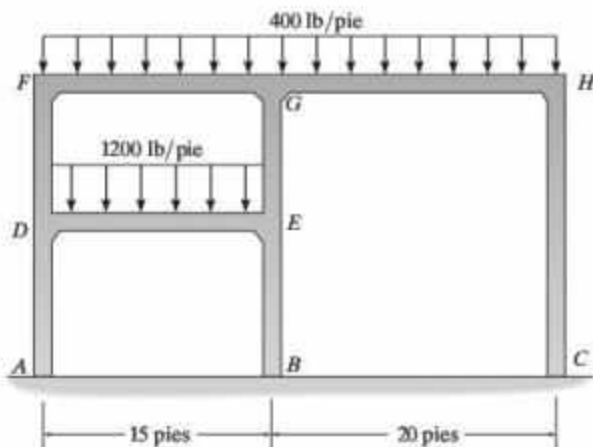
Prob. 7-16

7-17. Determine (en forma aproximada) los momentos internos en las juntas I y L . Por otra parte, ¿cuál es el momento interno en la junta H causado por el elemento HG ?



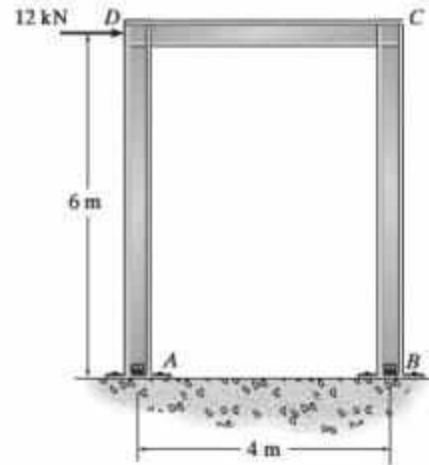
Prob. 7-17

7-18. Determine (en forma aproximada) las reacciones en los soportes A , B y C del marco.



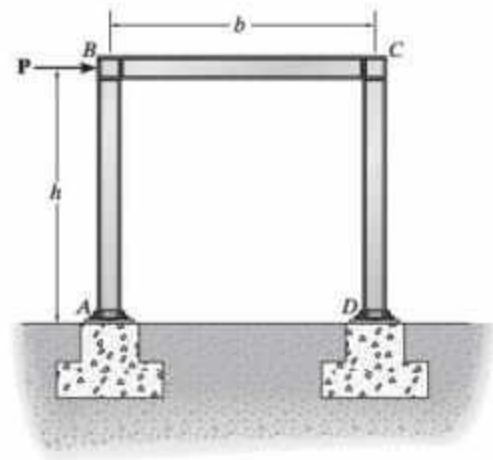
Prob. 7-18

7-19. Determine (en forma aproximada) las reacciones en los soportes A y B del marco de portal. Suponga que los soportes están (a) articulados, y (b) fijos.



Prob. 7-19

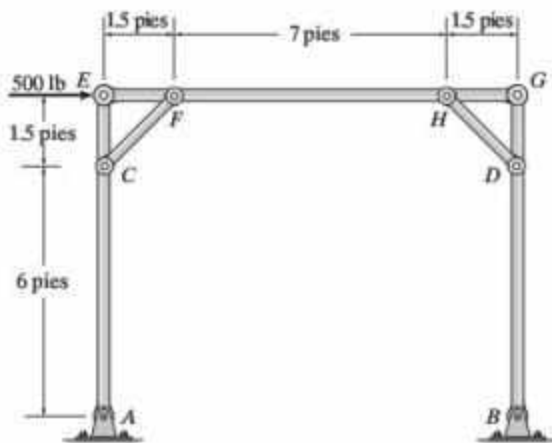
7-20. Determine (en forma aproximada) el momento interno y la fuerza cortante en los extremos de cada elemento del marco de portal. Suponga que los soportes en A y D están parcialmente fijos, de modo que hay un punto de inflexión ubicado en $h/3$ de la parte inferior de cada columna.



Prob. 7-20

7-21. Dibuje (en forma aproximada) el diagrama de momento para el elemento ACE del portal, el cual se construyó con un elemento rígido EG y soportes acodados CF y DH . Suponga que todos los puntos de conexión están articulados. También determine la fuerza en el refuerzo acodado CF .

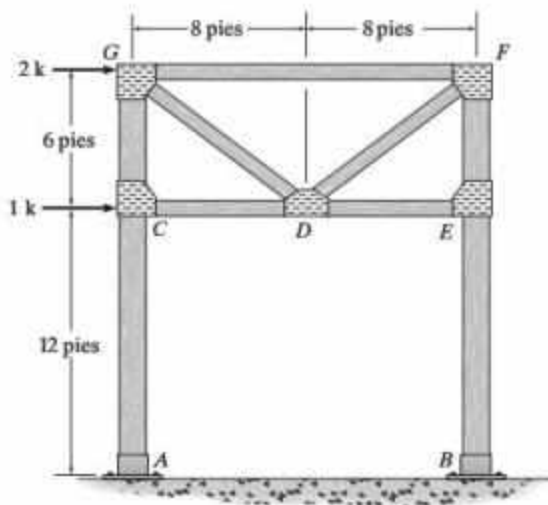
7-22. Resuelva el problema 7-21 si los soportes en A y B son fijos en vez de articulados.



Probs. 7-21/7-22

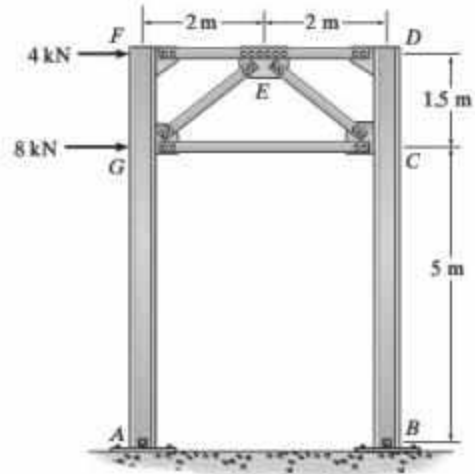
7-23. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada elemento de la armadura del marco de portal. También encuentre las reacciones en los soportes fijos A y B de la columna. Suponga que todos los elementos de la armadura están articulados en sus extremos.

***7-24.** Resuelva el problema 7-23 si los soportes en A y B están articulados en vez de fijos.



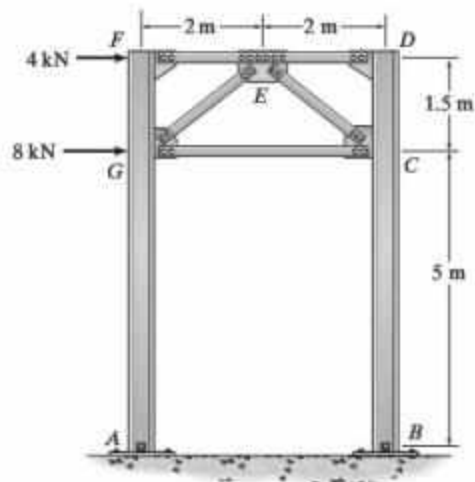
Probs. 7-23/7-24

7-25. Dibuje (en forma aproximada) el diagrama de momento para la columna AGF del portal. Suponga que todos los elementos de la armadura y las columnas están articulados en sus extremos. También determine las fuerzas en todos los elementos de la armadura.



Prob. 7-25

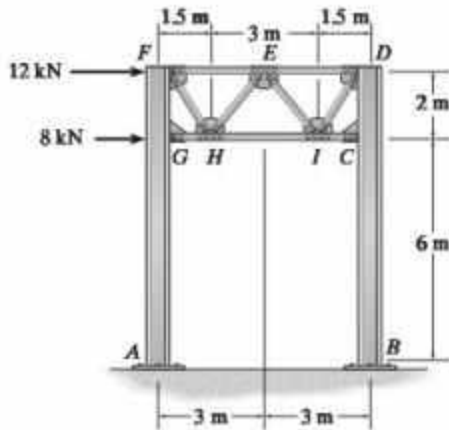
7-26. Dibuje (en forma aproximada) el diagrama de momento para la columna AGF del portal. Suponga que todos los elementos de la armadura están articulados en sus extremos. Las columnas están fijas en A y B . También determine la fuerza de todos los elementos de la armadura.



Prob. 7-26

7-27. Determine (en forma aproximada) la fuerza en cada elemento de la armadura del marco de portal. También encuentre las reacciones en los soportes *A* y *B* de la columna fija. Suponga que todos los elementos de la armadura están articulados en sus extremos.

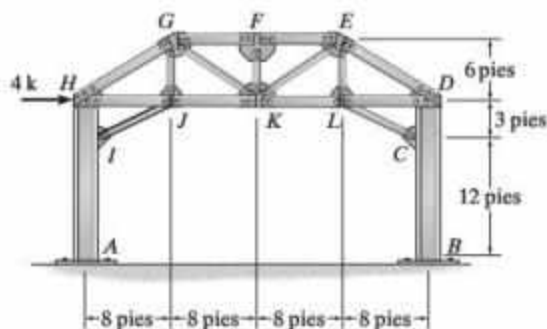
***7-28.** Resuelva el problema 7-27 si los soportes en *A* y *B* están fijos en vez de articulados.



Probs. 7-27/7-28

7-29. Determine (en forma aproximada) la fuerza en los elementos *GF*, *GK* y *JK* del marco de portal. También encuentre las reacciones en los soportes *A* y *B* de la columna fija. Suponga que todos los elementos de la armadura están conectados en sus extremos.

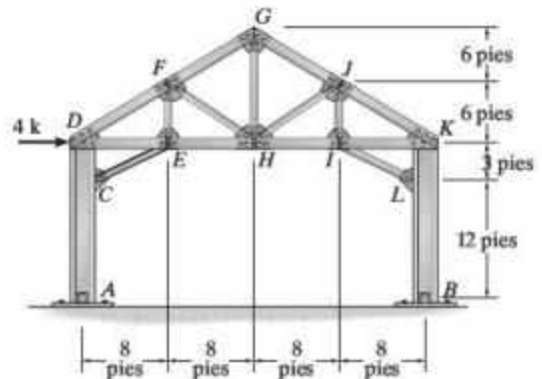
7-30. Resuelva el problema 7-29 si los soportes en *A* y *B* están articulados en vez de fijos.



Probs. 7-29/7-30

7-31. Dibuje (en forma aproximada) el diagrama de momento para la columna *ACD* del portal. Suponga que todos los elementos de la armadura y las columnas están articulados en sus extremos. También determine la fuerza en los elementos *FG*, *FH* y *EH*.

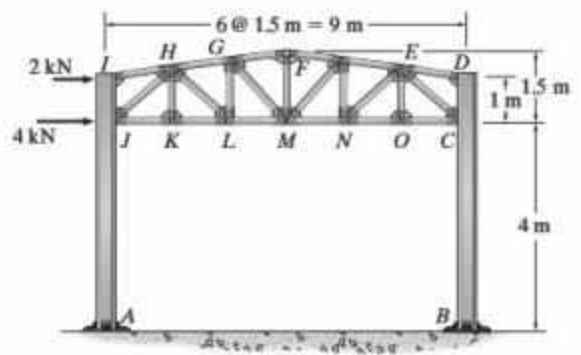
***7-32.** Resuelva el problema 7-31 si los soportes en *A* y *B* están fijos en vez de articulados.



Probs. 7-31/7-32

7-33. Dibuje (en forma aproximada) el diagrama de momentos para la columna *A/I* del portal. Suponga que todos los elementos de la armadura y las columnas están articulados en sus extremos. También determine la fuerza en los elementos *HG*, *HL* y *KL*.

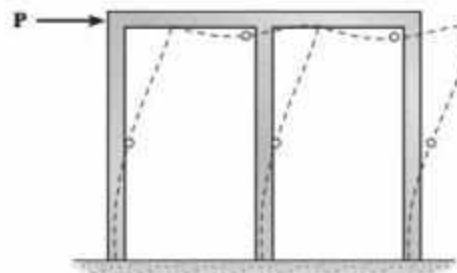
7-34. Resuelva el problema 7-33 si los soportes en *A* y *B* están fijos en vez de articulados.



Probs. 7-33/7-34

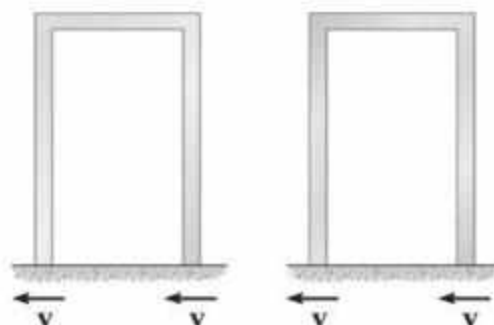
7.5 Cargas laterales en marcos de construcción: Método del portal

En la sección 7-4 se analizó la acción de las cargas laterales sobre los marcos de portal y se encontró que para un marco fijo apoyado en su base, los puntos de inflexión ocurren aproximadamente en el centro de cada viga y columna y que las columnas soportan las mismas cargas cortantes, figura 7-8. Un caballete de edificio se deforma de la misma manera que un marco de portal, figura 7-12a y, por lo tanto, sería conveniente suponer que los puntos de inflexión se producen en el centro de las columnas y trabes. Si se considera que cada caballete de la estructura se compone de una serie de portales, figura 7-12b, entonces, como supuesto adicional, las *columnas interiores* representarían el efecto de *dos columnas del portal* y, por ende, soportarían el doble de fuerza cortante V que las dos columnas exteriores.



o = punto de inflexión

(a)



(b)

Figura 7-12

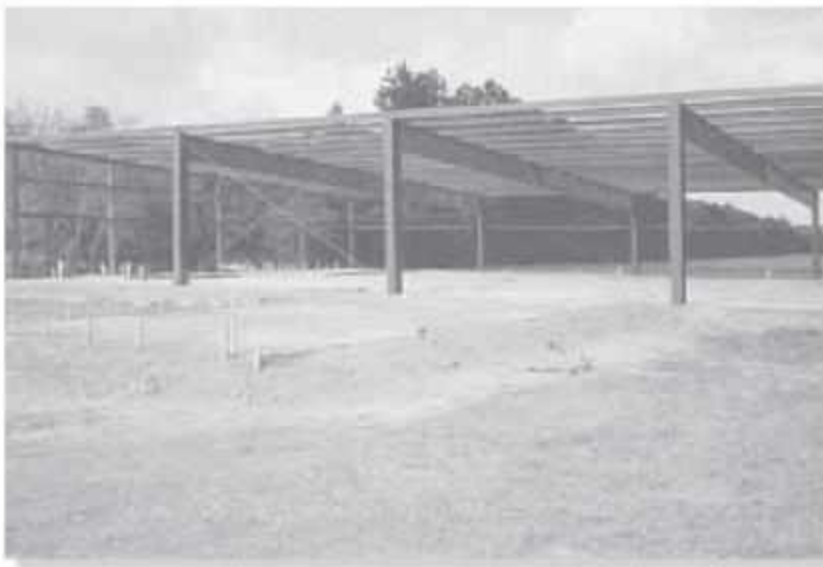
En resumen, el método del portal para analizar los marcos de construcción fijamente apoyados requiere los siguientes supuestos:

1. En el centro de cada trabe se coloca una bisagra, puesto que se supone que éste es un punto de momento cero.
2. En el centro de cada columna se coloca una bisagra, puesto que se supone que éste es un punto de momento cero.
3. En un nivel de piso dado, la fuerza cortante en las bisagras de la columna interior es el doble que en las bisagras de la columna exterior, puesto que el marco se considera una superposición de portales.

Estos supuestos proporcionan una reducción adecuada del marco a una estructura estáticamente determinada pero estable bajo carga.

En comparación con el análisis estáticamente indeterminado que es más exacto, *el método del portal es el más adecuado para las construcciones con poca altura y estructura uniforme*. La razón de esto tiene relación con la acción de la estructura bajo carga. A este respecto, *considere que el marco actúa como una viga en voladizo* que está fija al suelo. Recuerde del estudio de la mecánica de materiales que la *resistencia a la fuerza cortante* se vuelve más importante en el diseño de vigas cortas, en tanto que la *resistencia a la flexión* es más importante si la viga es larga (vea la sección 7-6). El método del portal se basa en el supuesto relacionado con la fuerza cortante como se indica en el punto 3 anterior.

Los siguientes ejemplos ilustran la forma de aplicar el método del portal para analizar un caballete de edificio.



El método del portal puede usarse para realizar un análisis (aproximado) de las cargas laterales en este marco de una sola planta.

EJEMPLO 7.5

Determine (en forma aproximada) las reacciones en la base de las columnas del marco que se muestra en la figura 7-13a. Use el método de análisis del portal.

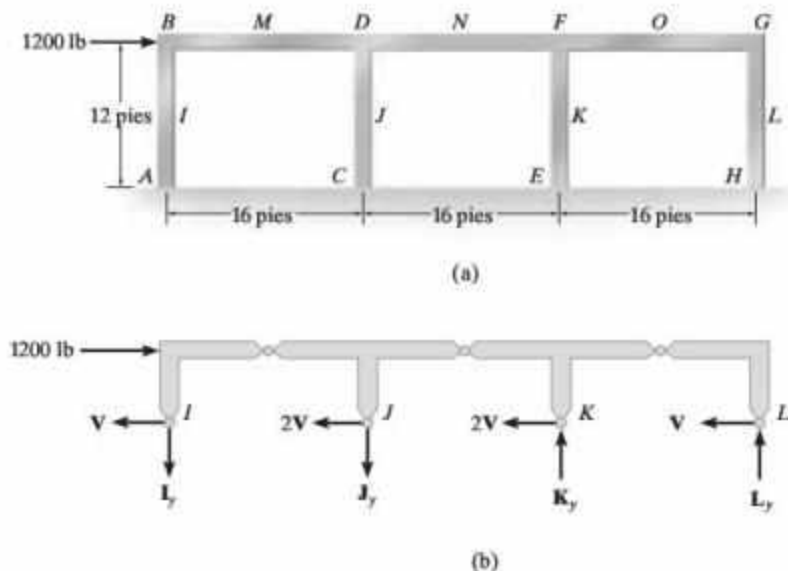


Figura 7-13

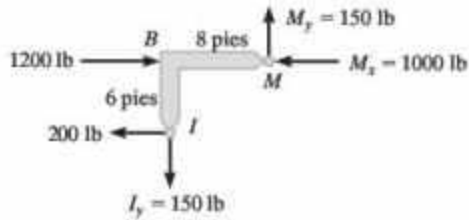
SOLUCIÓN

Al aplicar los dos primeros supuestos del método del portal, se colocan bisagras en los centros de las trabes y las columnas de la estructura, figura 7-13a. Una sección a través de las bisagras de columna en I, J, K, L produce el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 7-13b. Aquí se aplica el tercer supuesto en relación con las fuerzas cortantes en las columnas. Se requiere

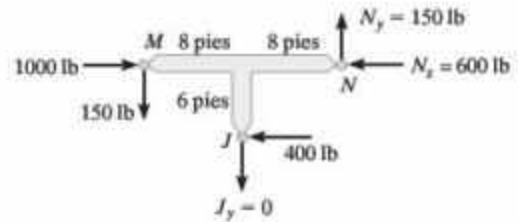
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 1200 - 6V = 0 \quad V = 200 \text{ lb}$$

Con base en este resultado, ahora se puede desmembrar el marco en las bisagras y determinar sus reacciones. Como regla general, siempre inicie este análisis en la esquina o junta donde se aplica la carga horizontal. Por lo tanto, el diagrama de cuerpo libre del segmento IBM se muestra en la figura 7-13c. Las tres componentes de la reacción en las bisagras I_y, M_x y M_y se determinan al aplicar de $\Sigma M_M = 0, \Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$, respectivamente. A continuación se analiza el segmento adyacente MJN , figura 7-13d, seguido por el segmento NKO , figura 7-13e, y por último el segmento OGL , figura 7-13f. Usando estos resultados, los diagramas de cuerpo libre de las columnas con las reacciones en sus soportes son como se muestran en la figura 7-13g.

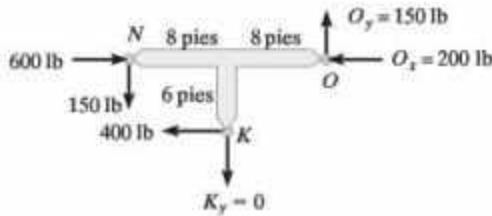
Si se consideran los segmentos horizontales de traveses de las figuras 7-13c, d, e y f, entonces el diagrama de momento para la trabe es como el que se muestra en la figura 7-13h.



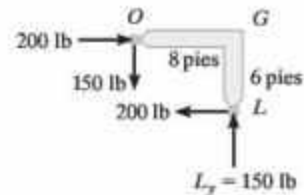
(c)



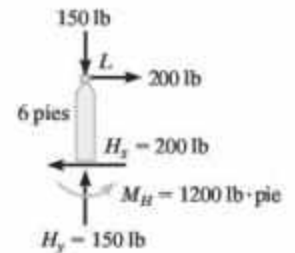
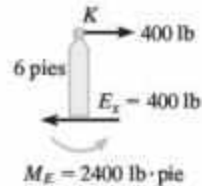
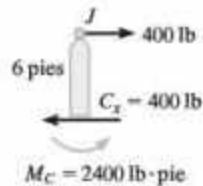
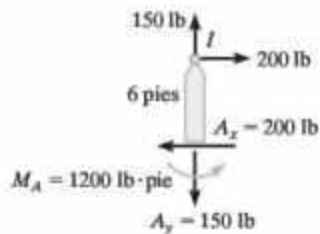
(d)



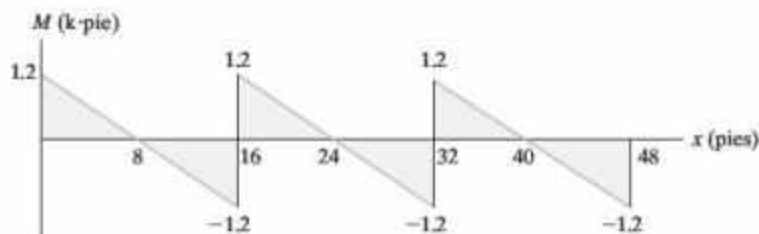
(e)



(f)



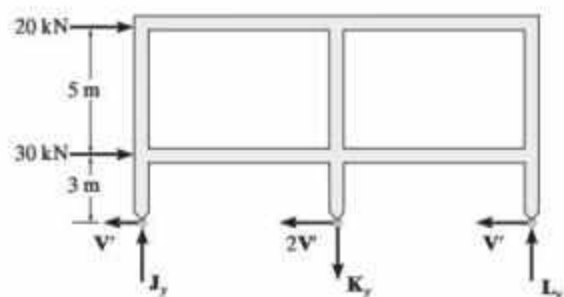
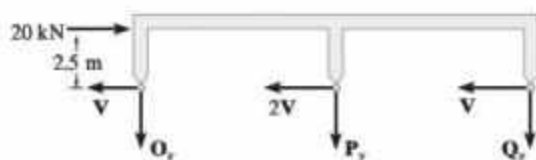
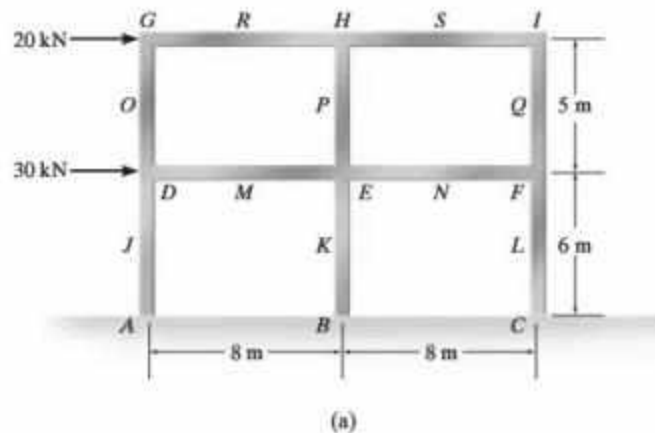
(g)



(h)

EJEMPLO 7.6

Determine (en forma aproximada) las reacciones en la base de las columnas del marco que se muestra en la figura 7-14a. Use el método de análisis del portal.

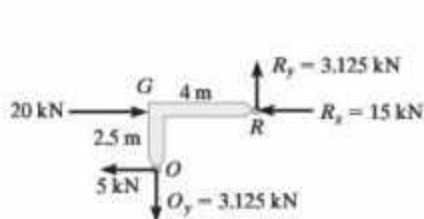
**Figura 7-14****SOLUCIÓN**

En primer lugar, se colocan las bisagras en los *centros* de las trabes y las columnas del marco, figura 7-14a. Una sección a través de las bisagras en O, P, Q y J, K, L genera el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 7-14b. Las fuerzas cortantes en las columnas se calculan de la siguiente manera:

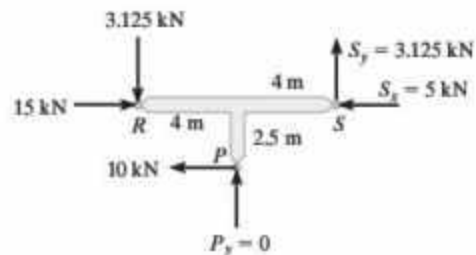
$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 20 - 4V = 0 \quad V = 5 \text{ kN}$$

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 20 + 30 - 4V' = 0 \quad V' = 12.5 \text{ kN}$$

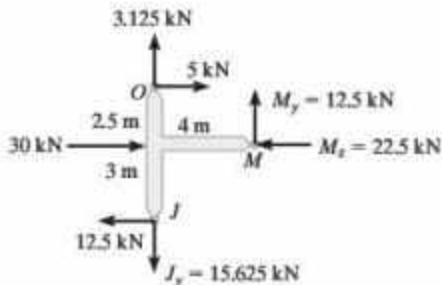
Utilizando estos resultados se puede continuar con el análisis de cada parte del marco. El análisis comienza con el segmento en *esquina* *OGR*, figura 7-14c. Las tres incógnitas O_y , R_x y R_y se han calculado empleando las ecuaciones de equilibrio. Con estos resultados, se analiza a continuación el segmento *OJM*, figura 7-14d; luego el segmento *JA*, figura 7-14e; *RPS*, figura 7-14f; *PMKN*, figura 7-14g, y *KB*, figura 7-14h. Complete este ejemplo y analice los segmentos *SIQ*, después *QNL* y por último *LC*; también demuestre que $C_x = 12.5$ kN, $C_y = 15.625$ kN, y $M_C = 37.5$ kN · m. Además, use los resultados para demostrar que el diagrama de momento para *DMENF* es como se muestra en la figura 7.14i.



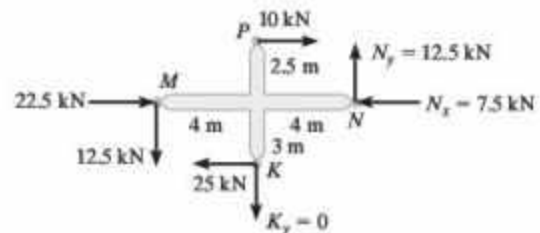
(c)



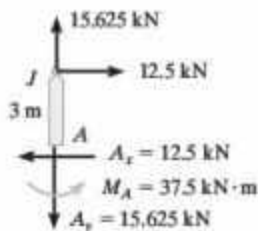
(f)



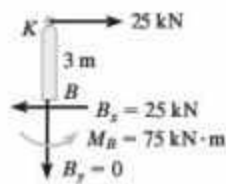
(d)



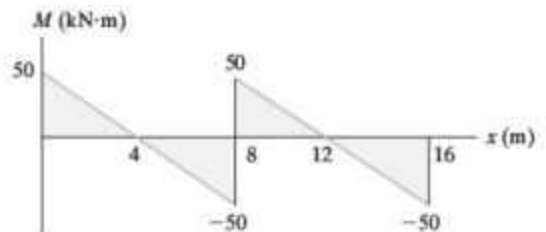
(g)



(e)



(h)



(i)

7.6 Cargas laterales sobre marcos de construcción: Método del voladizo

El método del voladizo se basa en la misma acción que una viga en voladizo larga sometida a una carga transversal. Como se vio en el estudio de la mecánica de materiales, tal carga provoca un esfuerzo flexionante en la viga que varía linealmente desde el eje neutro de la viga, figura 7-15a. De manera similar, las cargas laterales sobre un marco tienden a volcarlo o a causarle una rotación respecto a un “eje neutro”, el cual se encuentra en un plano horizontal que pasa a través de las columnas entre cada piso. Para contrarrestar este volcamiento, las fuerzas (o esfuerzos) axiales en las columnas serán de tensión en un lado del eje neutro y de compresión en el otro lado, figura 7-15b. Por lo tanto, al igual que con la viga en voladizo, parece razonable suponer que este esfuerzo axial tiene una variación lineal desde el centroide de las áreas de la columna o el eje neutro. Por consiguiente, *el método del voladizo es adecuado si el marco es alto y delgado, o tiene columnas con áreas transversales diferentes.*

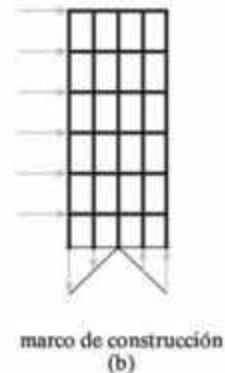
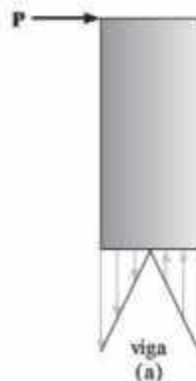


Figura 7-15

En resumen, cuando se emplee el método del voladizo, deben aplicarse los siguientes supuestos a un marco fijamente apoyado.

1. En el centro de cada viga se coloca una bisagra, puesto que se supone que éste es un punto de momento cero.
2. En el centro de cada columna se coloca una bisagra, puesto que se supone que éste es un punto de momento cero.
3. El *esfuerzo* axial en una columna es proporcional a su distancia desde el centroide de las áreas transversales de las columnas en un nivel de piso dado. Como el *esfuerzo* es igual a fuerza por área, entonces en el caso especial de las *columnas que tienen áreas transversales iguales*, la *fuerza* en una columna también es proporcional a su distancia desde el centroide de las áreas de la columna.

Estos tres supuestos hacen que el marco sea estable y estáticamente determinado.

Los siguientes ejemplos ilustran la forma en que se aplica el método del voladizo para analizar un caballete de edificio.



La estructura del edificio tiene conexiones rígidas. El método del voladizo puede usarse para realizar un análisis (aproximado) de cargas laterales.

EJEMPLO 7.7

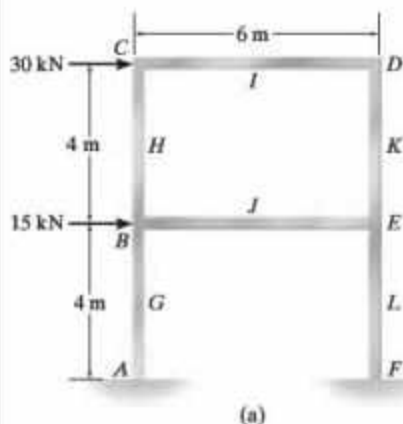
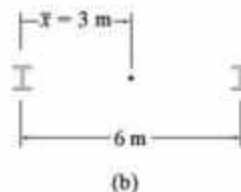


Figura 7-16

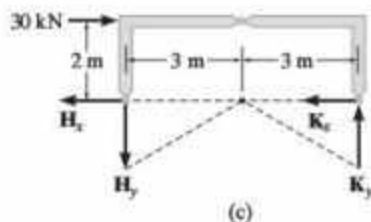
Determine (en forma aproximada) las reacciones en la base de las columnas del marco que se muestra en la figura 7-16a. Se supone que las columnas tienen áreas de sección transversal iguales. Use el método de análisis del voladizo.



SOLUCIÓN

En primer lugar se colocan bisagras en los puntos medios de las columnas y trabes. Las ubicaciones de estos puntos se indican mediante las letras *G* a *L* en la figura 7-16a. Los centroides de las áreas transversales de las columnas pueden determinarse por inspección, figura 7-16b, o analíticamente de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{0(A) + 6(A)}{A + A} = 3 \text{ m}$$



El *esfuerzo* axial en cada columna es proporcional a su distancia desde este punto. Aquí las columnas tienen la misma área en su sección transversal y, por lo tanto, la fuerza en cada columna es proporcional a su distancia desde el centroide. Entonces, una sección a través de las bisagras *H* y *K* en el piso superior genera el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 7-16c. Tenga en cuenta que la columna a la izquierda del centroide debe estar sometida a tensión, en tanto que la columna de la derecha estará sometida a compresión. Esto es necesario para contrarrestar el volcamiento causado por la fuerza de 30 kN. Al sumar los momentos con respecto al eje neutro, se tiene

$$\downarrow + \sum M = 0; \quad -30(2) + 3H_y + 3K_y = 0$$

Las incógnitas pueden relacionarse por medio de triángulos proporcionales, figura 7-16c, es decir,

$$\frac{H_y}{3} = \frac{K_y}{3} \quad \text{o bien} \quad H_y = K_y$$

Así que,

$$H_y = K_y = 10 \text{ kN}$$

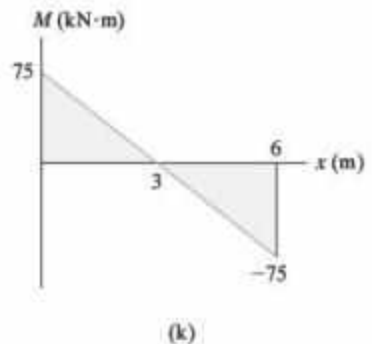
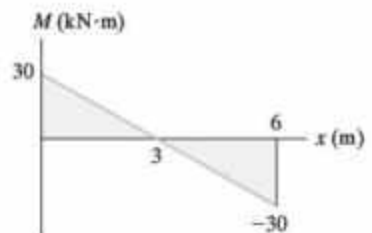
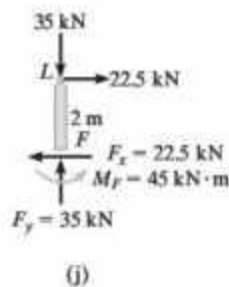
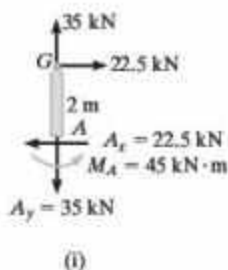
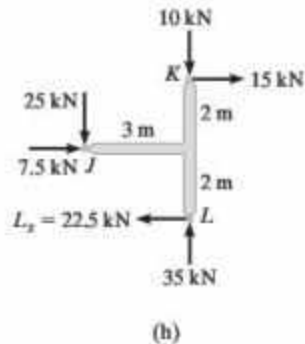
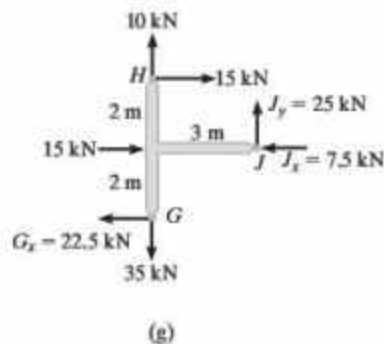
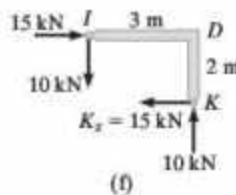
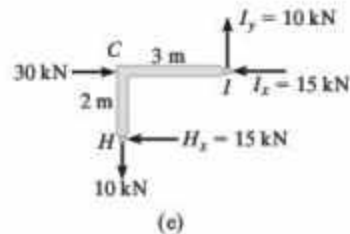
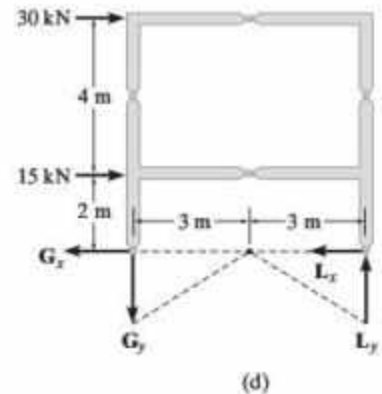
De una manera parecida, utilizando una sección del marco a través de las bisagras en G y L , figura 7-16d, se tiene

$$\downarrow + \Sigma M = 0; \quad -30(6) - 15(2) + 3G_y + 3L_y = 0$$

Como $G_y/3 = L_y/3$ o bien $G_y = L_y$, entonces

$$G_y = L_y = 35 \text{ kN}$$

Ahora puede analizarse cada parte del marco usando los resultados anteriores. Como en los ejemplos 7-5 y 7-6, se comienza en la esquina superior, donde se produce la carga aplicada, es decir, en el segmento HCI , figura 7-16a. Al aplicar las tres ecuaciones de equilibrio, $\Sigma M_I = 0$, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, se obtienen los resultados para H_x , I_x e I_y , respectivamente, que se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la figura 7-16e. Con base en estos resultados, enseguida se analiza el segmento IDK , figura 7-16f; seguido de HJG , figura 7-16g; después KJL , figura 7-16h, y por último las partes inferiores de las columnas, figuras 7-16i y 7-16j. Los diagramas de momento para cada trabe se muestran en la figura 7-16k.



EJEMPLO 7.8

Muestre cómo se determinan (en forma aproximada) las reacciones en la base de las columnas del marco que se muestra en la figura 7-17a. Las columnas tienen las áreas de sección transversal que se muestran en la figura 7-17b. Use el método de análisis del voladizo.

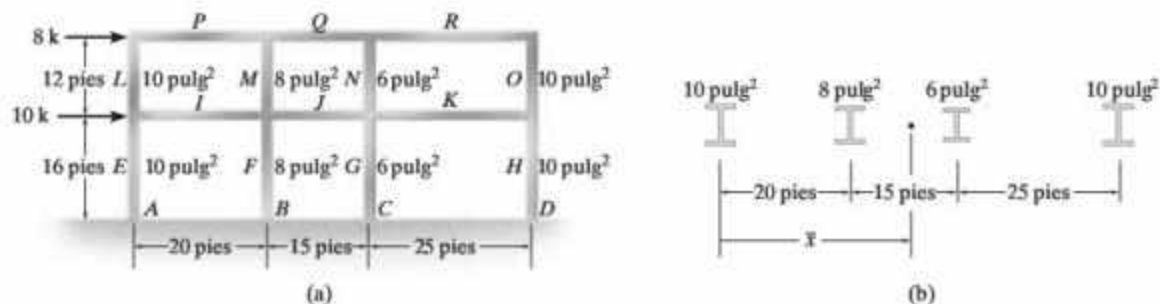


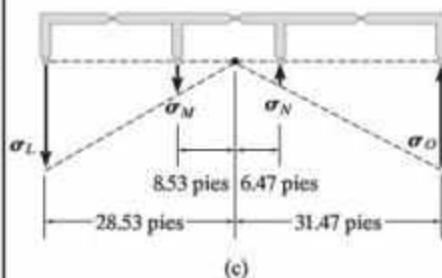
Figura 7-17

SOLUCIÓN

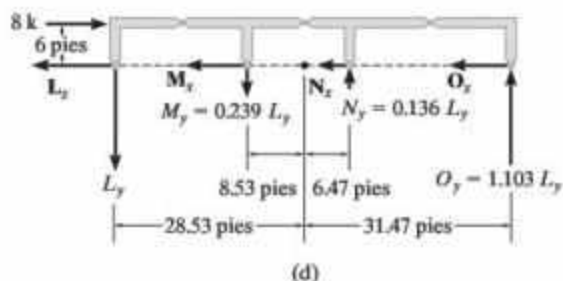
Primero, se supone que existen bisagras en los centros de las traveses y columnas del marco, figuras 7-17d y 7-17e. El centroide de las áreas transversales de las columnas se determina a partir de la figura 7.17b de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{0(10) + 20(8) + 35(6) + 60(10)}{10 + 8 + 6 + 10} = 28.53 \text{ pies}$$

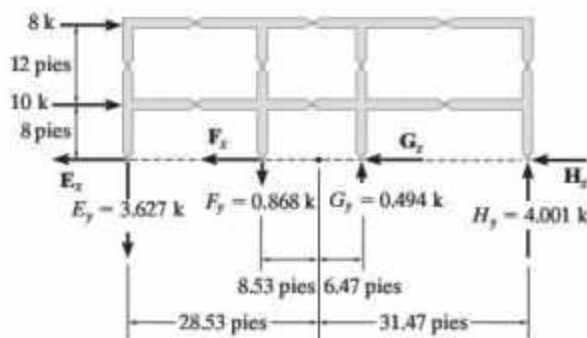
En primer lugar se considerará la sección a través de las bisagras en L, M, N y O.



(c)



(d)



(e)

En este problema las columnas tienen *diferentes* áreas transversales, por lo que debe tenerse en cuenta que el *esfuerzo axial* en cada columna es proporcional a su distancia desde el eje neutro, ubicado en $\bar{x} = 28.53$ pies.

Los esfuerzos en las columnas pueden relacionarse mediante triángulos semejantes, figura 7-17c. Si se expresan las relaciones en términos de la fuerza en cada columna, puesto que $\sigma = F/A$, se tiene

$$\sigma_M = \frac{8.53 \text{ pies}}{28.53 \text{ pies}} \sigma_L; \quad \frac{M_y}{8 \text{ pulg}^2} = \frac{8.53}{28.53} \left(\frac{L_y}{10 \text{ pulg}^2} \right) \quad M_y = 0.239 L_y$$

$$\sigma_N = \frac{6.47 \text{ pies}}{28.53 \text{ pies}} \sigma_L; \quad \frac{N_y}{6 \text{ pulg}^2} = \frac{6.47}{28.53} \left(\frac{L_y}{10 \text{ pulg}^2} \right) \quad N_y = 0.136 L_y$$

$$\sigma_O = \frac{31.47 \text{ pies}}{28.53 \text{ pies}} \sigma_L; \quad \frac{O_y}{10 \text{ pulg}^2} = \frac{31.47}{28.53} \left(\frac{L_y}{10 \text{ pulg}^2} \right) \quad O_y = 1.103 L_y$$

Ahora que cada fuerza está relacionada con L_y , el diagrama de cuerpo libre es como se muestra en la figura 7-17d.

Observe cómo las columnas a la izquierda del centroide están sometidas a tensión y las de la derecha están sometidas a compresión. ¿Por qué? Al sumar momentos con respecto al eje neutro se tiene

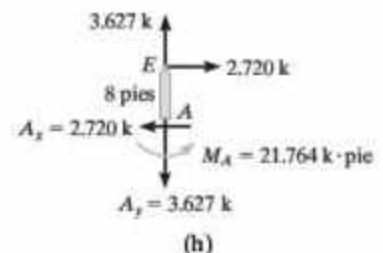
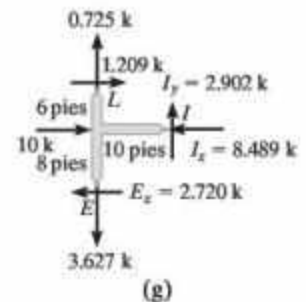
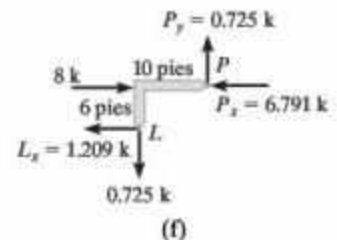
$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M = 0; \quad -8 \text{ k} (6 \text{ pies}) + L_y (28.53 \text{ pies}) + (0.239 L_y)(8.53 \text{ pies}) \\ + (0.136 L_y)(6.47 \text{ pies}) + (1.103 L_y)(31.47 \text{ pies}) = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo,

$$L_y = 0.725 \text{ k} \quad M_y = 0.174 \text{ k} \quad N_y = 0.0987 \text{ k} \quad O_y = 0.800 \text{ k}$$

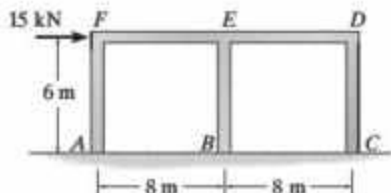
Usando este mismo método, demuestre que se obtienen los resultados de la figura 7-17e para las columnas E, F, G y H.

Ahora se puede proceder a analizar cada parte del marco. Como en los ejemplos anteriores, se comienza con el segmento de la esquina superior LP, figura 7-17f. Utilizando los resultados calculados, enseguida se analiza el segmento LEI, figura 7-17g, seguido por el segmento EA, figura 7-17h. Luego pueden seguirse analizando los otros segmentos en secuencia, es decir, PQM, después MJFI, enseguida, FB y así sucesivamente.



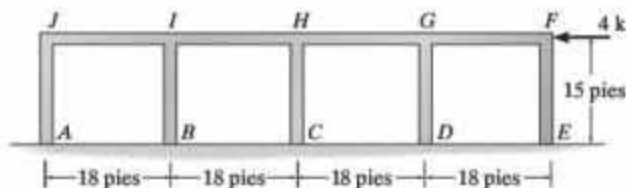
PROBLEMAS

7-35. Use el método de análisis del portal y dibuje el diagrama de momento para la trabe *FED*.



Prob. 7-35

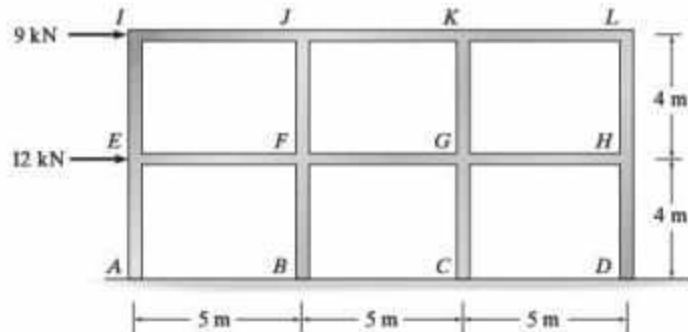
***7-36.** Use el método de análisis del portal y dibuje el diagrama de momento para la trabe *JIHGF*.



Prob. 7-36

7-37. Use el método del portal y determine (en forma aproximada) las reacciones en los soportes *A*, *B*, *C* y *D*.

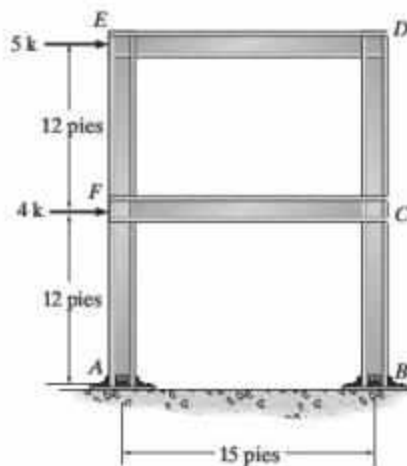
7-38. Use el método del voladizo y determine (en forma aproximada) las reacciones en los soportes *A*, *B*, *C* y *D*. Todas las columnas tienen la misma área en su sección transversal.



Probs. 7-37/7-38

7-39. Use el método de análisis del portal y dibuje el diagrama de momento para la columna *AFE*.

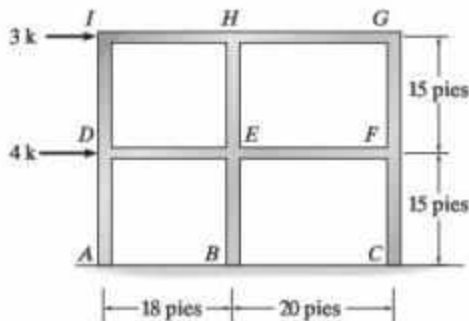
***7-40.** Resuelva el problema 7-39 mediante el método de análisis del voladizo. Todas las columnas tienen la misma área en su sección transversal.



Probs. 7-39/7-40

7-41. Use el método del portal y determine (en forma aproximada) las reacciones en *A*.

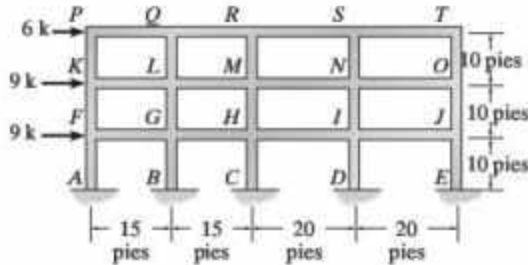
7-42. Use el método del voladizo y determine (en forma aproximada) las reacciones en *A*. Todas las columnas tienen la misma área en su sección transversal.



Probs. 7-41/7-42

7-43. Dibuje (en forma aproximada) los diagramas de momento para la trabe $PQRST$ y la columna $BGLQ$ del marco de construcción. Use el método del portal.

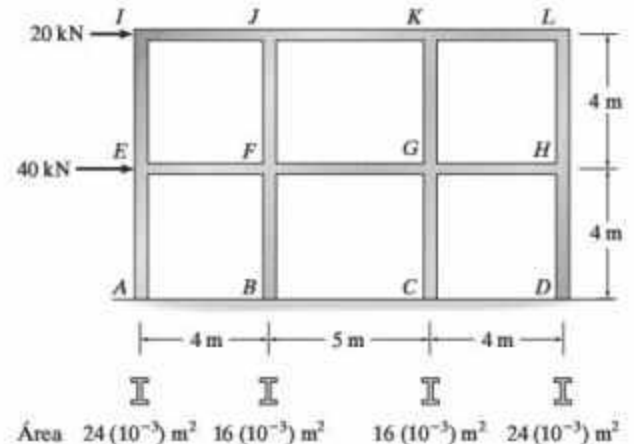
***7-44.** Dibuje (en forma aproximada) los diagramas de momento para la trabe $PQRST$ y la columna $BGLQ$ del marco de construcción. Use el método del voladizo.



Probs. 7-43/7-44

7-45. Dibuje el diagrama de momento para la trabe $IJKL$ del marco de construcción. Use el método de análisis del portal.

7-46. Resuelva el problema 7-45 mediante el método de análisis del voladizo. Cada columna tiene el área transversal que se indica.



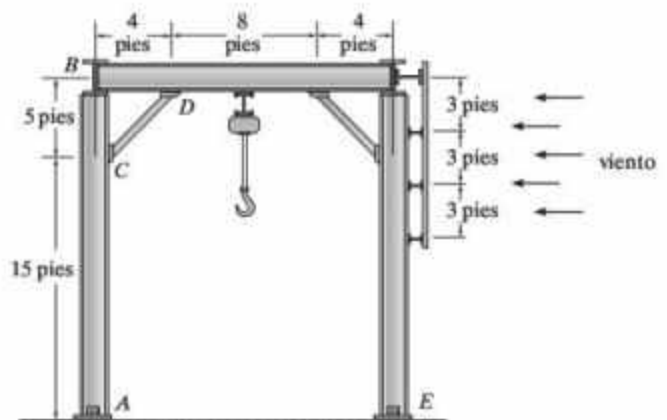
Probs. 7-45/7-46

PROBLEMAS DE PROYECTO

7-1P. Los caballetes del edificio de almacenamiento que se muestra en la fotografía están separados por 10 pies y se puede suponer que están articulados en todos los puntos de apoyo. Utilice el modelo idealizado que se muestra y determine la carga del viento prevista sobre el caballete. Tenga en cuenta que la carga del viento se transmite desde la pared



hasta los cuatro largueros y después a las columnas en el lado derecho. Haga un análisis aproximado y determine la carga axial máxima y el momento máximo en la columna AB . Suponga que las columnas y los puntales acodados están articulados en sus extremos. El edificio está situado en un terreno plano de Nueva Orleans, Louisiana, donde $V = 125$ mi/h.

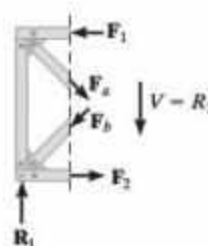
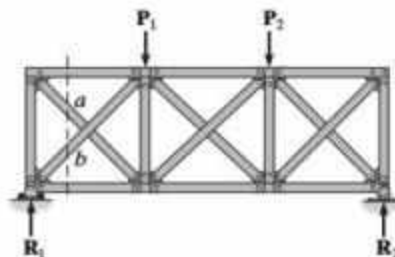


Prob. 7-1P

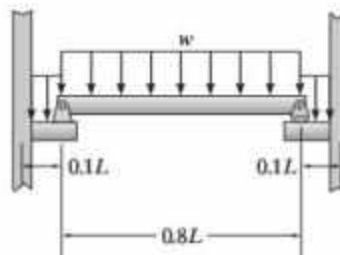
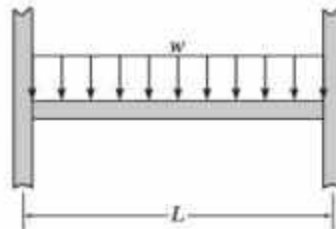
REPASO DEL CAPÍTULO

Un análisis estructural aproximado se utiliza para convertir una estructura estáticamente indeterminada en estáticamente determinada. De esta manera puede hacerse un diseño preliminar de los elementos y, una vez completo, efectuar el análisis indeterminado, que es más exacto, para perfeccionar el diseño.

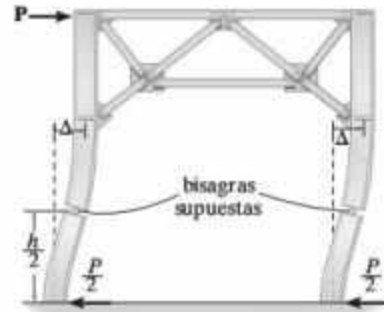
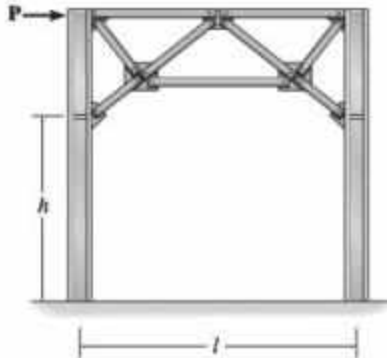
Las armaduras que tienen refuerzos diagonales transversales dentro de sus paneles pueden analizarse suponiendo que la diagonal en tensión soporta la fuerza cortante del panel y que la diagonal en compresión es un elemento de fuerza cero. Esto es razonable si los elementos son largos y delgados. Para secciones más grandes, lo razonable es suponer que cada diagonal soporte la mitad de la fuerza cortante del panel.



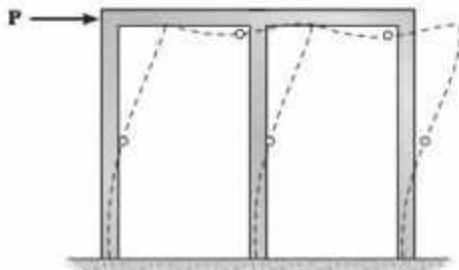
El análisis aproximado de una carga vertical uniforme que actúa sobre una trabe de longitud L , en un marco de construcción conectado fijamente, puede aproximarse mediante el supuesto de que la viga no soporta ninguna carga axial y que hay puntos de inflexión (bisagras), ubicados a $0.1L$ de los soportes.



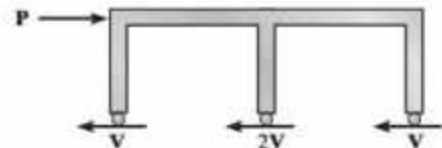
Los marcos de portal que cuentan con soportes fijos se analizan en forma aproximada suponiendo que hay bisagras en el punto medio de cada altura de columna, medida hasta la parte inferior del refuerzo de armadura. Además, en estos marcos y en los articulados, se supone que cada columna soporta la mitad de la carga cortante sobre el marco.



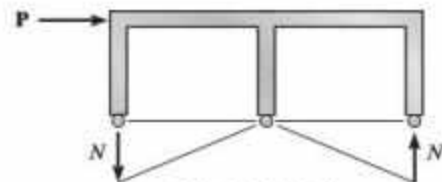
Para los marcos de construcción fijos que están sometidos a cargas laterales, se puede suponer que hay bisagras en los centros de las columnas y trabes. Si el marco tiene una elevación baja, la resistencia a la fuerza cortante es importante y es posible emplear el método del portal, donde las columnas interiores en cualquier nivel de piso dado soportan el doble de fuerza cortante que las columnas exteriores. Para los marcos delgados y altos puede usarse el método del voladizo, donde el esfuerzo axial en una columna es proporcional a su distancia desde el centroide del área de la sección transversal de todas las columnas en un nivel de piso dado.



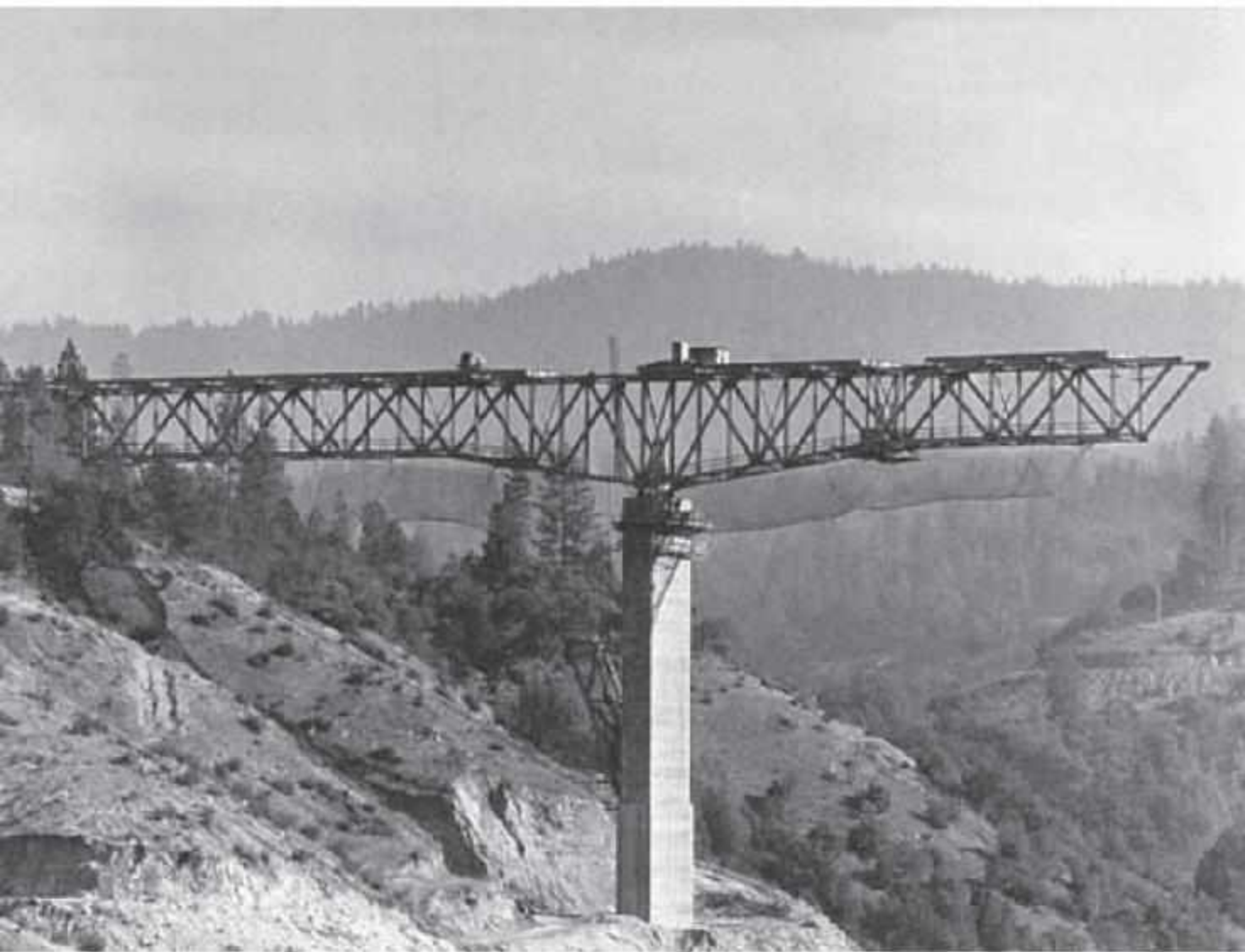
○ = punto de inflexión



Método del portal



Método del voladizo



La deflexión de este puente arqueado debe supervisarse cuidadosamente mientras está en construcción.

Deflexiones

En este capítulo se mostrará cómo determinar las deflexiones elásticas de una viga siguiendo el método de la doble integración y dos importantes métodos geométricos, a saber, los teoremas del momento de área y el método de la viga conjugada. La doble integración se emplea para obtener las ecuaciones que definen la pendiente y la curva elástica. Los métodos geométricos proporcionan una forma de obtener la pendiente y la deflexión en puntos específicos de la viga. Cada uno de estos métodos tiene sus ventajas o desventajas, que se analizarán al momento de presentar cada método.

8.1 Diagramas de deflexión y la curva elástica

Las deflexiones de las estructuras pueden tener varias fuentes, como las cargas, la temperatura, los errores de fabricación o el asentamiento. Durante el diseño deben limitarse las deflexiones a fin de garantizar la integridad y la estabilidad de los techos y evitar el agrietamiento de los materiales rígidos adjuntos como el concreto, el yeso o el vidrio. Además, una estructura no debe vibrar o deformarse severamente si se desea que “parezca” segura a la vista de sus ocupantes. Aún más importante es el hecho de que, para analizar las estructuras estáticamente indeterminadas, se deben determinar las deflexiones en puntos específicos de la estructura.

Las deflexiones que se considerarán en este texto sólo se aplican a estructuras que tienen una *respuesta material lineal elástica*. En estas condiciones, una estructura sometida a una carga volverá a su posición original no deformada al retirar la carga. La deflexión de una estructura la causan sus cargas internas, como la fuerza normal, la fuerza cortante, o el

TABLA 8-1



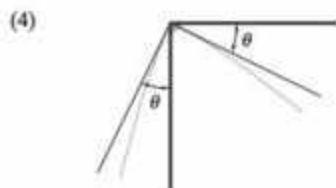
$\Delta = 0$
rodillo u oscilador



$\Delta = 0$
pasador



$\Delta = 0$
 $\theta = 0$
soporte fijo



junta fijamente conectada



junta articulada

momento flexionante. Sin embargo, en el caso de las vigas y los marcos, las mayores desviaciones suelen ser causadas por la flexión interna, en tanto que en una armadura las deflexiones las ocasionan las fuerzas axiales internas.

Antes de determinar la pendiente o el desplazamiento de un punto sobre una viga o un marco, a menudo resulta útil bosquejar el perfil deformado de la estructura cuando está cargada para verificar parcialmente los resultados. Este *diagrama de deflexión* representa la *curva elástica* o el lugar geométrico de los puntos que define la posición desplazada del centroide de la sección transversal a lo largo de los elementos. Para la mayoría de los problemas, la curva elástica puede bosquejarse sin mucha dificultad. Sin embargo, al hacerlo es necesario conocer las restricciones en cuanto a la pendiente o el desplazamiento que ocurren a menudo en un soporte o una conexión. Con referencia a la tabla 8-1, los soportes que *resisten una fuerza*, como un pasador, *restringen el desplazamiento*; y los que *resisten un momento*, como una pared fija, *restringen la rotación*. Observe también que la deflexión de los elementos de un marco que están fijamente conectados (4) hace que la junta gire los elementos conectados en la misma cantidad θ . Por otro lado, si en la junta se usa una articulación, cada elemento tendrá una *pendiente diferente* o una rotación distinta en el pasador, debido a que éste no puede soportar un momento (5).



Los marcos de dos elementos soportan tanto la carga muerta del techo como la carga viva de la nieve. Puede considerarse que el marco está articulado en la pared, fijo en el suelo y que tiene una junta fijamente conectada.

Si la curva elástica parece difícil de establecer, se sugiere dibujar primero el diagrama de momento para la viga o el marco. Por la convención de signos para los momentos establecida en el capítulo 4, un *momento positivo* tiende a doblar una viga o elemento horizontal cóncavo hacia arriba, figura 8-1. Del mismo modo, un *momento negativo* tiende a doblar la viga o el elemento cóncavo hacia abajo, figura 8-2. Por lo tanto, si se conoce la forma del diagrama de momento, la construcción de la curva elástica será fácil y viceversa. Por ejemplo, considere la viga de la figura 8-3 con su diagrama de momento asociado. Debido al soporte de pasador y rodillo, el desplazamiento en A y D debe ser cero. Dentro de la región de momento negativo, la curva elástica es cóncava hacia abajo; y dentro de la región de momento positivo, la curva elástica es cóncava hacia arriba. En particular, debe haber un *punto de inflexión* en el sitio donde la curva cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba, puesto que éste es un punto de momento nulo. Usando estos mismos principios, observe cómo la curva elástica para la viga en la figura 8-4 se elaboró con base en su diagrama de momento. Específicamente, tenga en cuenta que la reacción de momento positivo desde la pared mantiene la pendiente inicial de la viga horizontal.



Figura 8-1



Figura 8-2

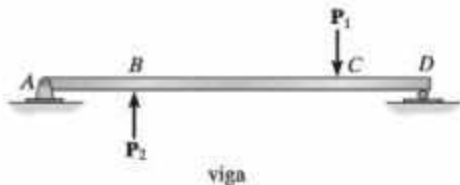


diagrama de momento

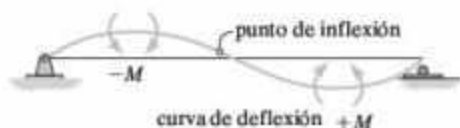


Figura 8-3

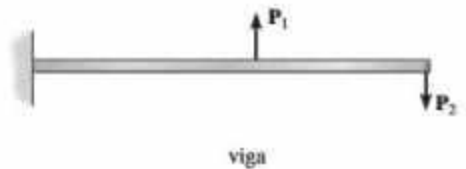


diagrama de momento

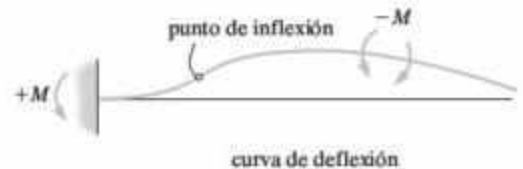


Figura 8-4

EJEMPLO 8.1

Dibuje la forma alterada de cada una de las vigas que se muestran en la figura 8-5.

SOLUCIÓN

En la figura 8-5a, el rodillo ubicado en A permite la rotación libre sin deflexión, mientras que la pared fija en B impide tanto la rotación como la deflexión. La forma alterada se muestra mediante la línea gruesa. En la figura 8-5b, no puede ocurrir rotación ni deflexión en A y B . En la figura 8-5c, el momento de par girará al extremo A . Esto originará deflexiones en ambos extremos de la viga, puesto que la deflexión no es posible en B ni en C . Observe que el segmento CD permanece sin deformación (una línea recta), dado que en él no actúa ninguna carga interna. En la figura 8-5d, el pasador (bisagra interna) en B permite la rotación libre y, por lo tanto, la pendiente de la curva de deflexión cambiará súbitamente en este punto, mientras que la viga está restringida por su soporte. En la figura 8-5e, la viga compuesta se deforma de la manera que se muestra. La pendiente cambia abruptamente a cada lado de la articulación en B . Por último, en la figura 8-5f, el claro BC se volverá cóncavo hacia arriba debido a la carga. Dado que la viga es continua, los claros finales se volverán cóncavos hacia abajo.

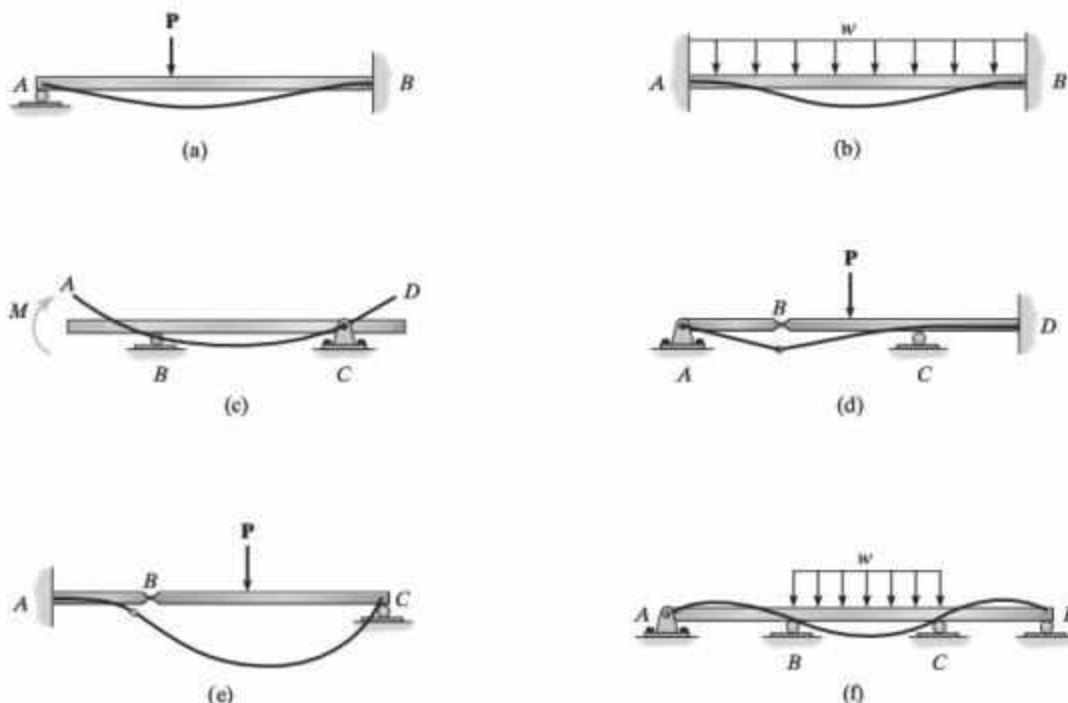
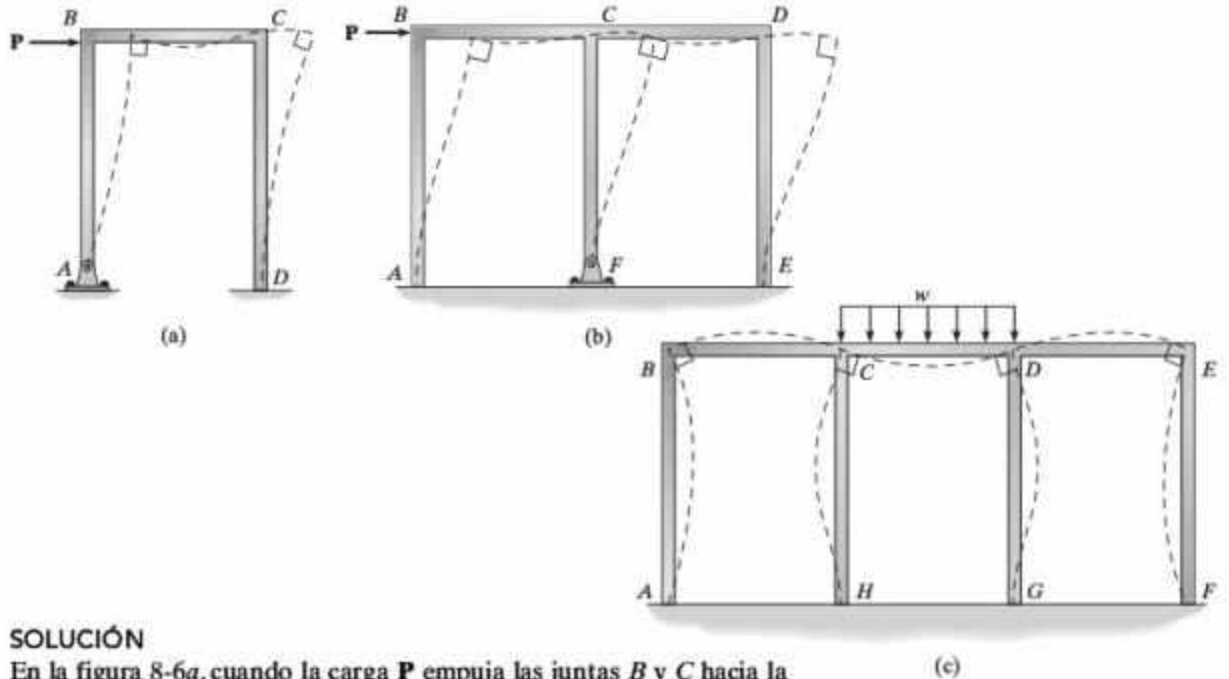


Figura 8-5

EJEMPLO 8.2

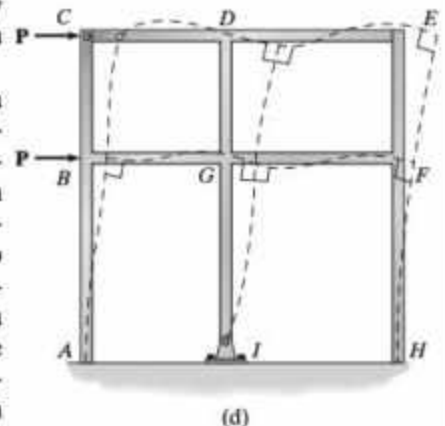
Dibuje las formas alteradas de cada uno de los marcos que se muestran en la figura 8-6.

**SOLUCIÓN**

En la figura 8-6a, cuando la carga P empuja las juntas B y C hacia la derecha, se produce una rotación de cada columna en sentido horario, de la manera que se muestra. Como resultado, las juntas B y C deben girar en el sentido horario. Dado que en estas articulaciones debe mantenerse el ángulo de 90° entre los elementos conectados, la viga BC se deformará de modo que la curvatura se invierta de cóncava hacia la izquierda a cóncava hacia la derecha. Observe que esto produce un punto de inflexión dentro de la viga.

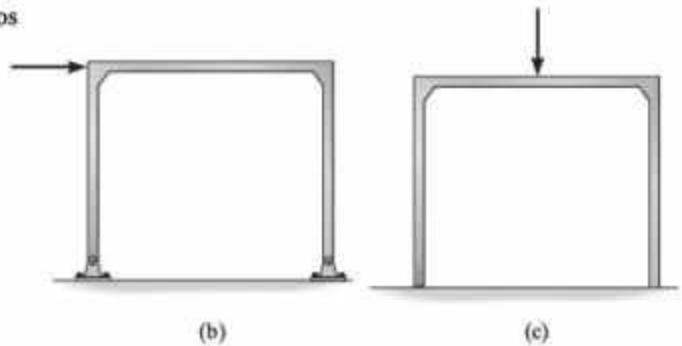
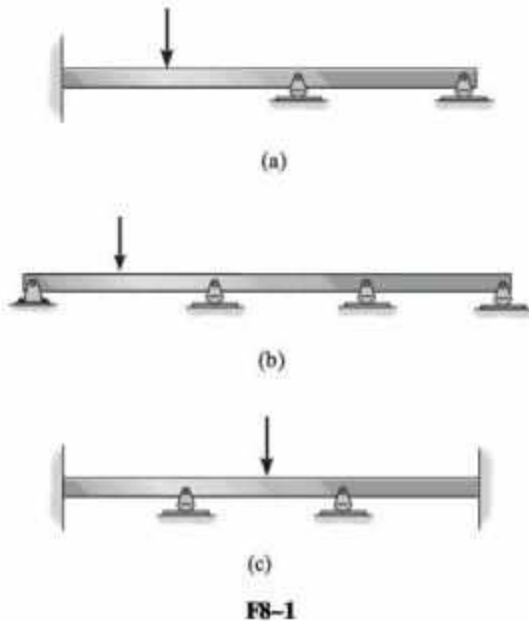
En la figura 8-6b, P desplaza las juntas B , C y D hacia la derecha, haciendo que cada columna se doble en la forma que se muestra. Las juntas fijas deben mantener sus ángulos de 90° y, por lo tanto, BC y CD deben tener una curvatura invertida con un punto de inflexión cerca de su punto medio.

En la figura 8-6c, la carga vertical en este marco simétrico doblará la viga CD cóncava hacia arriba, causando una rotación en sentido horario de la junta C y en sentido antihorario de la junta D . Como el ángulo de 90° en las juntas debe mantenerse, las columnas se doblarán en la forma que se muestra. Esto hace que los claros BC y DE se vuelvan cóncavos hacia abajo, lo que resulta en una rotación en sentido antihorario en B y en sentido horario en E . Por consiguiente, las columnas se doblan en la forma que se muestra. Por último, en la figura 8-6d, las cargas empujan las juntas B y C hacia la derecha, lo que dobla las columnas en la forma que se muestra. La junta fija B mantiene su ángulo de 90° , sin embargo, no hay restricción a la rotación relativa entre los elementos en C porque la junta está articulada. En consecuencia, sólo la viga CD no tiene una curvatura inversa.

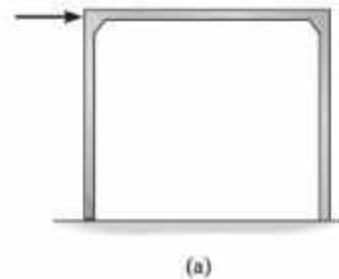
**Figura 8-6**

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

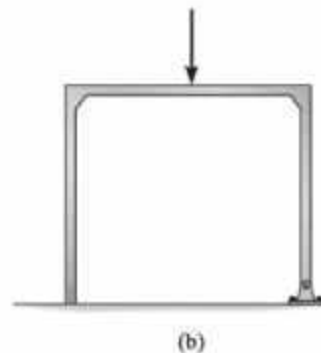
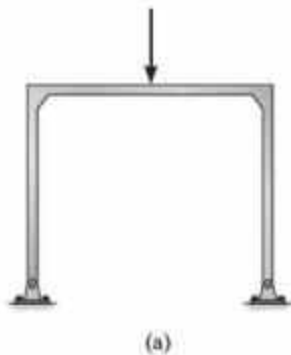
F8-1. Dibuje la forma alterada de cada viga. Indique los puntos de inflexión.



F8-3. Dibuje la forma alterada de cada marco. Indique los puntos de inflexión.



F8-2. Dibuje la forma alterada de cada marco. Indique los puntos de inflexión.



8.2 Teoría de la viga elástica

En esta sección se desarrollarán dos ecuaciones diferenciales importantes que relacionan el momento interno en una viga con el desplazamiento y la pendiente de su curva elástica. Estas ecuaciones forman la base de los métodos de deflexión que se presentan en este capítulo, y por esa razón hay que comprender plenamente los supuestos y las limitaciones que se apliquen en su desarrollo.

Para obtener estas relaciones, el análisis se limitará al caso más común de una viga que en principio es recta y que se deforma elásticamente debido a las cargas aplicadas de manera perpendicular al eje x de la viga, y que se sitúan en el plano de simetría $x-v$ de la sección transversal de la viga, figura 8-7a. Debido a las cargas, la deformación de la viga es causada tanto por la fuerza cortante interna como por el momento de flexión. Si la viga tiene una longitud mucho mayor que su profundidad, la mayor deformación será causada por la flexión y, por ende, la atención se dirigirá a sus efectos. Las deflexiones causadas por la fuerza cortante se analizarán más adelante en este capítulo.

Cuando el momento interno M deforma el elemento de la viga, cada sección transversal se mantiene plana y el ángulo entre ellas se convierte en $d\theta$, figura 8-7b. El arco dx que representa una porción de la curva elástica interseca el eje neutro de cada sección transversal. El *radio de curvatura* de este arco se define como la distancia ρ , que se mide desde el *centro de la curvatura* O' hasta dx . Cualquier arco en el elemento distinto a dx está sometido a una deformación normal. Por ejemplo, la deformación en el arco ds , que se ubica en una posición y respecto al eje neutro, es $\epsilon = (ds' - ds)/ds$. Sin embargo, $ds = \rho d\theta$ y $ds' = (\rho - y)d\theta$, y así

$$\epsilon = \frac{(\rho - y) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y}$$

Si el material es homogéneo y se comporta de manera lineal elástica, entonces puede aplicarse la ley de Hooke, $\epsilon = \sigma/E$. Además, dado que también es aplicable la fórmula de la flexión, $\sigma = -My/I$. Al combinar estas ecuaciones y sustituir en la ecuación anterior, se tiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (8-1)$$

Aquí

ρ = el radio de curvatura en un punto específico de la curva elástica ($1/\rho$ se conoce como la *curvatura*)

M = el momento interno en la viga en el punto donde debe determinarse ρ

E = el módulo de elasticidad del material

I = el momento de inercia de la viga calculado respecto del eje neutro

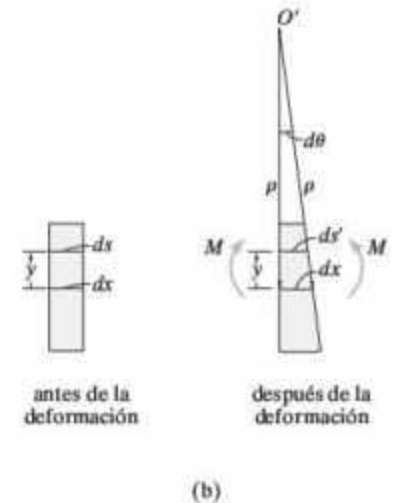
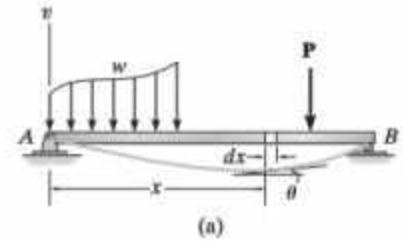


Figura 8-7

En esta ecuación el producto EI se conoce como la *rigidez a la flexión*, y siempre es una cantidad positiva. Puesto que $dx = \rho d\theta$, entonces a partir de la ecuación 8-1,

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (8-2)$$

Si se elige el eje v como positivo hacia arriba, figura 8-7a, y si es posible expresar la curvatura ($1/\rho$) en términos de x y v , entonces se puede determinar la curva elástica de la viga. En la mayoría de los libros de cálculo se demuestra que esta relación de curvatura es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}}$$

Por lo tanto,

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}} \quad (8-3)$$

Esta ecuación representa una ecuación diferencial no lineal de segundo orden. Su solución, $v = f(x)$, proporciona la forma exacta de la curva elástica; suponiendo, por supuesto, que las deflexiones de la viga se producen sólo por flexión. Con el fin de facilitar la solución de un mayor número de problemas, la ecuación 8-3 se modificará al hacer una importante simplificación. Como la pendiente de la curva elástica para la mayoría de las estructuras es muy pequeña, se empleará la teoría de la pequeña deflexión y se supondrá que $dv/dx \approx 0$. En consecuencia, su cuadrado será insignificante en comparación con la unidad y por lo tanto la ecuación 8-3 se reduce a

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (8-4)$$

También debe señalarse que al suponer que $dv/dx \approx 0$, la longitud original del eje x de la viga y el *arco* de su curva elástica serán aproximadamente los mismos. En otras palabras, ds en la figura 8-7b es aproximadamente igual a dx , puesto que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2} = \sqrt{1 + (dv/dx)^2} dx \approx dx$$

Este resultado implica que los puntos de la curva elástica sólo se desplazarán de manera vertical mas no horizontal.

Resultados tabulados. En la siguiente sección se mostrará cómo aplicar la ecuación 8-4 para encontrar la pendiente de una viga y la ecuación de su curva elástica. En la contraportada del libro se ubica una tabla que presenta los resultados de tal análisis para algunas cargas comunes en vigas que se encuentran a menudo en el análisis estructural. También se enumeran la pendiente y el desplazamiento en los puntos críticos de la viga. Por supuesto, una sola tabla no puede incluir los muchos diferentes casos de carga y geometría que se presentan en la práctica. Cuando no se dispone de una tabla o se tiene una incompleta, el desplazamiento o la pendiente en un punto específico de una viga o un marco pueden determinarse empleando el método de integración doble o algún otro método analizado en este capítulo o en el siguiente.

8.3 El método de integración doble

Una vez que M se expresa como una función de la posición x , entonces las integraciones sucesivas de la ecuación 8.4 darán la pendiente de la viga, $\theta \approx \tan \theta = dv/dx = \int (M/EI) dx$ (ecuación 8-2), y la ecuación de la curva elástica, $v = f(x) = \int \int (M/EI) dx$, respectivamente. Para cada integración, es necesario introducir una "constante de integración" y después resolver las constantes a fin de obtener una solución única para un problema particular. Recuerde de la sección 4-2 que si la carga en una viga es discontinua, es decir, consiste en una serie de varias cargas concentradas y distribuidas, entonces deben escribirse varias funciones para el momento interno, cada una válida dentro de la región entre las discontinuidades. Por ejemplo, considere la viga que se muestra en la figura 8-8. El momento interno en las regiones AB , BC y CD debe escribirse en términos de las coordenadas x_1 , x_2 y x_3 . Una vez que estas funciones se integren a través de la aplicación de la ecuación 8-4, y que se hayan determinado las constantes de integración, las funciones darán la pendiente y la deflexión (curva elástica) para cada región de la viga en la que son válidas.

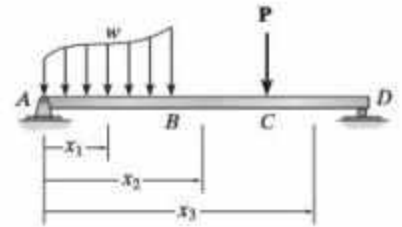
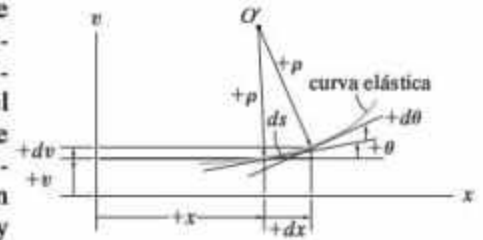


Figura 8-8



(a)



(b)

Convención de signos. Al aplicar la ecuación 8-4 es importante usar el signo adecuado para M según lo establece la convención de signos que se usó en la obtención de esta ecuación, figura 8-9a. Además, recuerde que la deflexión v positiva es hacia arriba y, en consecuencia, el ángulo de la pendiente positiva θ se medirá en sentido antihorario desde el eje x . La razón de esto se muestra en la figura 8-9b. Aquí, los incrementos positivos dx y dv en x y v crean un incremento de $d\theta$ que es en sentido antihorario. Además, como el ángulo de la pendiente θ será muy pequeño, su valor en radianes puede determinarse directamente de $\theta \approx \tan \theta = dv/dx$.

Condiciones de frontera y de continuidad. Las constantes de integración se determinan evaluando las funciones de la pendiente o del desplazamiento en un punto particular de la viga donde se conoce el valor de la función. Estos valores se llaman *condiciones de frontera*. Por ejemplo, si la viga se sostiene mediante un rodillo o un pasador, entonces se requiere que el desplazamiento sea cero en estos puntos. Inclusive, en un soporte fijo, la pendiente y el desplazamiento son iguales a cero.

Si no puede usarse una sola coordenada x para expresar la ecuación de la pendiente o la curva elástica de la viga, entonces deben usarse las condiciones de continuidad para evaluar algunas de las constantes de integración. Considere la viga de la figura 8-10. Aquí las coordenadas x_1 y x_2 sólo son válidas dentro de las regiones AB y BC , respectivamente. Una vez que se obtienen las funciones de la pendiente y la deflexión, éstas tienen que dar los mismos valores de la pendiente y la deflexión en el punto B , $x_1 = x_2 = a$, de manera que la curva elástica es físicamente continua. Expresado de manera matemática, esto requiere que $\theta_1(a) = \theta_2(a)$ y $v_1(a) = v_2(a)$. Estas ecuaciones pueden usarse para determinar dos constantes de integración.

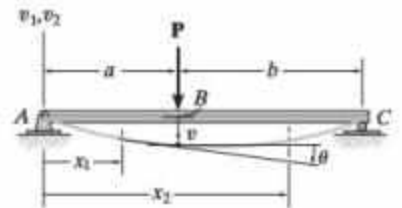


Figura 8-10

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método para determinar la pendiente y la deflexión de una viga (o eje) usando el método de la integración doble. Debe tenerse en cuenta que este método sólo es adecuado en *deflexiones elásticas* para las cuales la pendiente de la viga es muy pequeña. Además, el método considera *sólo las deflexiones debidas a la flexión*. En general, la deflexión adicional por la fuerza cortante representa sólo un pequeño porcentaje de la deflexión debida a la flexión; por ello, en la práctica de la ingeniería suele ignorarse.

Curva elástica

- Dibuje una vista exagerada de la curva elástica de la viga. Recuerde que los puntos de pendiente cero y desplazamiento cero se producen en un soporte fijo, y el desplazamiento cero se produce en los soportes de rodillo y articulados.
- Establezca los ejes de las coordenadas x y y . El eje x debe ser paralelo a la viga sin deformarse y su origen debe estar en el lado izquierdo de la viga, con sentido positivo hacia la derecha.
- Si hay varias cargas discontinuas presentes, establezca las coordenadas x que sean válidas para cada región de la viga entre las discontinuidades.
- En todos los casos, el eje asociado positivo v debe dirigirse hacia arriba.

Función de la carga o del momento

- Para cada región en la que hay una coordenada x , exprese el momento interno M en función de x .
- Siempre suponga que M actúa en la dirección positiva al aplicar la ecuación de equilibrio de momentos para determinar $M = f(x)$.

Pendiente y curva elástica

- Siempre que EI sea constante, aplique la ecuación de momento $EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$, que requiere dos integraciones. Para cada integración es importante incluir una constante de integración. Las constantes se determinan usando las condiciones de frontera para los soportes y las condiciones de continuidad que se aplican a la pendiente y al desplazamiento en los puntos donde se encuentran dos funciones.
- Una vez que se determinan las constantes de integración y se sustituyen de nuevo en las ecuaciones de la pendiente y la deflexión, es posible determinar la pendiente y el desplazamiento en *puntos específicos* de la curva elástica. Los valores numéricos obtenidos pueden comprobarse gráficamente al compararlos con el bosquejo de la curva elástica.
- Los valores *positivos* de la *pendiente* son en sentido antihorario y el *desplazamiento positivo* es hacia arriba.

EJEMPLO 8.3

Cada viga de piso simplemente apoyada que se muestra en la fotografía está sometida a una carga de diseño uniforme de 4 kN/m, figura 8-11a. Determine la deflexión máxima de la viga. EI es constante.

Curva elástica. Debido a la simetría, la deflexión máxima de la viga se producirá en su centro. Sólo se requiere una sola coordenada x para determinar el momento interno.

Función de momento. Con base en el diagrama de cuerpo libre, figura 8-11b, se tiene

$$M = 20x - 4x\left(\frac{x}{2}\right) = 20x - 2x^2$$

Pendiente y curva elástica. Al aplicar la ecuación 8-4 e integrar dos veces resulta

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = 20x - 2x^2$$

$$EI \frac{dv}{dx} = 10x^2 - 0.6667x^3 + C_1$$

$$EI v = 3.333x^3 - 0.1667x^4 + C_1x + C_2$$

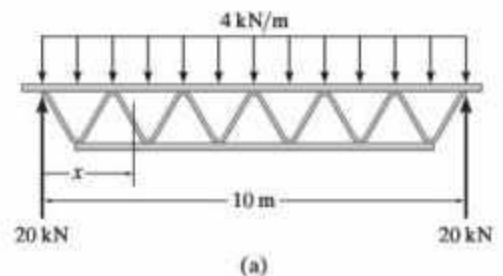
Aquí $v = 0$ en $x = 0$, de modo que $C_2 = 0$ y $v = 0$ en $x = 10$; por lo que $C_1 = -166.7$. Por lo tanto, la ecuación de la curva elástica es

$$EI v = 3.333x^3 - 0.1667x^4 - 166.7x$$

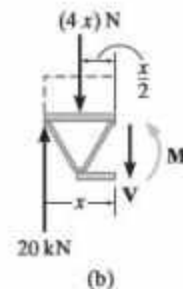
En $x = 5$ m, observe que $dv/dx = 0$. Por consiguiente, la deflexión máxima es

$$v_{\max} = -\frac{521}{EI}$$

Resp.



(a)

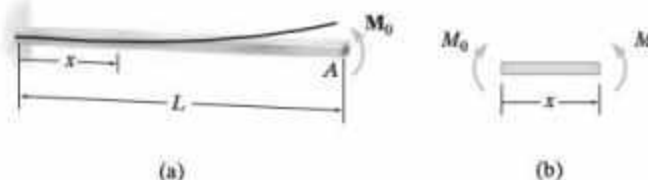


(b)

Figura 8-11

EJEMPLO 8.4

La viga en voladizo que se muestra en la figura 8-12a está sometida a un momento de par M_0 en su extremo. Determine la ecuación de la curva elástica. EI es constante.

**Figura 8-12****SOLUCIÓN**

Curva elástica. La carga tiende a deformar la viga como se muestra en la figura 8-9a. Por inspección, el momento interno puede representarse a lo largo de la viga empleando un sistema de una sola coordenada x .

Función de momento. A partir del diagrama de cuerpo libre, con M que actúa en la *dirección positiva*, figura 8-12b, se tiene

$$M = M_0$$

Pendiente y curva elástica. Al aplicar la ecuación 8-4 e integrarla dos veces se obtiene

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M_0 \quad (1)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = M_0 x + C_1 \quad (2)$$

$$EI v = \frac{M_0 x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (3)$$

Si se usan las condiciones de frontera $dv/dx = 0$ en $x = 0$ y $v = 0$ en $x = 0$, entonces $C_1 = C_2 = 0$. Al sustituir estos resultados en las ecuaciones (2) y (3) con $\theta = dv/dx$, se obtiene

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{M_0 x}{EI} \\ v &= \frac{M_0 x^2}{2EI} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

La pendiente y el desplazamiento máximos ocurren en A ($x = L$), para lo cual

$$\theta_A = \frac{M_0 L}{EI} \quad (4)$$

$$v_A = \frac{M_0 L^2}{2EI} \quad (5)$$

El resultado *positivo* para θ_A indica una rotación en sentido *antihorario* y el resultado *positivo* para v_A indica que v_A actúa *hacia arriba*. Esto concuerda con los resultados bosquejados en la figura 8-12a.

Con el fin de obtener una idea de la *magnitud* real de la pendiente y el desplazamiento en el extremo A , considere que la viga de la figura 8-12a tiene una longitud de 12 pies, que soporta un momento de par de 15 k · pie, y está hecha de acero con $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi. Si esta viga se diseñara *sin* un factor de seguridad suponiendo que el esfuerzo normal permisible es igual al esfuerzo de cedencia $\sigma_{perm} = 36$ ksi, entonces se encontraría que un perfil W6 × 9 sería adecuado ($I = 16.4$ pulg⁴). A partir de las ecuaciones (4) y (5) se obtiene

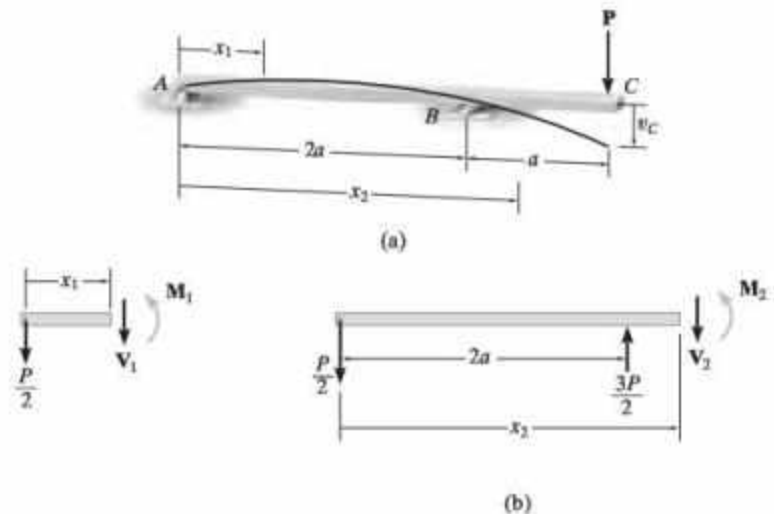
$$\theta_A = \frac{15 \text{ k} \cdot \text{pie}(12 \text{ pulg/pie})(12 \text{ pies})(12 \text{ pulg/pie})}{29(10^3) \text{ k/pulg}^2(16.4 \text{ pulg}^4)} = 0.0545 \text{ rad}$$

$$v_A = \frac{15 \text{ k} \cdot \text{pie}(12 \text{ pulg/pie})(12 \text{ pies})^2(12 \text{ pulg/1 pie})^2}{2(29(10^3) \text{ k/pulg}^2)(16.4 \text{ pulg}^4)} = 3.92 \text{ pulg}$$

Dado que $\theta_A^2 = 0.00297 \text{ rad}^2 \ll 1$, se justifica el uso de la ecuación 8-4 en vez de aplicar la ecuación más exacta 8-3, para el cálculo de la deflexión de las vigas. Además, como esta aplicación numérica es para una *viga en voladizo*, se han obtenido *valores más grandes* para θ y v máximos que los que se habrían obtenido si la viga estuviera apoyada mediante pasadores, rodillos u otros soportes.

EJEMPLO 8.5

La viga de la figura 8-13a está sometida a una carga P en su extremo. Determine el desplazamiento en C . EI es constante.

**Figura 8-13****SOLUCIÓN**

Curva elástica. La viga se deforma como se muestra en la figura 8-13a. Debido a la carga, deben considerarse dos coordenadas x .

Funciones de momento. Si se usan los diagramas de cuerpo libre que se muestran en la figura 8-13b, se tiene

$$M_1 = -\frac{P}{2}x_1 \quad 0 \leq x_1 \leq 2a$$

$$M_2 = -\frac{P}{2}x_2 + \frac{3P}{2}(x_2 - 2a)$$

$$= Px_2 - 3Pa \quad 2a \leq x_2 \leq 3a$$

Pendiente y curva elástica. Aplicando la ecuación 8-4,

$$\text{para } x_1, \quad EI \frac{d^2 v_1}{dx_1^2} = -\frac{P}{2}x_1$$

$$EI \frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{P}{4}x_1^2 + C_1 \quad (1)$$

$$EI v_1 = -\frac{P}{12}x_1^3 + C_1 x_1 + C_2 \quad (2)$$

Para x_2 , $EI \frac{d^2 v_2}{dx_2^2} = Px_2 - 3Pa$

$$EI \frac{dv_2}{dx_2} = \frac{P}{2} x_2^2 - 3Pa x_2 + C_3 \quad (3)$$

$$EI v_2 = \frac{P}{6} x_2^3 - \frac{3}{2} Pa x_2^2 + C_3 x_2 + C_4 \quad (4)$$

Las cuatro constantes de integración se determinan mediante tres condiciones de frontera, a saber, $v_1 = 0$ en $x_1 = 0$, $v_1 = 0$ en $x_1 = 2a$ y $v_2 = 0$ en $x_2 = 2a$, y una ecuación de continuidad. Aquí la continuidad de la pendiente en el rodillo requiere que $dv_1/dx_1 = dv_2/dx_2$ en $x_1 = x_2 = 2a$. (Tenga en cuenta que la continuidad del desplazamiento en B ha sido considerado de manera indirecta en las condiciones de frontera, puesto que $v_1 = v_2 = 0$ en $x_1 = x_2 = 2a$.) Al aplicar estas cuatro condiciones resulta

$$v_1 = 0 \text{ en } x_1 = 0; \quad 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$v_1 = 0 \text{ en } x_1 = 2a; \quad 0 = -\frac{P}{12}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2$$

$$v_2 = 0 \text{ en } x_2 = 2a; \quad 0 = \frac{P}{6}(2a)^3 - \frac{3}{2}Pa(2a)^2 + C_3(2a) + C_4$$

$$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = \frac{dv_2(2a)}{dx_2}; \quad -\frac{P}{4}(2a)^2 + C_1 = \frac{P}{2}(2a)^2 - 3Pa(2a) + C_3$$

Resolviendo, se obtiene

$$C_1 = \frac{Pa^2}{3} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = \frac{10}{3}Pa^2 \quad C_4 = -2Pa^3$$

Al sustituir C_3 y C_4 en la ecuación (4) resulta

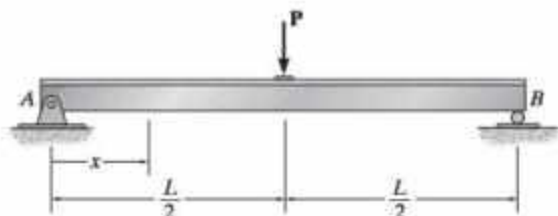
$$v_2 = \frac{P}{6EI}x_2^3 - \frac{3Pa}{2EI}x_2^2 + \frac{10Pa^2}{3EI}x_2 - \frac{2Pa^3}{EI}$$

El desplazamiento en C se determina al establecer $x_2 = 3a$. Se tiene que

$$v_C = -\frac{Pa^3}{EI} \quad \text{Resp.}$$

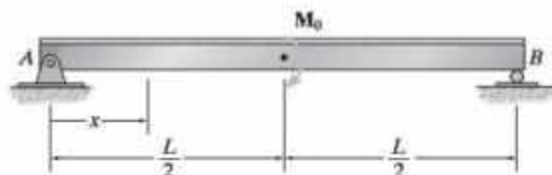
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F8-4. Determine la ecuación de la curva elástica para la viga empleando la coordenada x que es válida para $0 < x < L$. EI es constante.



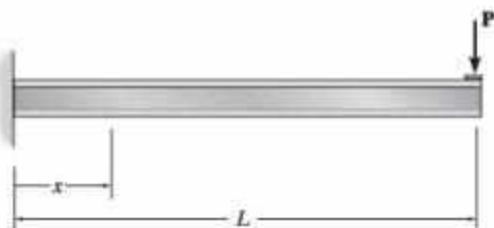
F8-4

F8-7. Determine la ecuación de la curva elástica para la viga empleando la coordenada x que es válida para $0 < x < L$. EI es constante.



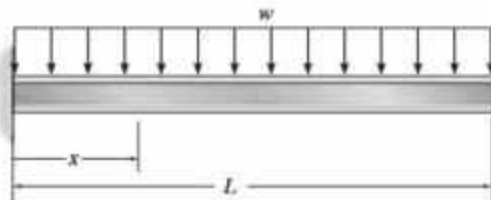
F8-7

F8-5. Determine la ecuación de la curva elástica para la viga empleando la coordenada x que es válida para $0 < x < L$. EI es constante.



F8-5

F8-8. Determine la ecuación de la curva elástica para la viga empleando la coordenada x que es válida para $0 < x < L$. EI es constante.



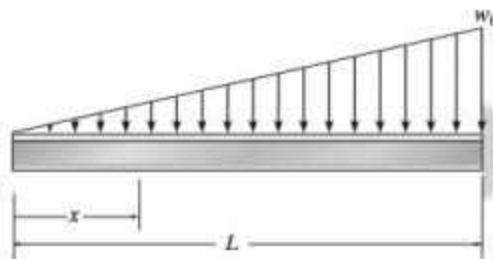
F8-8

F8-6. Determine la ecuación de la curva elástica para la viga empleando la coordenada x que es válida para $0 < x < L$. EI es constante.



F8-6

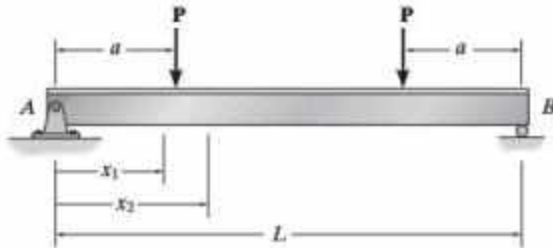
F8-9. Determine la ecuación de la curva elástica para la viga empleando la coordenada x que es válida para $0 < x < L$. EI es constante.



F8-9

PROBLEMAS

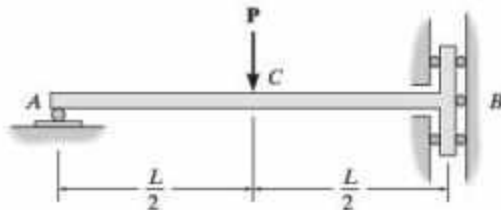
8-1. Determine las ecuaciones de la curva elástica para la viga empleando las coordenadas x_1 y x_2 . Especifique la pendiente en A y la deflexión máxima. EI es constante.



Prob. 8-1

8-2. La barra está soportada por una restricción de rodillo en B , que permite el desplazamiento vertical pero resiste la carga axial y el momento. Si la barra se somete a la carga que se muestra, determine la pendiente en A y la deflexión en C . EI es constante.

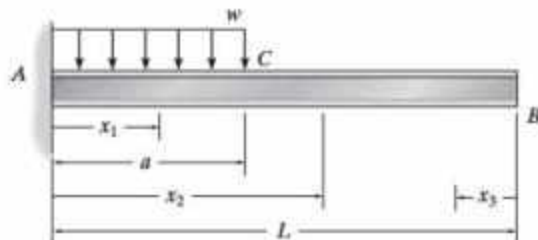
8-3. Determine la deflexión en el punto B de la barra del problema 8-2.



Probs. 8-2/8-3

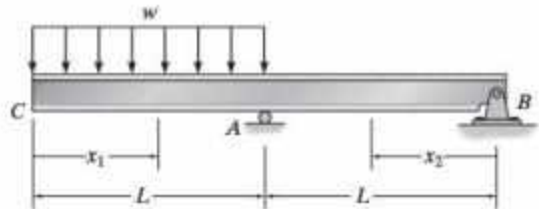
***8-4.** Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2 , especifique la pendiente y la deflexión en B . EI es constante.

8-5. Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_3 , y especifique la pendiente y la deflexión en el punto B . EI es constante.



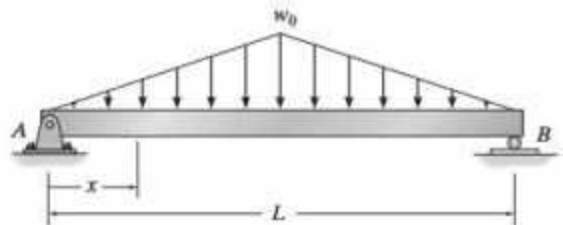
Probs. 8-4/8-5

8-6. Determine la deflexión máxima entre los soportes A y B . EI es constante. Utilice el método de integración.



Prob. 8-6

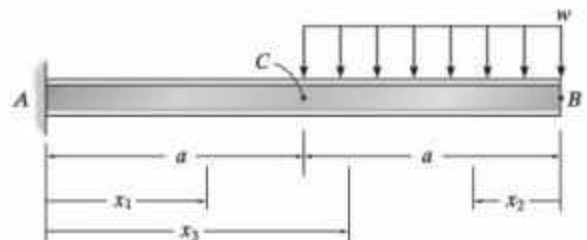
8-7. Determine la curva elástica para la viga simplemente apoyada usando la coordenada x , $0 \leq x \leq L/2$. Además, determine la pendiente en A y la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



Prob. 8-7

***8-8.** Determine las ecuaciones de la curva elástica empleando las coordenadas x_1 y x_2 , y especifique la pendiente en C y el desplazamiento en B . EI es constante.

8-9. Determine las ecuaciones de la curva elástica empleando las coordenadas x_1 y x_3 , y especifique la pendiente en B y la deflexión en C . EI es constante.



Probs. 8-8/8-9

8.4 Teoremas del momento de área

Las ideas iniciales para los dos teoremas del momento de área fueron desarrolladas por Otto Mohr y más tarde establecidas formalmente por Charles E. Greene en 1873. Estos teoremas proporcionan una técnica semigráfica para determinar la pendiente de la curva elástica y su alteración debido a la flexión. Resultan particularmente ventajosos cuando se utilizan para resolver problemas de vigas, en especial las sujetas a una serie de cargas concentradas o que tienen segmentos con diferentes momentos de inercia.

Para desarrollar los teoremas, se hace referencia a la viga de la figura 8-14a. Si se dibuja el diagrama de momento para la viga y después se divide entre la rigidez a la flexión, EI , resulta el "diagrama de M/EI " que se muestra en la figura 8-14b. Con base en la ecuación 8-2,

$$d\theta = \left(\frac{M}{EI} \right) dx$$

Así puede verse que el cambio $d\theta$ en la pendiente de las tangentes a cada lado del elemento dx es igual al área con sombreado claro bajo el diagrama M/EI . Al integrar desde el punto A hasta el punto B de la curva elástica, figura 8-14c, se tiene

$$\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (8-5)$$

Esta ecuación es la base para el primer teorema del momento de área.

Teorema 1: El cambio en la pendiente entre dos puntos cualesquiera de la curva elástica es igual al área del diagrama M/EI entre esos dos puntos.

La notación $\theta_{B/A}$ se conoce como el ángulo de la tangente en B medido con respecto a la tangente en A . A partir de la comprobación debería ser evidente que este ángulo se mide *en sentido antihorario* desde la tangente A hasta la tangente B , si el área del diagrama M/EI es positiva, figura 8-14c. De manera inversa, si esta área es *negativa*, o está por debajo del eje x , el ángulo $\theta_{B/A}$ se mide en sentido *horario* desde la tangente A hasta la tangente B . Además, con base en las dimensiones de la ecuación 8-5, $\theta_{B/A}$ se mide en radianes.

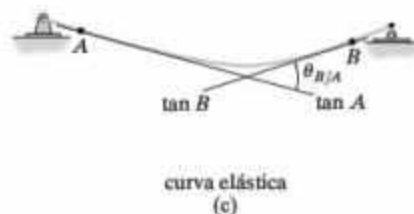


Figura 8-14

El segundo teorema del momento de área se basa en la desviación relativa de las *tangentes* a la curva elástica. En la figura 8-15c se muestra una vista muy exagerada de la *desviación vertical* dt de las tangentes a cada lado del elemento diferencial dx . Esta desviación se mide a lo largo de una línea vertical que pasa a través del punto A . Como se supone que la pendiente de la curva elástica y su deflexión son muy pequeñas, resulta satisfactorio aproximar la longitud de cada línea de la tangente mediante x y el arco ds' por medio de dt . Si se usa la fórmula del arco circular $s = r\theta$, donde r tiene una longitud x , se puede escribir $dt = x d\theta$. Empleando la ecuación 8-2, $d\theta = (M/EI) dx$, la deflexión vertical de la tangente en A con respecto a la tangente en B puede encontrarse por integración, en cuyo caso

$$t_{A/B} = \int_A^B x \frac{M}{EI} dx \quad (8-6)$$

Recuerde que al estudiar la estática se estableció que el centroide de un área se determina a partir de $\bar{x} \int dA = \int x dA$. Puesto que $\int M/EI dx$ representa un área del diagrama M/EI , también es posible escribir

$$t_{A/B} = \bar{x} \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (8-7)$$

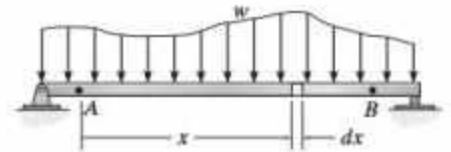
Aquí \bar{x} es la distancia desde el eje vertical que pasa por A hasta el *centroide* del área comprendida entre A y B , figura 8-15b.

Ahora puede enunciarse el segundo teorema del momento de área de la manera siguiente:

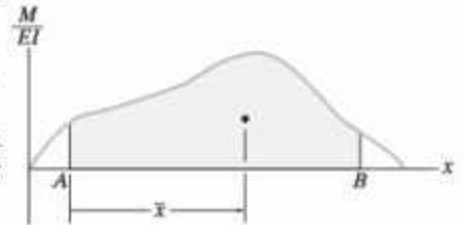
Teorema 2: La desviación vertical de la tangente en un punto (A) de la curva elástica con respecto a la tangente extendida desde otro punto (B) es igual al “momento” del área bajo el diagrama M/EI entre los dos puntos (A y B). Este momento se calcula respecto del punto A (el punto sobre la curva elástica), donde debe determinarse la desviación $t_{A/B}$.

Cuando se calcula el momento de un *área positiva* M/EI desde A hasta B , como en la figura 8-15b, éste indica que la tangente en el punto A está *por encima* de la tangente a la curva extendida desde el punto B , figura 8-15c. Del mismo modo, las *áreas negativas* M/EI indican que la tangente en A está *por debajo* de la tangente extendida desde B . Observe que, en general, $t_{A/B}$ no es igual a $t_{B/A}$, que se muestra en la figura 8-15d. En específico, el momento del área bajo el diagrama M/EI entre A y B se calcula respecto del punto A para determinar $t_{A/B}$, figura 8-15b, y se calcula respecto al punto B para determinar $t_{B/A}$.

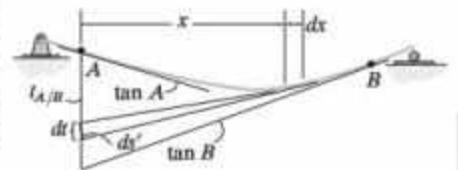
Es importante tener en cuenta que los teoremas del momento de área sólo pueden usarse para determinar los ángulos o las desviaciones entre las dos tangentes de la curva elástica de la viga. Por lo general *no proporcionan* una solución directa para la pendiente o el desplazamiento en un punto de la viga. Estas incógnitas deben relacionarse primero con los ángulos o las desviaciones verticales de las tangentes sobre los puntos de la curva elástica. Habitualmente, las tangentes en los soportes se dibujan con esta intención, puesto que estos puntos no están sometidos a desplazamientos y/o tienen pendiente cero. En los problemas de ejemplo se proporcionan casos específicos para el establecimiento de estas relaciones geométricas.



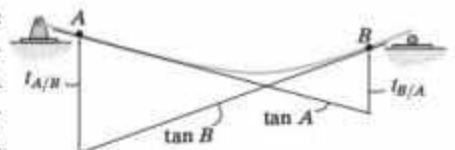
(a)



(b)



curva elástica
(c)



curva elástica
(d)

Figura 8-15

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede usarse para determinar el desplazamiento y la pendiente en un punto de la curva elástica de una viga mediante los teoremas del momento de área.

Diagrama M/EI

- Determine las reacciones en los soportes y dibuje el diagrama M/EI de la viga.
- Si la viga está cargada con fuerzas concentradas, el diagrama M/EI consistirá en una serie de segmentos de línea recta, por lo que las áreas y momentos requeridos para aplicar los teoremas del momento de área podrán calcularse con relativa facilidad.
- Si la carga consiste en una *serie* de fuerzas concentradas y cargas distribuidas, puede resultar más sencillo calcular las áreas y sus momentos requeridos al dibujar el diagrama M/EI por partes, empleando el método de superposición como se estudió en la sección 4-5. En cualquier caso, el diagrama M/EI constará de curvas parabólicas, o quizá de orden superior, por lo que para localizar el área y el centroide bajo cada curva se sugiere consultar la tabla que aparece en el interior de la contraportada de este libro.

Curva elástica

- Dibuje una vista exagerada de la curva elástica de la viga. Recuerde que los puntos de pendiente cero ocurren en los soportes fijos y que los puntos de desplazamiento cero se producen en los soportes fijos, articulados y de rodillo.
- Si es difícil dibujar la forma general de la curva elástica, utilice el diagrama de momento (o M/EI). Observe que cuando la viga está sometida a un *momento positivo* ésta se dobla *cóncava hacia arriba*, en tanto que un *momento negativo* curva la viga *cóncava hacia abajo*. Por otra parte, un punto de inflexión o cambio en la curvatura ocurre cuando el momento en la viga (o M/EI) es igual a cero.
- El desplazamiento y la pendiente a determinar deben indicarse en la curva. Como los teoremas del momento de área sólo se aplican entre dos tangentes, debe prestarse atención a que las tangentes estén construidas de modo que los ángulos o las desviaciones entre ellas conduzcan a la solución del problema. En este sentido, *deben considerarse las tangentes en los puntos con pendiente y desplazamiento desconocidos, así como en los soportes*, ya que generalmente la viga tiene desplazamiento cero y/o pendiente cero en los soportes.

Teoremas del momento de área

- Aplique el teorema 1 para determinar el ángulo entre dos tangentes, y el teorema 2 para encontrar las desviaciones verticales entre las tangentes.
- Tenga en cuenta que, por lo general, el teorema 2 *no* resultará en el desplazamiento de un punto sobre la curva elástica. Cuando se aplica correctamente, sólo dará la distancia vertical o la desviación de una tangente en el punto *A* sobre la curva elástica con respecto a la tangente en *B*.
- Después de aplicar el teorema 1 o el teorema 2, el signo algebraico de la respuesta puede verificarse a partir del ángulo o la desviación según se indique en la curva elástica.

EJEMPLO 8.6

Determine la pendiente en los puntos B y C de la viga que se muestra en la figura 8-16a. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi y que $I = 600$ pulg⁴.

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI . Este diagrama se muestra en la figura 8-16b. Resulta más sencillo resolver el problema en términos de EI y sustituir los datos numéricos como último paso.

Curva elástica. La carga de 2 k hace que la viga se deforme como se muestra en la figura 8-16c. (La viga se vuelve cóncava hacia abajo, puesto que M/EI es negativo.) Aquí la tangente en A (el soporte) siempre es horizontal. También se indican las tangentes en B y C . Se debe encontrar θ_B y θ_C . Por la construcción, el ángulo entre $\tan A$ y $\tan B$, es decir $\theta_{B/A}$, es equivalente a θ_B .

$$\theta_B = \theta_{B/A}$$

Además,

$$\theta_C = \theta_{C/A}$$

Teorema del momento de área. Aplicando el teorema 1, $\theta_{B/A}$ es igual al área bajo el diagrama M/EI entre los puntos A y B , es decir,

$$\begin{aligned}\theta_B = \theta_{B/A} &= -\left(\frac{30 \text{ k} \cdot \text{pie}}{EI}\right)(15 \text{ pies}) - \frac{1}{2}\left(\frac{60 \text{ k} \cdot \text{pie}}{EI} - \frac{30 \text{ k} \cdot \text{pie}}{EI}\right) \\ (15 \text{ pies}) &= -\frac{675 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI}\end{aligned}$$

Al sustituir los datos numéricos de E e I , y convertir de pies a pulgadas, se tiene

$$\begin{aligned}\theta_B &= \frac{-675 \text{ k} \cdot \text{pie}^2 (144 \text{ pulg}^2 / 1 \text{ pie}^2)}{29(10^3) \text{ k/pulg}^2 (600 \text{ pulg}^4)} \\ &= -0.00559 \text{ rad}\end{aligned}$$

Resp.

El signo negativo indica que el ángulo se mide en sentido horario desde A , figura 8-16c.

De manera similar, el área bajo el diagrama M/EI entre los puntos A y C es igual a $\theta_{C/A}$. Entonces,

$$\theta_C = \theta_{C/A} = \frac{1}{2}\left(-\frac{60 \text{ k} \cdot \text{pie}}{EI}\right)(30 \text{ pies}) = -\frac{900 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI}$$

Sustituyendo los valores numéricos de EI , se obtiene

$$\begin{aligned}\theta_C &= \frac{-900 \text{ k} \cdot \text{pie}^2 (144 \text{ pulg}^2 / \text{pie}^2)}{29(10^3) \text{ k/pulg}^2 (600 \text{ pulg}^4)} \\ &= -0.00745 \text{ rad}\end{aligned}$$

Resp.

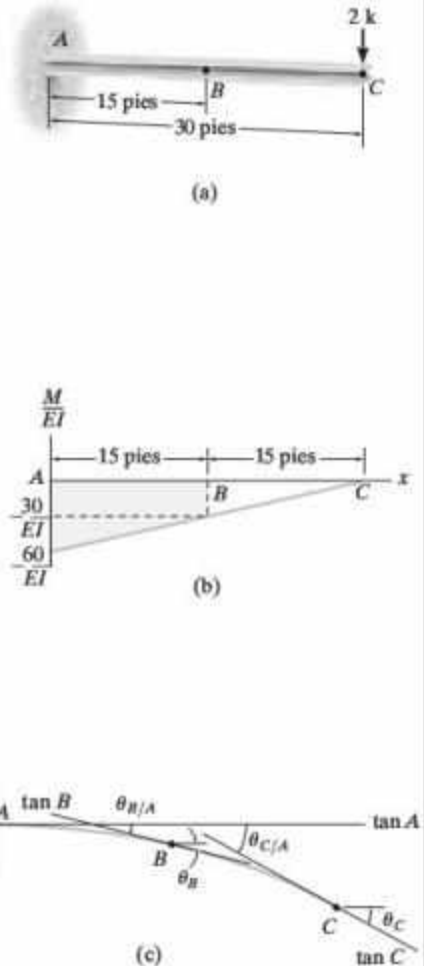
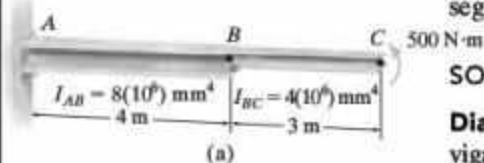


Figura 8-16

EJEMPLO 8.7



Determine la deflexión en los puntos B y C de la viga que se muestra en la figura 8-17a. Los valores para el momento de inercia de cada segmento se indican en la figura. Considere que $E = 200$ GPa.

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI . Por inspección, el diagrama de momento para la viga es un rectángulo. Aquí se construirá el diagrama M/EI relativo a I_{BC} , teniendo en cuenta que $I_{AB} = 2I_{BC}$, figura 8-17b. Como último paso, se sustituirán los datos numéricos para EI_{BC} .

Curva elástica. El momento de par en C hace que la viga se deforme, como se muestra en la figura 8-17c. Se indican las tangentes en A (el soporte), B y C . Se debe encontrar Δ_B y Δ_C . Estos desplazamientos pueden relacionarse *directamente* con las desviaciones entre las tangentes, de manera que por construcción Δ_B es igual a la desviación de tan B en relación con tan A ; es decir,

$$\Delta_B = t_{B/A}$$

Además,

$$\Delta_C = t_{C/A}$$

Teorema del momento de área. Aplicando el teorema 2, $t_{B/A}$ es igual al momento del área bajo el diagrama M/EI_{BC} entre A y B calculado con respecto al punto B , ya que éste es el punto donde debe determinarse la desviación tangencial. Por lo tanto, a partir de la figura 8-17b,

$$\Delta_B = t_{B/A} = \left[\frac{250 \text{ N} \cdot \text{m}}{EI_{BC}} (4 \text{ m}) \right] (2 \text{ m}) = \frac{2000 \text{ N} \cdot \text{m}^3}{EI_{BC}}$$

Al sustituir los datos numéricos resulta

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \frac{2000 \text{ N} \cdot \text{m}^3}{[200(10^9) \text{ N/m}^2][4(10^6) \text{ mm}^4(1 \text{ m}^4/(10^3)^4 \text{ mm}^4)]} \\ &= 0.0025 \text{ m} = 2.5 \text{ mm} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Del mismo modo, para $t_{C/A}$ se debe calcular el momento de todo el diagrama M/EI_{BC} desde A hasta C respecto del punto C . Se tiene

$$\begin{aligned} \Delta_C = t_{C/A} &= \left[\frac{250 \text{ N} \cdot \text{m}}{EI_{BC}} (4 \text{ m}) \right] (5 \text{ m}) + \left[\frac{500 \text{ N} \cdot \text{m}}{EI_{BC}} (3 \text{ m}) \right] (1.5 \text{ m}) \\ &= \frac{7250 \text{ N} \cdot \text{m}^3}{EI_{BC}} = \frac{7250 \text{ N} \cdot \text{m}^3}{[200(10^9) \text{ N/m}^2][4(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} \\ &= 0.00906 \text{ m} = 9.06 \text{ mm} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Dado que ambas respuestas son *positivas*, indican que los puntos B y C se encuentran *por encima* de la tangente en A .

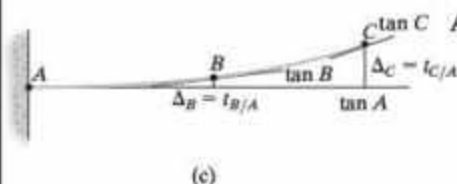
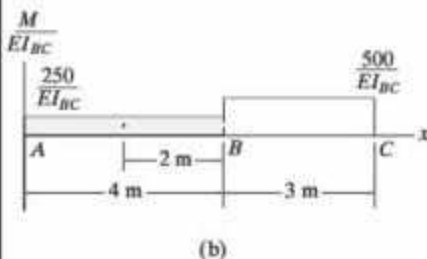


Figura 8-17

EJEMPLO 8.8

Determine la pendiente en el punto C de la viga que se muestra en la figura 8-18a. $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 6(10)^6 \text{ mm}^4$.

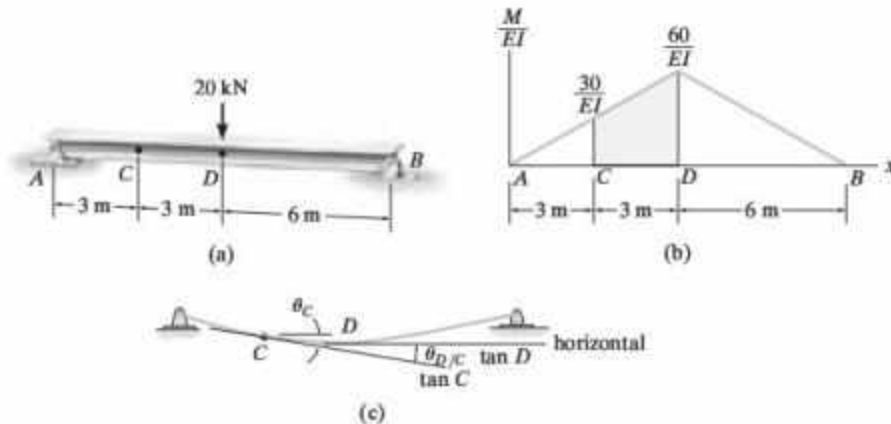
**Figura 8-18****SOLUCIÓN**

Diagrama M/EI . Figura 8-18b.

Curva elástica. Como la carga se aplica a la viga en forma simétrica, la curva elástica es simétrica, como se muestra en la figura 8-18c. Se debe encontrar θ_C . Esto puede hacerse fácilmente si se tiene en cuenta que la tangente en D es *horizontal* y entonces, por construcción, el ángulo $\theta_{D/C}$ entre tan C y tan D es igual a θ_C ; es decir,

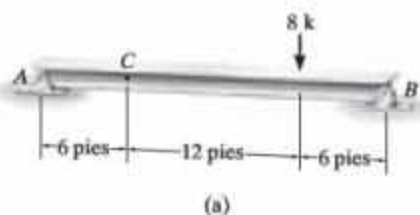
$$\theta_C = \theta_{D/C}$$

Teorema del momento de área. Con base en el teorema 1, $\theta_{D/C}$ es igual al área sombreada bajo el diagrama M/EI entre los puntos C y D. Se tiene

$$\begin{aligned}\theta_C = \theta_{D/C} &= 3 \text{ m} \left(\frac{30 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) + \frac{1}{2} (3 \text{ m}) \left(\frac{60 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} - \frac{30 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) \\ &= \frac{135 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

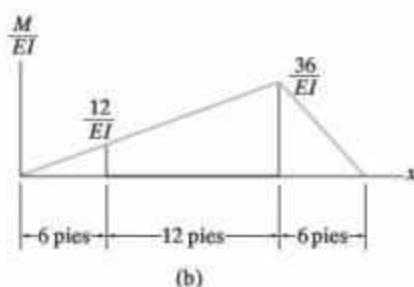
$$\theta_C = \frac{135 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][6(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} = 0.112 \text{ rad} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 8.9

Determine la pendiente en el punto C de la viga que se muestra en la figura 8-19a. $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 600$ pulg⁴.

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI . Figura 8-19b.



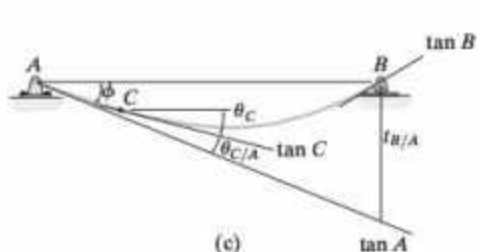
Curva elástica. La curva elástica se muestra en la figura 8-19c. Se debe encontrar θ_C ; para ello, se establecen las tangentes en A, B (los soportes) y C, también observe que $\theta_{C/A}$ es el ángulo entre las tangentes en A y C. Además, el ángulo ϕ de la figura 8-19c puede encontrarse usando $\phi = t_{B/A}/L_{AB}$. Esta ecuación es válida porque $t_{B/A}$ es realmente muy pequeño, y puede aproximarse mediante la longitud de un arco circular definido por un radio de $L_{AB} = 24$ pies y el alcance de ϕ . (Recuerde que $s = \phi r$.) Con base en la geometría de la figura 8-19c, se tiene

$$\theta_C = \phi - \theta_{C/A} = \frac{t_{B/A}}{24} - \theta_{C/A} \quad (1)$$

Teoremas del momento de área. Usando el teorema 1, $\theta_{C/A}$ es equivalente al área bajo el diagrama M/EI entre los puntos A y C; es decir,

$$\theta_{C/A} = \frac{1}{2} (6 \text{ pies}) \left(\frac{12 \text{ k} \cdot \text{pie}}{EI} \right) = \frac{36 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI}$$

Al aplicar el teorema 2, $t_{B/A}$ es equivalente al momento del área bajo el diagrama M/EI entre B y A respecto al punto B, puesto que éste es el punto donde debe determinarse la desviación tangencial. Se tiene



$$\begin{aligned} t_{B/A} &= \left[6 \text{ pies} + \frac{1}{3} (18 \text{ pies}) \right] \left[\frac{1}{2} (18 \text{ pies}) \left(\frac{36 \text{ k} \cdot \text{pie}}{EI} \right) \right] \\ &\quad + \frac{2}{3} (6 \text{ pies}) \left[\frac{1}{2} (6 \text{ pies}) \left(\frac{36 \text{ k} \cdot \text{pie}}{EI} \right) \right] \\ &= \frac{4320 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \end{aligned}$$

Figura 8-19

Sustituyendo estos resultados en la ecuación 1, resulta

$$\theta_C = \frac{4320 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{(24 \text{ pies}) EI} - \frac{36 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI} = \frac{144 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \theta_C &= \frac{144 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{29(10^3) \text{ k/pulg}^2 (144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2) 600 \text{ pulg}^4 (1 \text{ pie}^4/(12)^4 \text{ pulg}^4)} \\ &= 0.00119 \text{ rad} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 8.10

Determine la deflexión en el punto C de la viga que se muestra en la figura 8-20a. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 21$ pulg⁴.

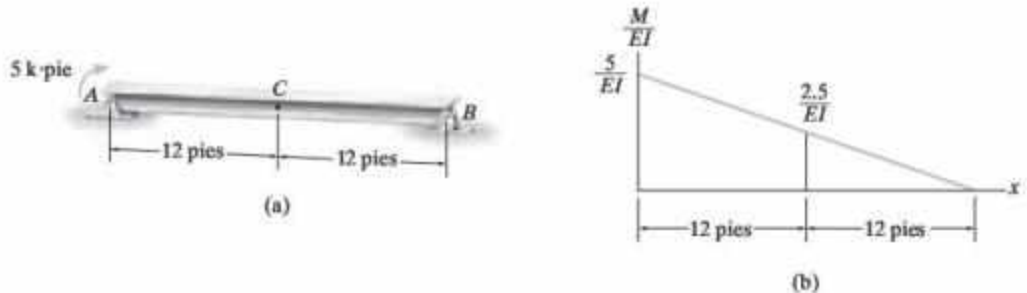
**SOLUCIÓN**

Diagrama M/EI . Figura 8-20b.

Curva elástica. Aquí debemos encontrar Δ_C , figura 8-20c. Ésta no es necesariamente la deflexión máxima de la viga, puesto que la carga, y por lo tanto la curva elástica, *no son simétricas*. En la figura 8-20c también se indican las tangentes en A , B (los soportes) y C . Si se determina $t_{A/B}$, entonces Δ' puede encontrarse por triángulos semejantes, es decir, $\Delta'/12 = t_{A/B}/24$ o bien $\Delta' = t_{A/B}/2$. A partir de la construcción en la figura 8-20c se tiene que

$$\Delta_C = \frac{t_{A/B}}{2} - t_{C/B} \quad (1)$$

Teorema del momento de área. Se aplicará el teorema 2 para determinar $t_{A/B}$ y $t_{C/B}$. Aquí $t_{A/B}$ es el momento del diagrama M/EI entre A y B respecto al punto A ,

$$t_{A/B} = \left[\frac{1}{3} (24 \text{ pies}) \right] \left[\frac{1}{2} (24 \text{ pies}) \left(\frac{5 \text{ k} \cdot \text{pie}}{EI} \right) \right] = \frac{480 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI}$$

y $t_{C/B}$ es el momento del diagrama M/EI entre C y B respecto de C .

$$t_{C/B} = \left[\frac{1}{3} (12 \text{ pies}) \right] \left[\frac{1}{2} (12 \text{ pies}) \left(\frac{2.5 \text{ k} \cdot \text{pie}}{EI} \right) \right] = \frac{60 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (1) se obtiene

$$\Delta_C = \frac{1}{2} \left(\frac{480 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \right) - \frac{60 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} = \frac{180 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI}$$

Si se trabaja en unidades de kips y pulgadas, resulta

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{180 \text{ k} \cdot \text{pie}^3 (1728 \text{ pulg}^3/\text{pie}^3)}{29(10^3) \text{ k/pulg}^2 (21 \text{ pulg}^4)} \\ &= 0.511 \text{ pulg} \end{aligned}$$

Resp.

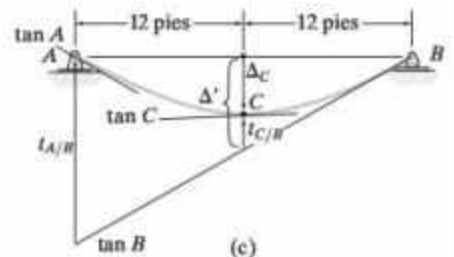


Figura 8-20

EJEMPLO 8.11

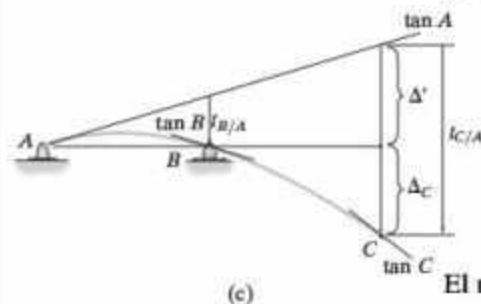
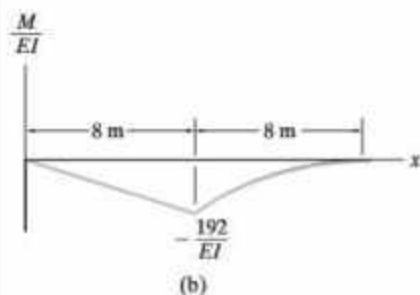
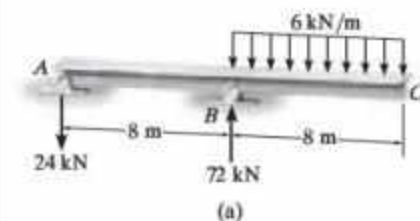


Figura 8-21

Determine la deflexión en el punto C de la viga que se muestra en la figura 8-21a. $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 250(10^6) \text{ mm}^4$.

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI . Como se muestra en la figura 8-21b, este diagrama se compone de un triángulo y un segmento parabólico.

Curva elástica. La carga hace que la viga se deforme, como se muestra en la figura 8-21c. Se debe encontrar Δ_C . Mediante la construcción de las tangentes en A , B (los soportes) y C , se ve que $\Delta_C = t_{C/A} - \Delta'$. Sin embargo, Δ' puede relacionarse con $t_{B/A}$ por triángulos semejantes, es decir, $\Delta'/16 = t_{B/A}/8$ o bien $\Delta' = 2t_{B/A}$. Por lo tanto,

$$\Delta_C = t_{C/A} - 2t_{B/A} \quad (1)$$

Teorema del momento de área. Se aplicará el teorema 2 para determinar $t_{C/A}$ y $t_{B/A}$. Si se usa la tabla de la contraportada interior del libro para el segmento parabólico y se considera el momento del diagrama M/EI entre A y C respecto del punto C , se tiene

$$\begin{aligned} t_{C/A} &= \left[\frac{3}{4}(8 \text{ m}) \right] \left[\frac{1}{3}(8 \text{ m}) \left(-\frac{192 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{3}(8 \text{ m}) + 8 \text{ m} \right] \left[\frac{1}{2}(8 \text{ m}) \left(-\frac{192 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) \right] \\ &= -\frac{11\,264 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \end{aligned}$$

El momento del diagrama M/EI entre A y B respecto del punto B es

$$t_{B/A} = \left[\frac{1}{3}(8 \text{ m}) \right] \left[\frac{1}{2}(8 \text{ m}) \left(-\frac{192 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) \right] = -\frac{2048 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

¿Por qué estos términos son negativos? Al sustituir los resultados en la ecuación (1) se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta_C &= -\frac{11\,264 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} - 2 \left(-\frac{2048 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \right) \\ &= -\frac{7168 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{-7168 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][250(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} \\ &= -0.143 \text{ m} \end{aligned}$$

Resp.

EJEMPLO 8.12

Determine la pendiente en el rodillo B de la viga con doble saliente que se muestra en la figura 8-22a. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 18 (10^6) \text{ mm}^4$.

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI . La elaboración del diagrama M/EI puede simplificarse al dibujarlo por partes y considerar los diagramas M/EI de las tres cargas, donde cada una actúa sobre una viga en voladizo fija en D , figura 8.22b. (La carga de 10 kN no se toma en cuenta dado que no produce ningún momento en torno a D).

Curva elástica. Si se dibujan tangentes en B y C , figura 8-22c, la pendiente en B puede determinarse al encontrar $t_{C/B}$, y para los ángulos pequeños,

$$\theta_B = \frac{t_{C/B}}{2 \text{ m}} \quad (1)$$

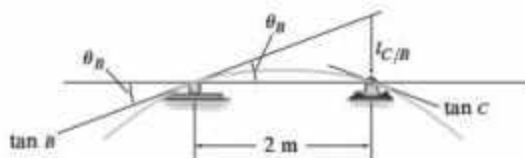
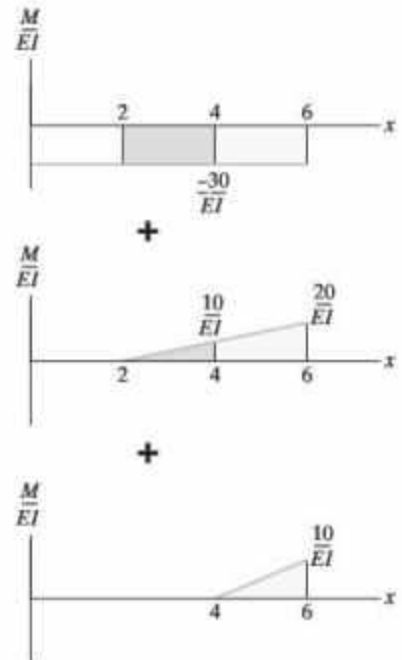
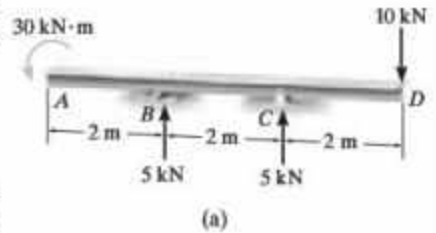
Teorema del momento de área. Para determinar $t_{C/B}$ se aplica el teorema del momento de área, a fin de encontrar el momento del diagrama M/EI entre B y C respecto del punto C . Esto sólo involucra al área sombreada bajo dos de los diagramas de la figura 8-22b. Entonces,

$$\begin{aligned} t_{C/B} &= (1 \text{ m}) \left[(2 \text{ m}) \left(\frac{-30 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) \right] + \left(\frac{2 \text{ m}}{3} \right) \left[\frac{1}{2} (2 \text{ m}) \left(\frac{10 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) \right] \\ &= \frac{53.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (1),

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{53.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{(2 \text{ m}) [200 (10^6) \text{ kN/m}^2] [18 (10^6) (10^{-12}) \text{ m}^4]} \\ &= 0.00741 \text{ rad} \end{aligned}$$

Resp.



(c)

Figura 8-22

8.5 Método de la viga conjugada

H. Müller-Breslau desarrolló el método de la viga conjugada en 1865. En esencia, requiere la misma cantidad de cálculos que los teoremas de momento de área para determinar la pendiente o la deflexión de una viga; sin embargo, este método se basa sólo en los principios de la estática y, por lo tanto, su aplicación resultará más familiar.

La base para el método proviene de la *similitud* de las ecuaciones 4-1 y 4-2 con las ecuaciones 8-2 y 8-4. Para demostrar esta semejanza, las ecuaciones pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= w \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{M}{EI} \end{aligned} \right| \quad \left. \begin{aligned} \frac{d^2M}{dx^2} &= w \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{M}{EI} \end{aligned} \right.$$

O al integrar

$$\left. \begin{aligned} V &= \int w dx \\ \theta &= \int \left(\frac{M}{EI} \right) dx \end{aligned} \right| \quad \left. \begin{aligned} M &= \int \left[\int w dx \right] dx \\ v &= \int \left[\int \left(\frac{M}{EI} \right) dx \right] dx \end{aligned} \right.$$

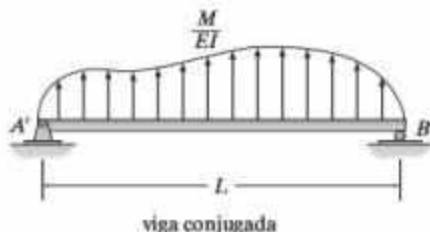
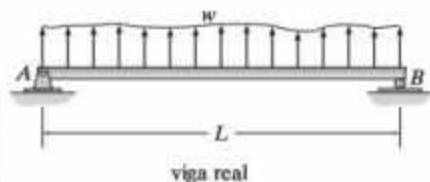


Figura 8-23

Aquí la fuerza cortante V se compara con la pendiente θ , el momento M se compara con el desplazamiento v , y la carga externa w se compara con el diagrama M/EI . Para aplicar esta comparación ahora se considerará, figura 8-23, una viga con la misma longitud que la viga real, pero aquí se denominará como la “viga conjugada”, la cual se “carga” con el diagrama M/EI obtenido de la carga w sobre la viga real. A partir de las comparaciones anteriores se pueden enunciar dos teoremas relacionados con la viga conjugada, a saber,















Teorema 1: La pendiente en un punto de la viga real es numéricamente igual a la fuerza cortante en el punto correspondiente de la viga conjugada.

Teorema 2: El desplazamiento de un punto en la viga real es numéricamente igual al momento en el punto correspondiente de la viga conjugada.

Soportes de la viga conjugada. Al dibujar la viga conjugada es importante que la fuerza cortante y el momento desarrollados en sus soportes tomen en cuenta la pendiente y el desplazamiento correspondientes de la viga real en sus soportes, lo cual es una consecuencia de los teoremas 1 y 2. Por ejemplo, como se muestra en la tabla 8.2, un soporte

de pasador o rodillo en el extremo de la viga real proporciona un *desplazamiento cero*, pero la viga tiene una pendiente distinta de cero. Por consiguiente, a partir de los teoremas 1 y 2, la viga conjugada debe estar soportada por un pasador o un rodillo, dado que este soporte tiene un *momento cero* pero tiene una fuerza cortante o una reacción en el extremo. Cuando la viga real está fijamente apoyada (3), tanto la pendiente como el desplazamiento en el soporte son iguales a cero. Aquí la viga conjugada tiene un extremo libre, ya que en este extremo hay una fuerza cortante cero y un momento cero. En la tabla se enumeran los soportes correspondientes de las vigas real y conjugada en otros casos, y en la figura 8-24 se muestran ejemplos de vigas reales y conjugadas. Observe que, como regla, al pasar por alto la fuerza axial, las vigas reales estáticamente determinadas tienen vigas conjugadas estáticamente determinadas; y las vigas reales estáticamente indeterminadas, como en el último caso de la figura 8-24, se convierten en vigas conjugadas inestables. Aunque esto ocurra, la carga M/EI proporcionará el "equilibrio" necesario para mantener la estabilidad de la viga conjugada.

TABLA 8-2

Viga real		Viga conjugada
1)	θ $\Delta = 0$  pasador	V $M = 0$  pasador
2)	θ $\Delta = 0$  rodillo	V $M = 0$  rodillo
3)	$\theta = 0$ $\Delta = 0$  fijo	$V = 0$ $M = 0$  libre
4)	θ Δ  libre	V M  fijo
5)	θ $\Delta = 0$  pasador interno	V $M = 0$  bisagra
6)	θ $\Delta = 0$  rodillo interno	V $M = 0$  bisagra
7)	θ Δ  bisagra	V M  rodillo interno

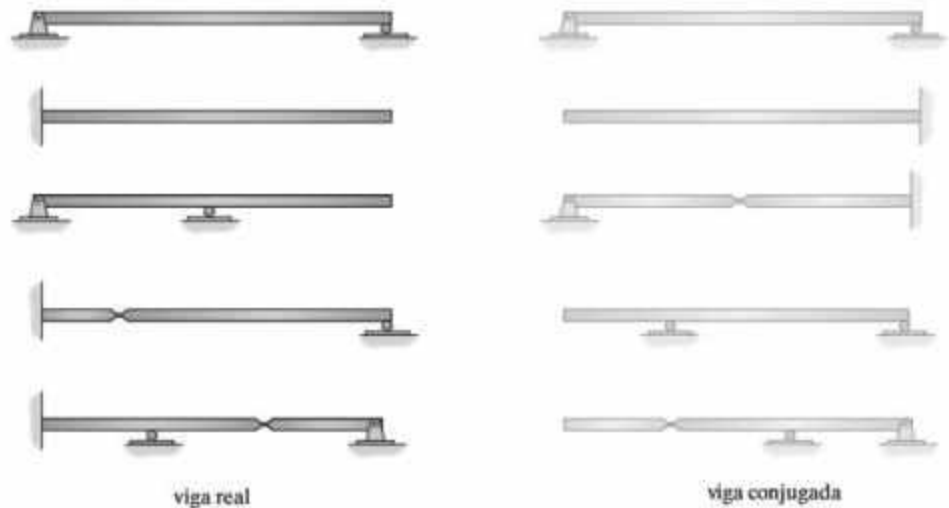


Figura 8-24

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede emplearse para determinar el desplazamiento y la pendiente en un punto sobre la curva elástica de una viga siguiendo el método de la viga conjugada.

Curva elástica

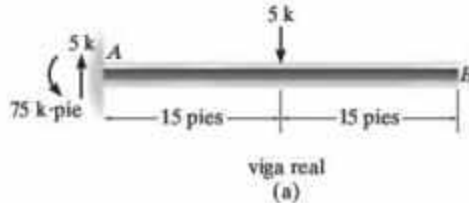
- Dibuje la viga conjugada para la viga real. Esta viga tiene la misma longitud que la viga real y los soportes correspondientes según se presentan en la tabla 8-2.
- En general, si el soporte real permite una *pendiente*, el soporte conjugado debe desarrollar una *fuerza cortante*; y si el soporte real permite un *desplazamiento*, el soporte conjugado debe desarrollar un *momento*.
- La viga conjugada se carga con el diagrama M/EI de la viga real. Se supone que esta carga está *distribuida* en la viga conjugada y que se dirige hacia *arriba* cuando M/EI es *positiva*, y hacia *abajo* cuando M/EI es *negativa*. En otras palabras, la carga actúa siempre *alejándose* de la viga.

Equilibrio

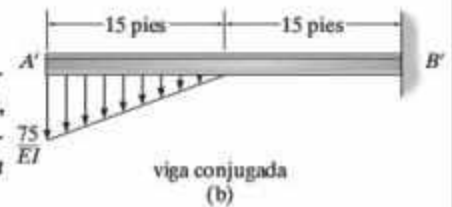
- Usando las ecuaciones de equilibrio, determine las reacciones en los soportes de la viga conjugada.
- La sección la viga conjugada en el punto donde deben determinarse la pendiente θ y el desplazamiento Δ de la viga real. En la sección muestre la fuerza cortante V' desconocida y el momento M' que actúa en su sentido positivo.
- Determine la fuerza cortante y el momento empleando las ecuaciones de equilibrio. V' y M' son iguales a θ y Δ , respectivamente, para la viga real. En particular, si estos valores son *positivos*, la *pendiente* tiene un *sentido antihorario* y el *desplazamiento* es *hacia arriba*.

EJEMPLO 8.13

Determine la pendiente y la deflexión en el punto B de la viga de acero que se muestra en la figura 8-25a. Las reacciones ya se han calculado. $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 800$ pulg⁴.

**Figura 8-25****SOLUCIÓN**

Viga conjugada. La figura 8-25b muestra la viga conjugada. Los soportes en A' y B' corresponden a los soportes A y B de la viga real, tabla 8-2. Es muy importante entender por qué sucede esto. El diagrama M/EI es *negativo*, por lo que la carga distribuida actúa *hacia abajo*, es decir, se aleja de la viga.



Equilibrio. Dado que hay que determinar θ_B y Δ_B , es necesario calcular $V_{B'}$ y $M_{B'}$ en la viga conjugada, figura 8-25c.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -\frac{562.5 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI} - V_{B'} = 0$$

$$\theta_B = V_{B'} = -\frac{562.5 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI}$$

$$= \frac{-562.5 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{29(10^3) \text{ k/pulg}^2 (144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2) 800 \text{ pulg}^4 (1 \text{ pie}^4/(12)^4 \text{ pulg}^4)}$$

$$= -0.00349 \text{ rad}$$

Resp.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_{B'} = 0; \quad \frac{562.5 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI} (25 \text{ pies}) + M_{B'} = 0$$

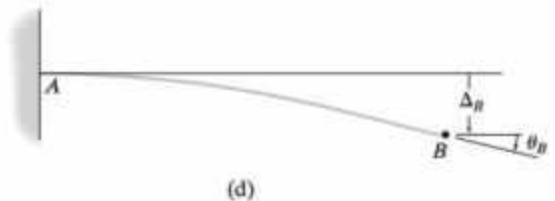
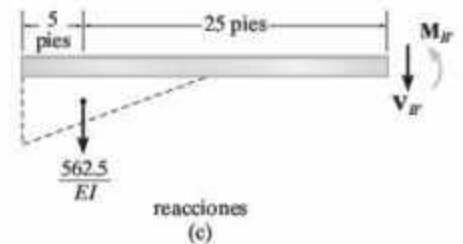
$$\Delta_B = M_{B'} = -\frac{14\,062.5 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI}$$

$$= \frac{-14\,062.5 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{29(10^3) (144) \text{ k/pie}^2 [800/(12)^4] \text{ pie}^4}$$

$$= -0.0873 \text{ pies} = -1.05 \text{ pulg}$$

Resp.

Los signos negativos indican que la pendiente de la viga se mide en sentido horario y que el desplazamiento es hacia abajo, figura 8-25d.



EJEMPLO 8.14

Determine la deflexión máxima de la viga de acero que se muestra en la figura 8-26a. Las reacciones ya han sido calculadas, $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 60(10^6) \text{ mm}^4$.

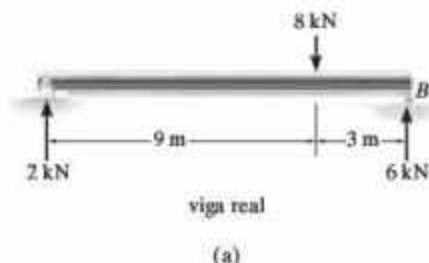
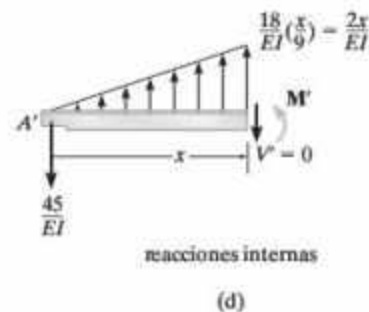
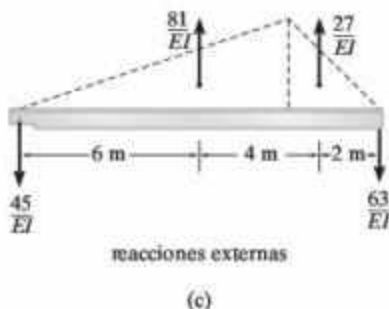
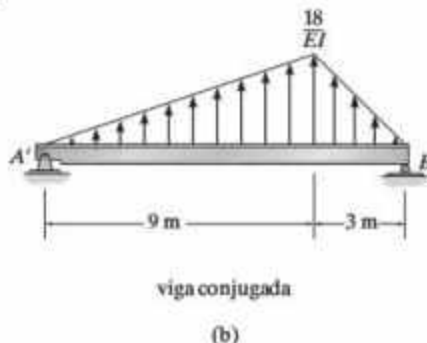


Figura 8-26



SOLUCIÓN

Viga conjugada. En la figura 8-26b se muestra la viga conjugada cargada con el diagrama M/EI . Como éste es positivo, la carga distribuida actúa hacia arriba (alejándose de la viga).

Equilibrio. Las reacciones externas sobre la viga conjugada se determinaron en primer lugar y se indican en el diagrama de cuerpo libre de la figura 8-26c. La deflexión máxima de la viga real se produce en el punto donde la pendiente de la viga es cero. Esto corresponde al mismo punto en la viga conjugada donde la fuerza cortante es cero. Si se supone que este punto actúa dentro de la región $0 \leq x \leq 9 \text{ m}$ desde A' , se puede aislar la sección que se muestra en la figura 8-26d. Observe que el pico de la carga distribuida se determinó por triángulos semejantes, es decir, $w/x = (18/EI)/9$. Se requiere que $V' = 0$ de modo que

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -\frac{45}{EI} + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{EI} \right) x = 0$$

$$x = 6.71 \text{ m} \quad (0 \leq x \leq 9 \text{ m}) \text{ OK}$$

Usando este valor de x , la deflexión máxima en la viga real corresponde al momento M' . Por consiguiente,

$$\downarrow + \Sigma M = 0; \quad \frac{45}{EI} (6.71) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2(6.71)}{EI} \right) 6.71 \right] \frac{1}{3} (6.71) + M' = 0$$

$$\Delta_{\max} = M' = -\frac{201.2 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$= \frac{-201.2 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][60(10^6) \text{ mm}^4(1 \text{ m}^4/(10^3)^4 \text{ mm}^4)]}$$

$$= -0.0168 \text{ m} = -16.8 \text{ mm}$$

Resp.

El signo negativo indica que la deflexión es hacia abajo.

EJEMPLO 8.15

La trabe de la figura 8-27a está hecha de una viga continua y reforzada en su centro, con placas de cobertura en el sitio donde su momento de inercia es mayor. Los segmentos extremos de 12 pies tienen un momento de inercia de $I = 450 \text{ pulg}^4$ y la parte central tiene un momento de inercia de $I' = 900 \text{ pulg}^4$. Determine la deflexión en el centro C . Considere que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$. Las reacciones ya han sido calculadas.

SOLUCIÓN

Viga conjugada. En primer lugar se determina el diagrama de momento para la viga, figura 8-27b. Como $I' = 2I$, por simplicidad, la carga sobre la viga conjugada puede expresarse en términos de la constante de EI , como se muestra en la figura 8-27c.

Equilibrio. Las reacciones sobre la viga conjugada pueden calcularse por la simetría de la carga o mediante las ecuaciones de equilibrio. Los resultados se muestran en la figura 8-27d. Como debe determinarse la deflexión en C , se debe calcular el momento interno en C' . Empleando el método de las secciones, el segmento $A'C'$ se aísla y se determinan las resultantes de las cargas distribuidas, así como su ubicación, figura 8-27e. Por lo tanto,

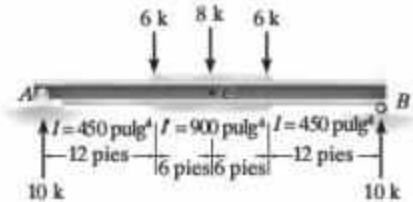
$$\downarrow + \Sigma M_{C'} = 0; \quad \frac{1116}{EI}(18) - \frac{720}{EI}(10) - \frac{360}{EI}(3) - \frac{36}{EI}(2) + M_{C'} = 0$$

$$M_{C'} = -\frac{11\,736 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI}$$

Al sustituir los datos numéricos para EI y al convertir las unidades, se tiene

$$\Delta_C = M_{C'} = -\frac{11\,736 \text{ k} \cdot \text{pie}^3 (1728 \text{ pulg}^3/\text{pie}^3)}{29(10^3) \text{ k/pulg}^2 (450 \text{ pulg}^4)} = -1.55 \text{ pulg} \quad \text{Resp.}$$

El signo negativo indica que la deflexión es hacia abajo.



viga real

(a)

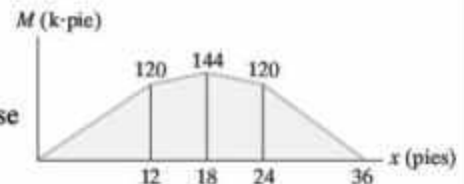
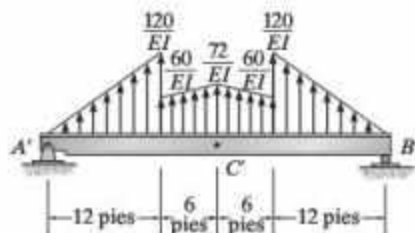
Figura 8-27

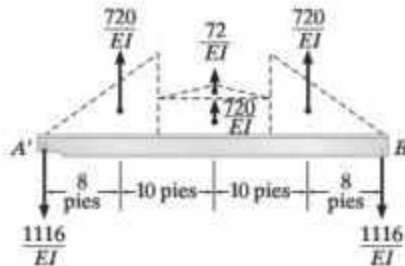
diagrama de momento

(b)



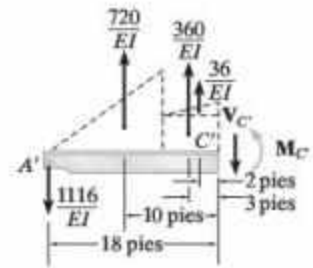
viga conjugada

(c)



reacciones externas

(d)



reacciones internas

(e)

EJEMPLO 8.16

Determine el desplazamiento del pasador en B y la pendiente de cada segmento de viga conectado al pasador para la viga compuesta que se muestra en la figura 8-28a. $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 30$ pulg⁴.

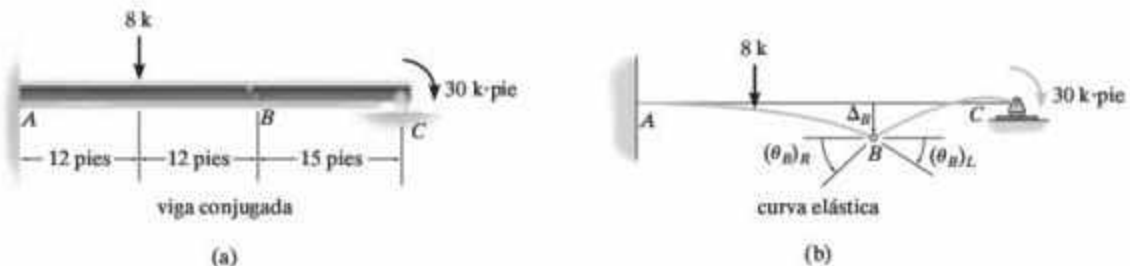
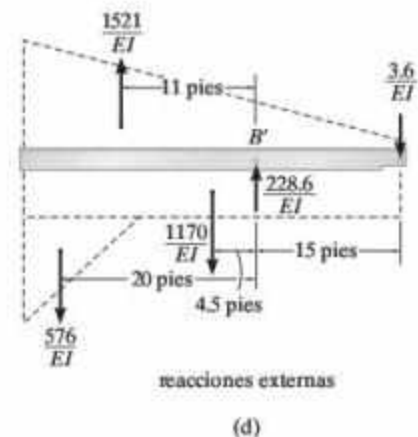
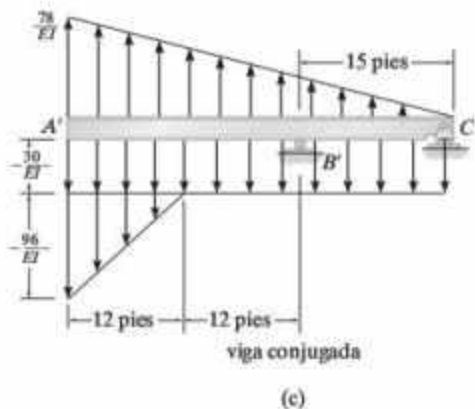


Figura 8-28

SOLUCIÓN

Viga conjugada. En la figura 8-28b se muestra la curva elástica para la viga con el fin de identificar el desplazamiento desconocido Δ_B y las pendientes $(\theta_B)_L$ y $(\theta_B)_R$ a la izquierda y a la derecha del pasador. Usando la tabla 8.2, la viga conjugada se muestra en la figura 8.28c. Por simplicidad en el cálculo, el diagrama M/EI se ha elaborado en partes empleando el principio de superposición como se describe en la sección 4-5. A este respecto, la viga real se considera en voladizo desde el soporte izquierdo, A . Se proporcionan los diagramas de momento para la carga de 8 k, la fuerza reactiva $C_y = 2$ k, y la carga de 30 k · pie. Observe que las regiones negativas de este diagrama desarrollan una carga distribuida hacia abajo y las regiones positivas tienen una carga distribuida que actúa hacia arriba.



Equilibrio. En primer lugar se calculan las reacciones externas en B' y C' y los resultados se indican en la figura 8-28d. Para determinar $(\theta_B)_R$ se secciona la viga conjugada justo a la derecha de B' y se calcula la fuerza cortante $(V_{B'})_R$, figura 8-28e. Entonces,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad (V_{B'})_R + \frac{225}{EI} - \frac{450}{EI} - \frac{3.6}{EI} = 0$$

$$\begin{aligned} (\theta_B)_R = (V_{B'})_R &= \frac{228.6 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI} \\ &= \frac{228.6 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{[29(10^3)(144) \text{ k/pie}^2][30/(12)^4] \text{ pie}^4} \\ &= 0.0378 \text{ rad} \end{aligned}$$

Resp.

El momento interno en B' produce el desplazamiento del pasador. Así que,

$$\downarrow + \Sigma M_{B'} = 0; \quad -M_{B'} + \frac{225}{EI}(5) - \frac{450}{EI}(7.5) - \frac{3.6}{EI}(15) = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_B = M_{B'} &= -\frac{2304 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \\ &= \frac{-2304 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{[29(10^3)(144) \text{ k/pie}^2][30/(12)^4] \text{ pie}^4} \\ &= -0.381 \text{ pies} = -4.58 \text{ pulg} \end{aligned}$$

Resp.

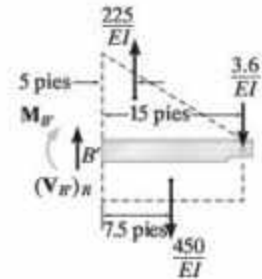
La pendiente $(\theta_B)_L$ puede encontrarse a partir de una sección de la viga justo a la izquierda de B' , figura 8-28f. Por lo tanto,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad (V_{B'})_L + \frac{228.6}{EI} + \frac{225}{EI} - \frac{450}{EI} - \frac{3.6}{EI} = 0$$

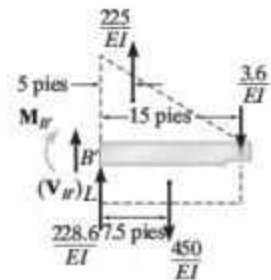
$$(\theta_B)_L = (V_{B'})_L = 0$$

Resp.

Por supuesto, $\Delta_B = M_{B'}$ para este segmento es el mismo que se calculó con anterioridad, ya que en las figuras 8-28e y 8-28f los brazos del momento sólo son algo diferentes.



(e)

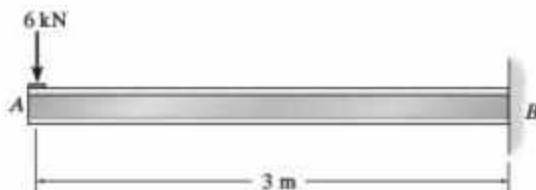


(f)

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F8-10. Use los teoremas del momento de área y determine la pendiente en A y la deflexión en A . EI es constante.

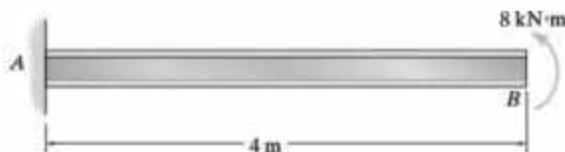
F8-11. Resuelva el problema F8-10 empleando el método de la viga conjugada.



F8-10/8-11

F8-12. Use los teoremas del momento de área y determine la pendiente en B y la deflexión en B . EI es constante.

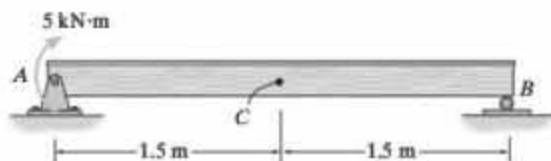
F8-13. Resuelva el problema F8-12 empleando el método de la viga conjugada.



F8-12/8-13

F8-14. Use los teoremas del momento de área y determine la pendiente en A y el desplazamiento en C . EI es constante.

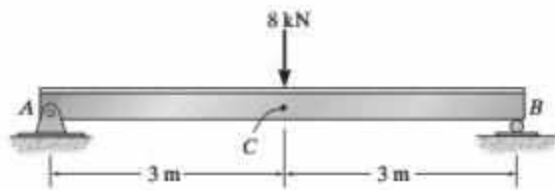
F8-15. Resuelva el problema F8-14 empleando el método de la viga conjugada.



F8-14/8-15

F8-16. Use los teoremas del momento de área y determine la pendiente en A y el desplazamiento en C . EI es constante.

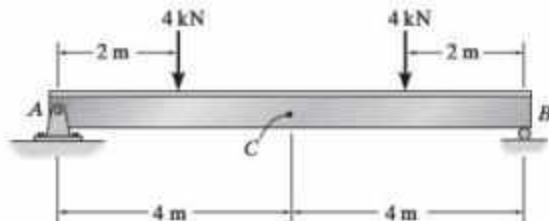
F8-17. Resuelva el problema F8-16 empleando el método de la viga conjugada.



F8-16/8-17

F8-18. Use los teoremas del momento de área y determine la pendiente en A y el desplazamiento en C . EI es constante.

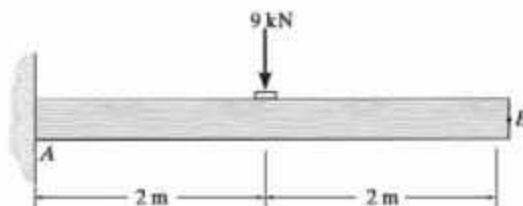
F8-19. Resuelva el problema F8-18 empleando el método de la viga conjugada.



F8-18/8-19

F8-20. Use los teoremas del momento de área y determine la pendiente en B y el desplazamiento en B . EI es constante.

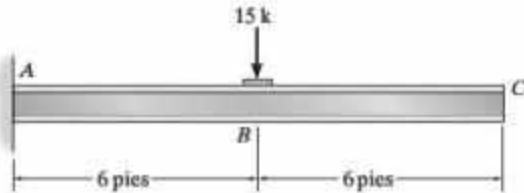
F8-21. Resuelva el problema F8-20 empleando el método de la viga conjugada.



F8-20/8-21

PROBLEMAS

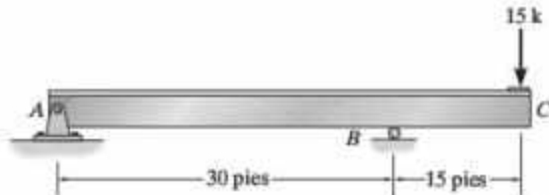
8-10. Determine la pendiente en B y el desplazamiento máximo de la viga. Use los teoremas del momento de área. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 500$ pulg⁴.



Probs. 8-10/8-11

***8-12.** Determine la pendiente y el desplazamiento en C . EI es constante. Use los teoremas del momento de área.

8-13. Resuelva el problema 8-12 empleando el método de la viga conjugada.



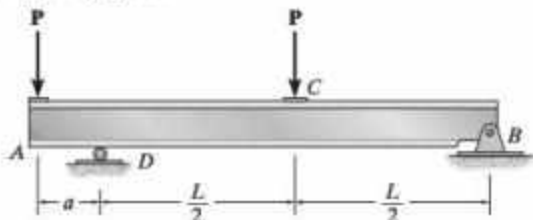
Probs. 8-12/8-13

8-14. Determine el valor de a de modo que la pendiente en A sea igual a cero. EI es constante. Use los teoremas del momento de área.

8-15. Resuelva el problema 8-14 empleando el método de la viga conjugada.

***8-16.** Determine el valor de a de modo que el desplazamiento en C sea igual a cero. EI es constante. Use los teoremas del momento de área.

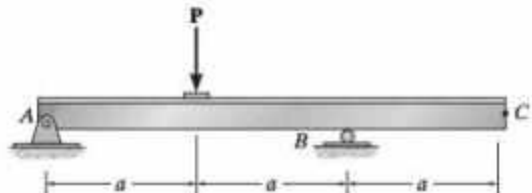
8-17. Resuelva el problema 8-16 empleando el método de la viga conjugada.



Probs. 8-14/8-15/8-16/8-17

8-18. Determine la pendiente y el desplazamiento en C . EI es constante. Use los teoremas del momento de área.

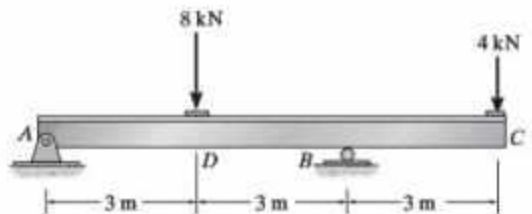
8-19. Resuelva el problema 8-18 empleando el método de la viga conjugada.



Probs. 8-18/8-19

***8-20.** Determine la pendiente y el desplazamiento en el extremo C de la viga. $E = 200$ GPa, $I = 70(10^6)$ mm⁴. Use los teoremas del momento de área.

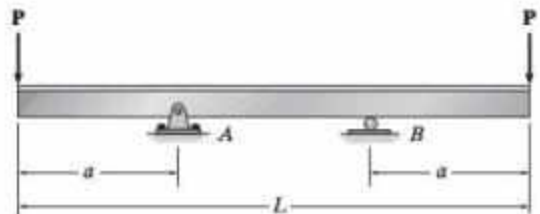
8-21. Resuelva el problema 8-20 empleando el método de la viga conjugada.



Probs. 8-20/8-21

8-22. ¿A qué distancia a deben colocarse los soportes de cojinete en A y B , de modo que el desplazamiento en el centro del eje sea igual a la deflexión en sus extremos? Los cojinetes sólo ejercen reacciones verticales sobre el eje. EI es constante. Use los teoremas del momento de área.

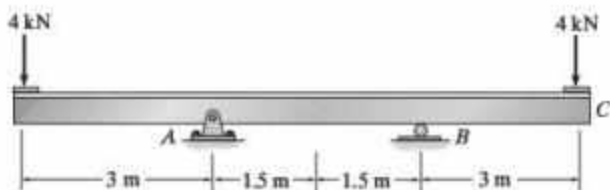
8-23. Resuelva el problema 8-22 empleando el método de la viga conjugada.



Probs. 8-22/8-23

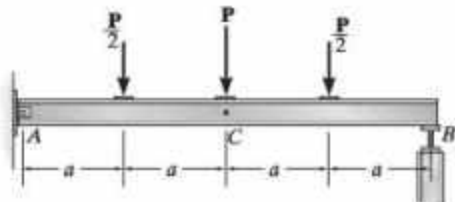
*8-24. Determine el desplazamiento en C y la pendiente en B . EI es constante. Use los teoremas del momento de área.

8-25. Resuelva el problema 8.24 empleando el método de la viga conjugada.



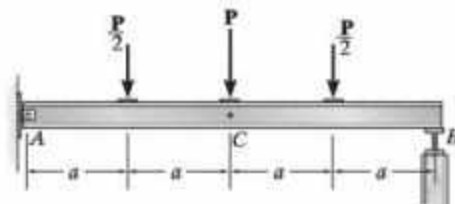
Probs. 8-24/8-25

8-26. Determine el desplazamiento en C y la pendiente en B . EI es constante. Use los teoremas del momento de área.



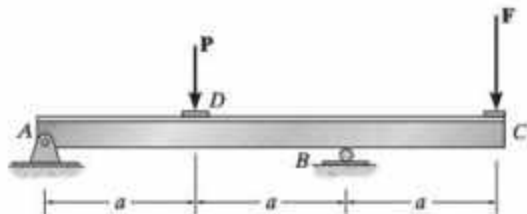
Prob. 8-26

8-27. Determine el desplazamiento en C y la pendiente en B . EI es constante. Use el método de la viga conjugada.



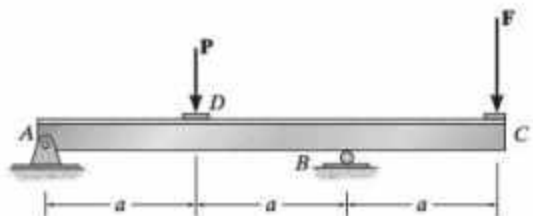
Prob. 8-27

*8-28. Determine la fuerza F en el extremo de la viga C de modo que el desplazamiento en C sea igual a cero. EI es constante. Use los teoremas del momento de área.



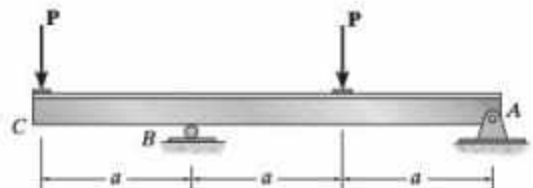
Prob. 8-28

8-29. Determine la fuerza F en el extremo de la viga C de modo que el desplazamiento en C sea igual a cero. EI es constante. Use el método de la viga conjugada.



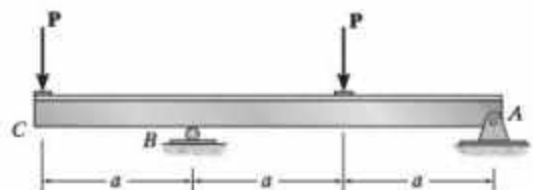
Prob. 8-29

8-30. Determine la pendiente en B y el desplazamiento en C . EI es constante. Use los teoremas del momento de área.



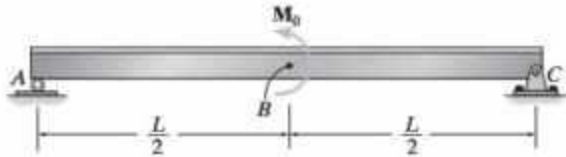
Prob. 8-30

8-31. Determine la pendiente en B y el desplazamiento en C . EI es constante. Use el método de la viga conjugada.



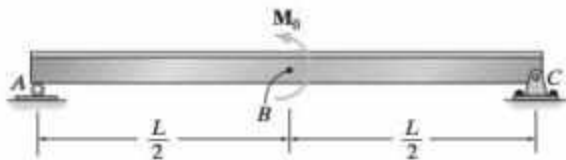
Prob. 8-31

***8-32.** Determine el desplazamiento máximo y la pendiente en A . EI es constante. Use los teoremas del momento de área.



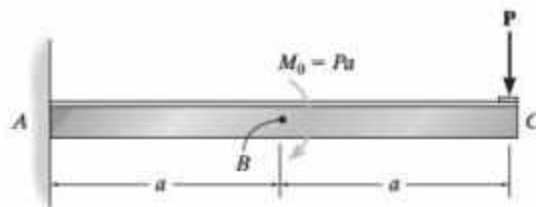
Prob. 8-32

8-33. Determine el desplazamiento máximo en B y la pendiente en A . EI es constante. Use el método de la viga conjugada.



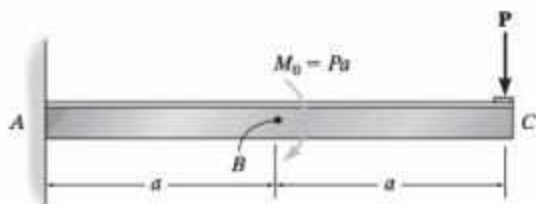
Prob. 8-33

8-34. Determine la pendiente y el desplazamiento en C . EI es constante. Use los teoremas del momento de área.



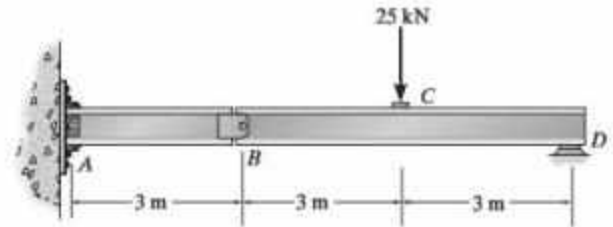
Prob. 8-34

8-35. Determine la pendiente y el desplazamiento en C . EI es constante. Use el método de la viga conjugada.



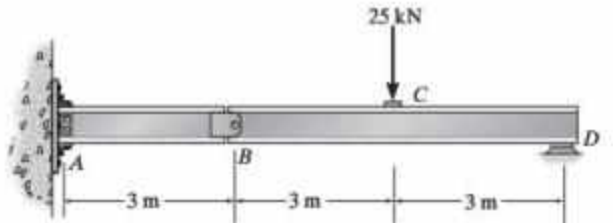
Prob. 8-35

***8-36.** Determine el desplazamiento en C . Suponga que A es un soporte fijo, B es una articulación y D es un rodillo. EI es constante. Use los teoremas del momento de área.



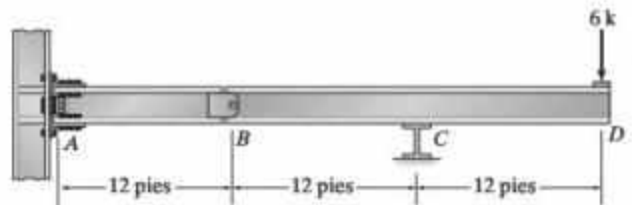
Prob. 8-36

8-37. Determine el desplazamiento en C . Suponga que A es un soporte fijo, B es una articulación y D es un rodillo. EI es constante. Use el método de la viga conjugada.



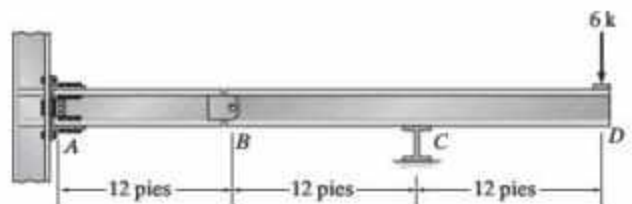
Prob. 8-37

8-38. Determine el desplazamiento en D y la pendiente en D . Suponga que A es un soporte fijo, B es una articulación y C es un rodillo. Use los teoremas del momento de área.



Prob. 8-38

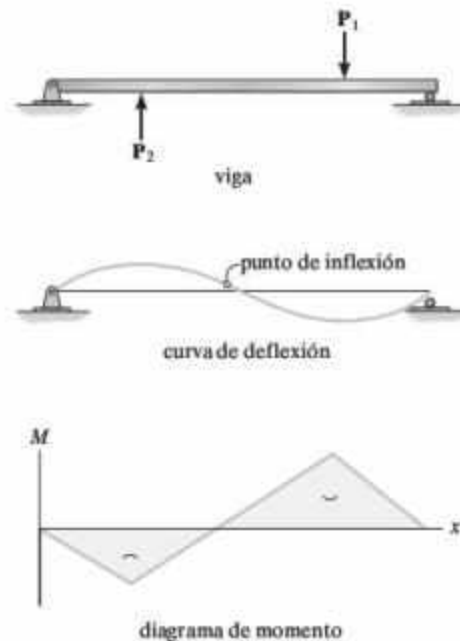
8-39. Determine el desplazamiento en D y la pendiente en D . Suponga que A es un soporte fijo, B es una articulación y C es un rodillo. Use el método de la viga conjugada.



Prob. 8-39

REPASO DEL CAPÍTULO

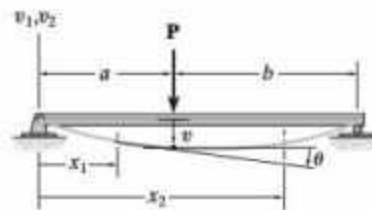
La deflexión de un elemento (o estructura) siempre puede establecerse cuando se conoce el diagrama de momento, porque los momentos positivos tenderán a doblar el elemento cóncavo hacia arriba, y los momentos negativos tenderán a doblar el elemento cóncavo hacia abajo. Del mismo modo, la forma general del diagrama de momento puede determinarse si se conoce la curva de deflexión.



La alteración de una viga debido a la deflexión puede determinarse mediante la doble integración de la ecuación

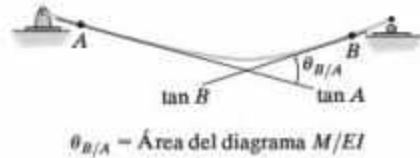
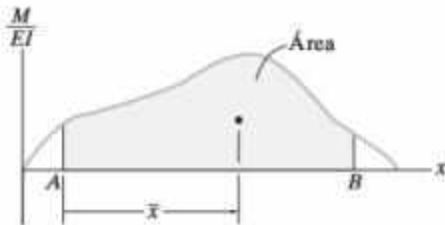
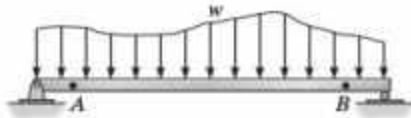
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Aquí, el momento interno M debe expresarse en función de las coordenadas x que se extienden a través de la viga. Las constantes de integración se obtienen de las condiciones de frontera, como la deflexión cero en un soporte de pasador o rodillo, y la deflexión y la pendiente cero en un soporte fijo. Si se requieren algunas coordenadas x , entonces debe considerarse la continuidad de la pendiente y la deflexión, donde $\theta_1(a) = \theta_2(a)$ y $v_1(a) = v_2(a)$ en $x_1 = x_2 = a$.

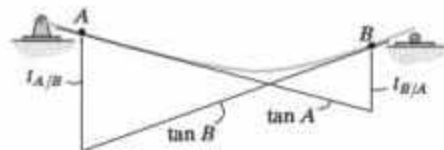


Si el diagrama de momento tiene una forma simple, se pueden usar los teoremas del momento de área o el método de la viga conjugada para determinar la desviación y la pendiente en un punto de la viga.

Los teoremas del momento de área consideran los ángulos y las desviaciones verticales entre las tangentes en dos puntos A y B sobre la curva elástica. El cambio en la pendiente se encuentra a partir del área bajo el diagrama M/EI entre los dos puntos, y la desviación se determina con base en el momento de área del diagrama M/EI con respecto al punto donde ocurre la desviación.

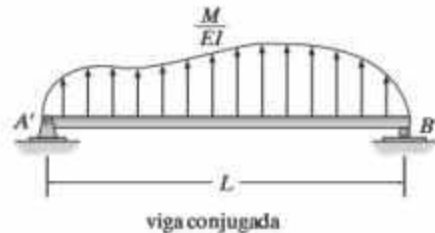
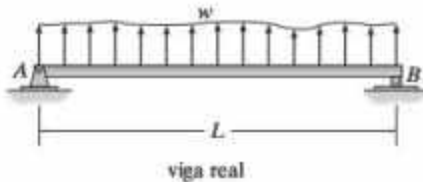


$$\theta_{B/A} = \text{Área del diagrama } M/EI$$



$$t_{A/B} = \bar{x} (\text{Área del diagrama } M/EI)$$

El método de la viga conjugada es muy detallado y requiere la aplicación de los principios de la estática. De manera muy simple, se establece la viga conjugada usando la tabla 8-2, después se considera la carga como el diagrama M/EI . La pendiente (deflexión) en un punto sobre la viga real es entonces igual a la fuerza cortante (momento) en el mismo punto sobre la viga conjugada.





El desplazamiento en los extremos de la cubierta de este puente puede determinarse durante su construcción empleando métodos de energía.

Deflexiones empleando métodos de energía

En este capítulo se mostrará cómo aplicar los métodos de energía para resolver problemas que involucren a la pendiente y a la deflexión. El capítulo comienza con un análisis del trabajo y la energía de deformación, seguido por un desarrollo del principio del trabajo y la energía. Después se estudian el método del trabajo virtual y el teorema de Castigliano, y estas técnicas se emplean para determinar los desplazamientos en puntos específicos de armaduras, vigas y marcos.

9.1 Trabajo externo y energía de deformación

Los métodos semigráficos presentados en los capítulos anteriores son muy efectivos para encontrar los desplazamientos y pendientes en puntos de vigas sometidas a cargas bastante simples. Para cargas más complicadas o en estructuras como armaduras y marcos, se sugiere realizar los cálculos siguiendo los métodos de energía. La mayoría de los métodos de energía se basan en el *principio de conservación de la energía*, que establece que el trabajo realizado por todas las fuerzas externas que actúan sobre una estructura, U_e , se transforma en trabajo interno o energía de deformación, U_i , la cual se desarrolla al deformarse la estructura. Si no se excede el límite elástico del material, la *energía de deformación elástica* regresará a la estructura a su estado sin deformar, cuando las cargas sean retiradas. El principio de conservación de la energía puede establecerse matemáticamente como

$$U_e = U_i \quad (9-1)$$

Sin embargo, antes de desarrollar cualquiera de los métodos de energía basados en este principio, primero se determinarán el trabajo externo y la energía de deformación causados por una fuerza y un momento. Las formulaciones que se presentarán servirán de base para comprender los métodos de trabajo y energía que le siguen.

Trabajo externo, fuerza. Cuando una fuerza F experimenta un desplazamiento dx en la *misma dirección* que la fuerza, el trabajo realizado es $dU_e = F dx$. Si el desplazamiento total es x , el trabajo se convierte en

$$U_e = \int_0^x F dx \quad (9-2)$$

Considere ahora el efecto causado por una fuerza axial aplicada al extremo de una barra como la que se muestra en la figura 9-1a. A medida que la magnitud de F se incrementa *gradualmente* desde cero hasta un valor límite $F = P$, la elongación final de la barra se convierte en Δ . Si el material tiene una respuesta elástica lineal, entonces $F = (P/\Delta)x$. Si se sustituye en la ecuación 9-2 y se integra desde 0 hasta Δ , resulta

$$U_e = \frac{1}{2} P \Delta \quad (9-3)$$

lo que representa el *área triangular* sombreada de la figura 9-1a.

De esto también puede concluirse que cuando una fuerza se aplica gradualmente sobre la barra, y su magnitud se construye linealmente desde cero hasta algún valor P , el trabajo realizado es igual a la *magnitud de la fuerza media* ($P/2$) por el desplazamiento (Δ).

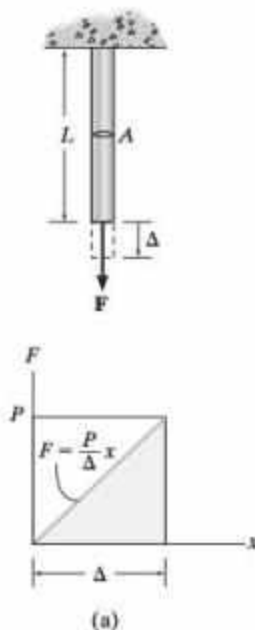


Figura 9-1

Suponga ahora que \mathbf{P} ya está aplicada sobre la barra y que ahora se aplica *otra* fuerza \mathbf{F}' , por lo que la barra se deforma aún más en una cantidad Δ' , figura 9-1b. Entonces, el trabajo realizado por \mathbf{P} (no por \mathbf{F}') cuando la barra experimenta la deformación adicional Δ' es

$$U'_e = P\Delta' \quad (9-4)$$

Aquí el trabajo representa el *área rectangular* sombreada de la figura 9-1b. En este caso, \mathbf{P} no cambia su magnitud porque Δ' es causado sólo por \mathbf{F}' . Por lo tanto, el trabajo es simplemente la magnitud de la fuerza (P) por el desplazamiento (Δ').

Entonces, puede afirmarse de manera resumida que al aplicar una fuerza \mathbf{P} a la barra, seguida por la aplicación de una fuerza \mathbf{F}' , el trabajo total realizado por las dos fuerzas está representado por el área triangular ACE de la figura 9-1b. El área triangular ABG representa el trabajo de \mathbf{P} que es causado por su desplazamiento Δ , el área triangular BCD representa el trabajo de \mathbf{F}' debido a que esta fuerza provoca un desplazamiento Δ' y, por último, el área rectangular sombreada $BDEG$ representa el trabajo adicional realizado por \mathbf{P} cuando se desplaza Δ' a causa de \mathbf{F}' .

Trabajo externo, momento. El trabajo de un momento se define por el producto de la magnitud del momento \mathbf{M} y el ángulo $d\theta$ a través del cual gira, es decir, $dU_e = M d\theta$, figura 9-2. Si el ángulo total de rotación es θ radianes, el trabajo se convierte en

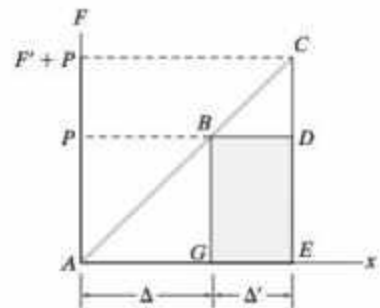
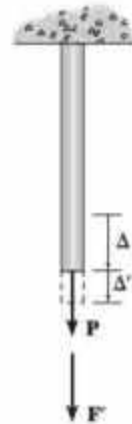
$$U_e = \int_0^\theta M d\theta \quad (9-5)$$

Como en el caso de la fuerza, si el momento se aplica *gradualmente* a una estructura que tiene respuesta elástica lineal entre cero y M , entonces el trabajo es

$$U_e = \frac{1}{2} M\theta \quad (9-6)$$

Sin embargo, si el momento ya está aplicado a la estructura y otras cargas deforman aún más la estructura en una cantidad θ' , entonces \mathbf{M} gira θ' y el trabajo es

$$U'_e = M\theta' \quad (9-7)$$



(b)

Figura 9-1

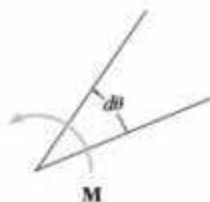


Figura 9-2

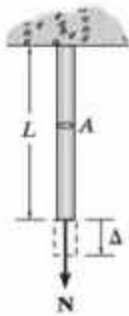


Figura 9-3

Energía de deformación, fuerza axial. Cuando se aplica una fuerza axial N de manera gradual a la barra que se muestra en la figura 9-3, deformará el material de manera que el *trabajo externo* realizado por N se convierte en *energía de deformación*, la cual se almacena en la barra (ecuación 9-1). Siempre que el material sea *elástico lineal*, la ley de Hooke será válida, $\sigma = E\epsilon$, y si la barra tiene un área constante A en su sección transversal y una longitud L , el esfuerzo normal es $\sigma = N/A$ y la deformación final es $\epsilon = \Delta/L$. En consecuencia, $N/A = E(\Delta/L)$, y la desviación final es

$$\Delta = \frac{NL}{AE} \quad (9-8)$$

Por lo tanto, al sustituir con $P = N$ en la ecuación 9-3, la energía de deformación en la barra es

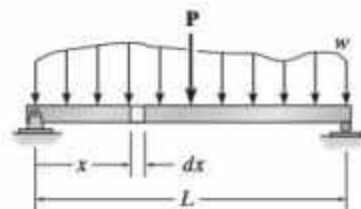
$$U_i = \frac{N^2 L}{2AE} \quad (9-9)$$

Energía de deformación, flexión. Considere la viga de la figura 9-4a, que se distorsiona por la aplicación *gradual* de las cargas P y w . Estas cargas crean un momento interno M en la viga en una sección situada a una distancia x del soporte izquierdo. La rotación resultante del elemento diferencial dx , figura 9-4b, puede determinarse con base en la ecuación 8-2, es decir, $d\theta = (M/EI) dx$. En consecuencia, la energía de deformación, o el trabajo almacenado en el elemento, se determina a partir de la ecuación 9-6 puesto que el momento interno se desarrolla gradualmente. Entonces,

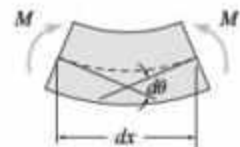
$$dU_i = \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (9-10)$$

La energía de deformación para la viga se determina al integrar este resultado por toda la longitud L de la viga. El resultado es

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (9-11)$$



(a)



(b)

Figura 9-4

9.2 Principio del trabajo y la energía

Ahora que ya se han formulado el trabajo y la energía de deformación para una fuerza y un momento, se ilustrará cómo pueden aplicarse la conservación de la energía o el principio del trabajo y la energía para determinar el desplazamiento en un punto sobre una estructura. Para hacerlo, considere la determinación del desplazamiento Δ en el punto donde se aplica la fuerza \mathbf{P} a la viga en voladizo de la figura 9-5. A partir de la ecuación 9-3, el trabajo externo es $U_e = \frac{1}{2} P\Delta$. Para obtener la energía de deformación resultante, primero debe determinarse el momento interno como una función de la posición x en la viga y después aplicar la ecuación 9-11. En este caso $M = -Px$, de modo que

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px)^2 dx}{2EI} = \frac{1}{6} \frac{P^2 L^3}{EI}$$

Al igualar el trabajo externo con la energía de deformación interna y al despejar el desplazamiento desconocido Δ , se tiene

$$\begin{aligned} U_e &= U_i \\ \frac{1}{2} P\Delta &= \frac{1}{6} \frac{P^2 L^3}{EI} \\ \Delta &= \frac{PL^3}{3EI} \end{aligned}$$

Aunque la solución aquí es bastante directa, la aplicación de este método se limita a unos cuantos problemas seleccionados. Cabe señalar que sólo puede aplicarse *una carga* a la estructura, puesto que si se aplicase más de una carga habría un desplazamiento desconocido bajo cada carga e inclusive podría escribirse sólo *una* ecuación de "trabajo" para la viga. Además, *sólo puede obtenerse el desplazamiento bajo la fuerza*, porque el trabajo externo depende tanto de la fuerza como de su desplazamiento correspondiente. Una manera de sortear estas limitaciones consiste en emplear el método del trabajo virtual o el teorema de Castigliano, los cuales se explican en las siguientes secciones.

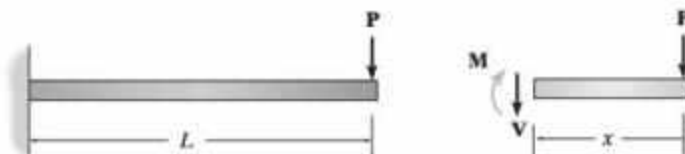


Figura 9-5

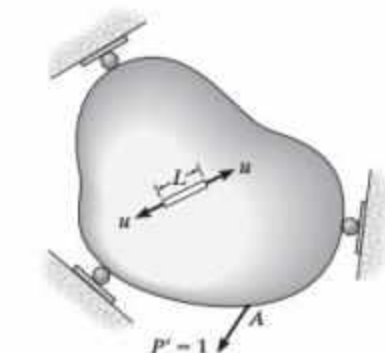
9.3 Principio del trabajo virtual

Este principio fue desarrollado por John Bernoulli en 1717, y en ocasiones se le conoce también como el método de la carga unitaria. Proporciona un medio general para obtener el desplazamiento y la pendiente en un punto específico de una estructura, ya sea una viga, un marco o una armadura.

Antes de desarrollar el principio del trabajo virtual se requiere hacer algunos enunciados generales sobre el principio del trabajo y la energía, lo cual se analizó en la sección anterior. Si se toma una estructura deformable de cualquier forma o tamaño y se le aplica una serie de *cargas externas* \mathbf{P} , se producirán *cargas internas* \mathbf{u} en puntos a través de toda la estructura. *Es necesario relacionar las cargas internas y externas mediante las ecuaciones de equilibrio*. Como consecuencia de estas cargas, ocurrirán desplazamientos externos Δ en las cargas \mathbf{P} y se presentarán desplazamientos internos δ en cada punto de carga interna \mathbf{u} . En general, *estos desplazamientos no tienen que ser elásticos, y quizá no se relacionen con las cargas; sin embargo, los desplazamientos internos y externos deben estar relacionados por la compatibilidad de los desplazamientos*. En otras palabras, si se conocen los desplazamientos externos, los desplazamientos internos correspondientes estarán definidos de manera única. Entonces, el principio del trabajo y los estados de energía puede enunciarse de manera general como sigue:

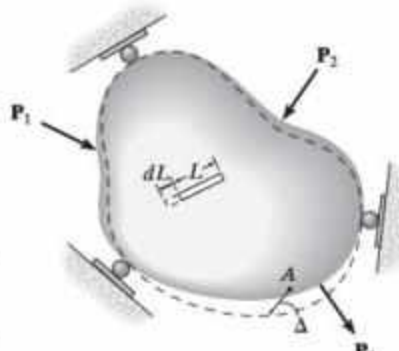
$$\begin{array}{ccc} \Sigma P \Delta & = & \Sigma u \delta \\ \text{Trabajo de las} & & \text{Trabajo de las} \\ \text{cargas externas} & & \text{cargas internas} \end{array} \quad (9-12)$$

Con base en este concepto, ahora se desarrollará el principio del trabajo virtual. Para ello se considerará que la estructura (o cuerpo) tiene una forma arbitraria como se muestra en la figura 9.6b.* Suponga que es necesario determinar el desplazamiento Δ del punto A en el cuerpo causado por las "cargas reales" \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 y \mathbf{P}_3 . Debe entenderse que estas cargas no causan movimiento de los soportes; sin embargo, en general, pueden deformar el material *más allá del límite elástico*. Como ninguna carga externa actúa sobre el cuerpo en A ni en la dirección de Δ , el desplazamiento Δ puede determinarse si se coloca *primero* una carga "virtual" sobre el cuerpo de modo que esta fuerza \mathbf{P}' actúe en la *misma dirección* que Δ , figura 9-6a. Por conveniencia, que será evidente más adelante, se elegirá \mathbf{P}' con una magnitud "unitaria", es decir, $P' = 1$. Para describir la carga se usa el término "virtual" debido a que *es imaginaria y en realidad no existe como parte de la carga real*. Sin embargo, la carga unitaria (\mathbf{P}') crea una carga virtual interna \mathbf{u} en un elemento o fibra representativa del cuerpo, como se muestra en la figura 9-6a. Aquí se requiere que \mathbf{P}' y \mathbf{u} se relacionen mediante las ecuaciones de equilibrio.[†]



Aplicación de la carga virtual $P' = 1$

(a)



Aplicación de las cargas reales \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3

(b)

Figura 9-6

*Esta forma arbitraria representará posteriormente una armadura, una viga o un marco específicos.

†Aunque estas cargas provocarán desplazamientos virtuales, no se tomarán en cuenta sus magnitudes.

Una vez aplicadas las cargas virtuales, el cuerpo está sometido a las *cargas reales* \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 y \mathbf{P}_3 , figura 9-6b. El punto A se desplazará una cantidad Δ , la cual causará que el elemento se deforme una cantidad dL . Como resultado, la fuerza virtual externa \mathbf{P}' y la carga virtual interna \mathbf{u} se “pasearán a lo largo” de Δ y dL , respectivamente, y por lo tanto realizarán un *trabajo virtual externo* de $1 \cdot \Delta$ sobre el cuerpo y un *trabajo virtual interno* de $u \cdot dL$ sobre el elemento. Si se toma en cuenta que el trabajo virtual externo es igual al trabajo virtual interno realizado en todos los elementos del cuerpo, es posible escribir la ecuación del trabajo virtual como

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \text{cargas virtuales} \\ 1 \cdot \Delta = \sum u \cdot dL \\ \uparrow & \uparrow & \text{desplazamientos reales} \end{array} \quad (9-13)$$

donde

$P' = 1$ = carga unitaria virtual externa que actúa en la dirección de Δ .

u = carga virtual interna que actúa sobre el elemento en la dirección de dL .

Δ = desplazamiento externo causado por las cargas reales.

dL = deformación interna del elemento causada por las cargas reales.

Al elegir $P' = 1$, puede verse que la solución para Δ resulta directamente, puesto que $\Delta = \sum u \, dL$.

De manera parecida, si deben determinarse el desplazamiento rotacional o la pendiente de la tangente en un punto sobre una estructura, se aplica un *momento de par* virtual \mathbf{M}' con magnitud unitaria en el punto. Como consecuencia, este momento de par causa una carga virtual u_θ en uno de los elementos del cuerpo. Si se supone que las cargas reales deforman el elemento una cantidad dL , la rotación θ puede encontrarse a partir de la ecuación del trabajo virtual

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \text{cargas virtuales} \\ 1 \cdot \theta = \sum u_\theta \cdot dL \\ \uparrow & \uparrow & \text{desplazamientos reales} \end{array} \quad (9-14)$$

donde

$M' = 1$ = momento de par unitario virtual externo que actúa en la dirección de θ .

u_θ = carga virtual interna que actúa sobre un elemento en la dirección de dL .

θ = desplazamiento rotacional externo o pendiente en radianes causados por las cargas reales.

dL = deformación interna del elemento causada por las cargas reales.

Este método para aplicar el principio del trabajo virtual se conoce comúnmente como el *método de las fuerzas virtuales*, dado que se aplica una fuerza virtual de lo que resulta el cálculo de un *desplazamiento real*. En este caso, la ecuación del trabajo virtual representa un *requisito de compatibilidad* para la estructura. Aunque aquí no es importante, observe que también es posible aplicar el principio del trabajo virtual como

un método de desplazamientos virtuales. En este caso, se imponen desplazamientos virtuales sobre la estructura cuando ésta se encuentra sometida a cargas reales. Este método puede usarse para determinar una fuerza sobre o dentro una estructura,* de modo que la ecuación del trabajo virtual se expresa entonces como un requisito de equilibrio.

9.4 Método del trabajo virtual: Armaduras

El método del trabajo virtual puede usarse para determinar el desplazamiento de una junta de armadura cuando la armadura está sometida a una carga externa, a un cambio de temperatura, o por errores de fabricación. A continuación se analizará cada una de estas situaciones.

Carga externa. Para facilitar la explicación, considere el desplazamiento vertical Δ de una junta B de la armadura que se muestra en la figura 9-7a. Aquí, un miembro típico de la armadura sería uno de sus elementos con longitud L , figura 9-7b. Si las cargas aplicadas P_1 y P_2 ocasionan una respuesta material lineal elástica, este miembro se deforma en una cantidad $\Delta L = NL/AE$, donde N es la fuerza normal o axial en el elemento, causada por las cargas. Si se aplica la ecuación 9-13, entonces la ecuación del trabajo virtual para la armadura es

$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE} \quad (9-15)$$

donde

1 = carga unitaria virtual externa que actúa sobre la junta de la armadura en la dirección indicada de Δ .

n = fuerza normal virtual interna en un elemento de una armadura causada por la carga unitaria virtual externa.

Δ = desplazamiento externo de la junta causado por las cargas reales sobre la armadura.

N = fuerza normal interna en un elemento de la armadura causada por las cargas reales.

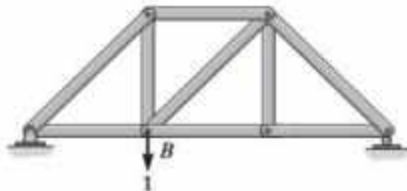
L = longitud de un elemento.

A = área transversal de un elemento.

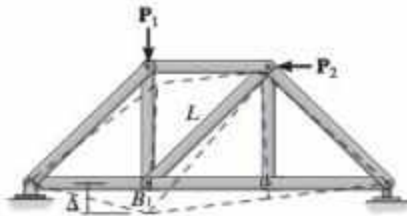
E = módulo de elasticidad de un elemento.

La formulación de esta ecuación se sigue en forma natural del desarrollo en la sección 9-3. Aquí la carga unitaria virtual externa crea fuerzas virtuales internas n en cada uno de los elementos de la armadura. Entonces las cargas reales hacen que la junta de la armadura se desplace Δ en la misma dirección que la carga unitaria virtual, y que cada elemento se desplace NL/AE en la misma dirección que su respectiva fuerza n . En consecuencia, el trabajo virtual externo $1 \cdot \Delta$ es igual al trabajo virtual interno o la energía de deformación interna (virtual) almacenada en todos los elementos de la armadura, es decir, $\sum nNL/AE$.

*Así se usó en la sección 6-3 en relación con el principio de Müller-Breslau.



Aplicación de la carga unitaria virtual en B
(a)



Aplicación de las cargas reales P_1, P_2
(b)

Figura 9-7

Temperatura. En algunos casos, los elementos de una armadura podrían cambiar su longitud debido a la temperatura. Si α es el coeficiente de expansión térmica de un elemento y ΔT es el cambio en su temperatura, el cambio en la longitud de un elemento es $\Delta L = \alpha \Delta T L$. Por lo tanto, el desplazamiento de una junta seleccionada en una armadura debido a este cambio de temperatura puede determinarse a partir de la ecuación 9-13, escrita como

$$1 \cdot \Delta = \sum n \alpha \Delta T L \quad (9-16)$$

donde

- 1 = carga unitaria virtual externa que actúa sobre la junta de la armadura en el sentido indicado de Δ .
- n = fuerza normal virtual interna en un elemento de una armadura causada por la carga unitaria virtual externa.
- Δ = desplazamiento externo de la junta causado por el cambio de temperatura.
- α = coeficiente de expansión térmica del elemento.
- ΔT = cambio en la temperatura del elemento.
- L = longitud del elemento.

Errores de fabricación y comba. En ocasiones pueden presentarse errores de fabricación en las longitudes de los elementos de una armadura. Además, en algunos casos es necesario hacer los elementos un poco más largos o más cortos para obtener una comba en la armadura. La comba suele construirse en una armadura de puente para que la cuerda inferior se curve hacia arriba en una cantidad equivalente a la deflexión hacia abajo de la cuerda cuando está sometida a todo el peso muerto del puente. Si un elemento de la armadura es más o menos largo de lo previsto, el desplazamiento de una junta de la armadura respecto a su posición esperada puede determinarse mediante la aplicación directa de la ecuación 9-13, escrita como

$$1 \cdot \Delta = \sum n \Delta L \quad (9-17)$$

donde

- 1 = carga unitaria virtual externa que actúa sobre la junta de la armadura en la dirección indicada de Δ .
- n = fuerza normal virtual interna de un elemento de una armadura causada por la carga unitaria virtual externa.
- Δ = desplazamiento externo de la junta ocasionado por los errores de fabricación.
- ΔL = diferencia en longitud del elemento respecto a su tamaño esperado a causa de un error de fabricación.

Si sobre la armadura actúan cargas externas y algunos de los elementos están sometidos a un cambio térmico o se han fabricado con dimensiones incorrectas, será necesaria una combinación de los lados derechos de las ecuaciones 9-15 a 9-17.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento puede usarse para determinar un desplazamiento específico de cualquier junta en una armadura aplicando el método del trabajo virtual.

Fuerzas virtuales n

- Coloque la carga unitaria sobre la armadura en la junta donde debe determinarse el desplazamiento. La carga debe estar en la misma dirección que el desplazamiento especificado, por ejemplo, horizontal o vertical.
- Con la carga unitaria colocada de esta manera y con todas las cargas reales *retiradas* de la viga, utilice el método de los nudos o el método de las secciones y calcule la fuerza interna n en cada elemento de la armadura. Suponga que las fuerzas de tensión son positivas y que las fuerzas de compresión son negativas.

Fuerzas reales N

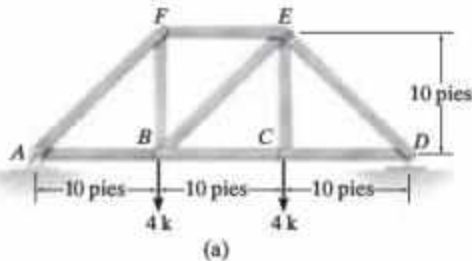
- Use el método de las secciones o el método de los nudos para determinar la fuerza N en cada elemento. Estas fuerzas son causadas únicamente por las cargas reales que actúan sobre la armadura. Una vez más, suponga que las fuerzas de tensión son positivas y que las fuerzas de compresión son negativas.

Ecuación del trabajo virtual

- Aplique la ecuación del trabajo virtual, para determinar el desplazamiento deseado. Es importante conservar el signo algebraico de cada una de las fuerzas n y N correspondientes al sustituir estos términos en la ecuación.
- Si la sumatoria resultante $\Sigma nNL/AE$ es positiva, el desplazamiento Δ tiene la misma dirección que la carga unitaria. Si se obtiene un valor negativo, Δ es opuesto a la carga unitaria.
- Al aplicar $1 \cdot \Delta = \Sigma n \alpha \Delta T L$, tenga en cuenta de que si alguno de los elementos experimenta un *aumento de temperatura*, ΔT será *positivo*, en tanto que una *disminución de la temperatura* resultará en un valor *negativo* para ΔT .
- Para que $1 \cdot \Delta = \Sigma n \Delta L$, cuando un error de fabricación *aumenta la longitud* de un elemento, ΔL es *positiva*, en tanto que una *disminución de la longitud* es *negativa*.
- Al aplicar cualquier fórmula debe prestarse atención a las unidades de cada cantidad numérica. En particular, a la carga unitaria virtual puede asignársele cualquier unidad arbitraria (lb, kip, N, etc.), puesto que las fuerzas n tendrán estas *mismas unidades*, y en consecuencia las unidades, tanto de la carga unitaria virtual como de las fuerzas n se cancelarán a ambos lados de la ecuación.

EJEMPLO 9.1

Determine el desplazamiento vertical de la junta C de la armadura de acero que se muestra en la figura 9-8a. El área de la sección transversal de cada elemento es $A = 0.5 \text{ pulg}^2$ y $E = 29(10^3) \text{ ksi}$.

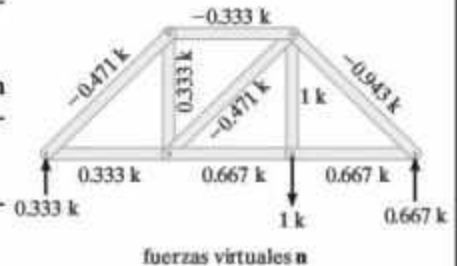
**SOLUCIÓN**

Fuerzas virtuales n . Sólo se coloca una carga vertical de 1 k en la junta C y la fuerza en cada elemento se calcula aplicando el método de los nudos. Los resultados se muestran en la figura 9-8b. Los números positivos indican fuerzas de tensión y los números negativos indican fuerzas de compresión.

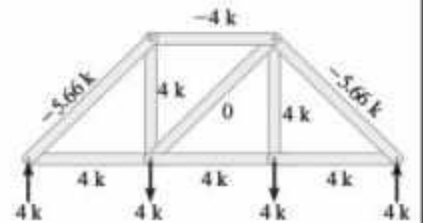
Fuerzas reales N . Las fuerzas reales en los elementos se calculan usando el método de los nudos. Los resultados se muestran en la figura 9-8c.

Ecuación del trabajo virtual. Al disponer los datos en forma tabular, se tiene

Elemento	n (k)	N (k)	L (pies)	nNL ($\text{k}^2 \cdot \text{pie}$)
AB	0.333	4	10	13.33
BC	0.667	4	10	26.67
CD	0.667	4	10	26.67
DE	-0.943	-5.66	14.14	75.42
FE	-0.333	-4	10	13.33
EB	-0.471	0	14.14	0
BF	0.333	4	10	13.33
AF	-0.471	-5.66	14.14	37.71
CE	1	4	10	40
				$\Sigma 246.47$



(b)



(c)

Figura 9-8

$$\text{Entonces, } 1 \text{ k} \cdot \Delta_{C_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{246.47 \text{ k}^2 \cdot \text{pie}}{AE}$$

Si se convierten las unidades de longitud del elemento a pulgadas y se sustituyen los valores numéricos de A y E , resulta

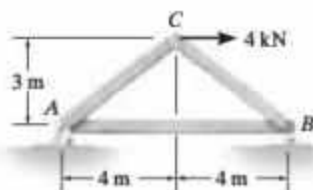
$$1 \text{ k} \cdot \Delta_{C_v} = \frac{(246.47 \text{ k}^2 \cdot \text{pie})(12 \text{ pulg/pie})}{(0.5 \text{ pulg}^2)(29(10^3) \text{ k/pulg}^2)}$$

$$\Delta_{C_v} = 0.204 \text{ pulg}$$

Resp.

EJEMPLO 9.2

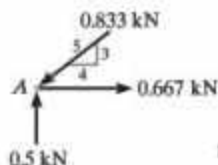
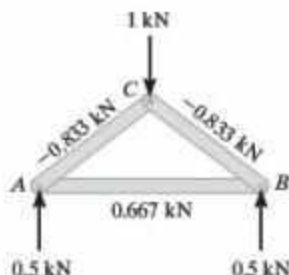
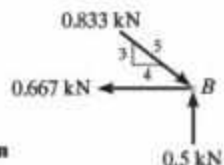
El área de la sección transversal de cada elemento de la armadura que se muestra en la figura 9-9a es $A = 400 \text{ mm}^2$ y $E = 200 \text{ GPa}$. (a) Determine el desplazamiento vertical de la junta C si se aplica una fuerza de 4 kN sobre la armadura en C . (b) Si ninguna carga actúa sobre la viga, ¿cuál sería el desplazamiento vertical de la junta C si el elemento AB fuera 5 mm más corto de lo esperado?



(a)

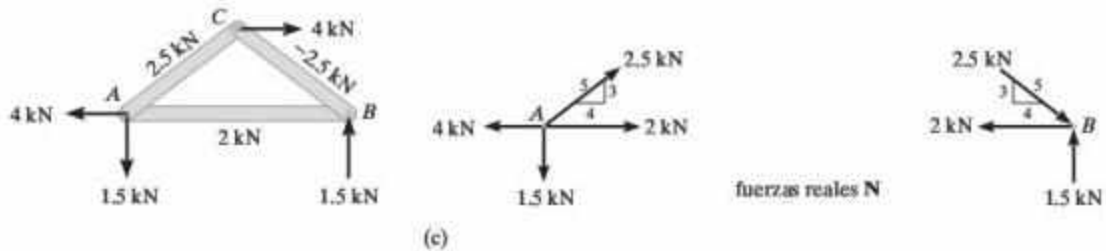
Figura 9-9**SOLUCIÓN****Inciso (a)**

Fuerzas virtuales n . Dado que debe determinarse el *desplazamiento vertical* de la junta C , se aplica una fuerza virtual de 1 kN en C con dirección vertical. Las unidades de esta fuerza son las *mismas* que las de la carga real. Se calculan las reacciones en los soportes A y B y después se determina la fuerza N en cada elemento por el método de los nudos, como se muestra en los diagramas de cuerpo libre de las juntas A y B , figura 9-9b.

fuerzas virtuales n 

(b)

Fuerzas reales N . En la figura 9-9c se muestra el análisis de las juntas A y B cuando se aplica la carga real de 4 kN sobre la armadura.



Ecuación del trabajo virtual. Como AE es constante, cada uno de los términos nNL puede calcularse y disponerse en forma tabular. Aquí los números positivos indican fuerzas de tensión y los números negativos indican fuerzas de compresión.

Elemento	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN ² ·m)
AB	0.667	2	8	10.67
AC	-0.833	2.5	5	-10.41
CB	-0.833	-2.5	5	10.41
				$\Sigma 10.67$

Por lo tanto,

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{C_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{10.67 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}}{AE}$$

Al sustituir los valores $A = 400 \text{ mm}^2 = 400 (10^{-6}) \text{ m}^2$, $E = 200 \text{ GPa} = 200 (10^6) \text{ kN/m}^2$, se tiene

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{C_v} = \frac{10.67 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}}{400(10^{-6}) \text{ m}^2 (200(10^6) \text{ kN/m}^2)}$$

$$\Delta_{C_v} = 0.000133 \text{ m} = 0.133 \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

Inciso (b). Aquí debe aplicarse la ecuación 9-17. Como se desea determinar el desplazamiento vertical de C , pueden usarse los resultados de la figura 9-7b. Sólo el elemento AB experimenta un cambio en su longitud, esto es, de $\Delta L = -0.005 \text{ m}$. Entonces,

$$1 \cdot \Delta = \sum n \Delta L$$

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{C_v} = (0.667 \text{ kN})(-0.005 \text{ m})$$

$$\Delta_{C_v} = -0.00333 \text{ m} = -3.33 \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

El signo negativo indica que la junta C se desplaza *hacia arriba*, en forma opuesta a la carga vertical de 1 kN. Observe que si se toman en cuenta la carga de 4 kN y el error de fabricación, el desplazamiento resultante es $\Delta_{C_v} = 0.133 - 3.33 = -3.20 \text{ mm}$ (hacia arriba).

EJEMPLO 9.3

Determine el desplazamiento vertical de la junta C de la armadura que se muestra en la figura 9-10a. Debido al calor radiante de la pared, el elemento AD está sometido a un *aumento* en la temperatura de $\Delta T = +120^\circ\text{F}$. Considere que $\alpha = 0.6(10^{-5})/^\circ\text{F}$ y que $E = 29(10^3)$ ksi. El área de la sección transversal de cada elemento se indica en la figura.

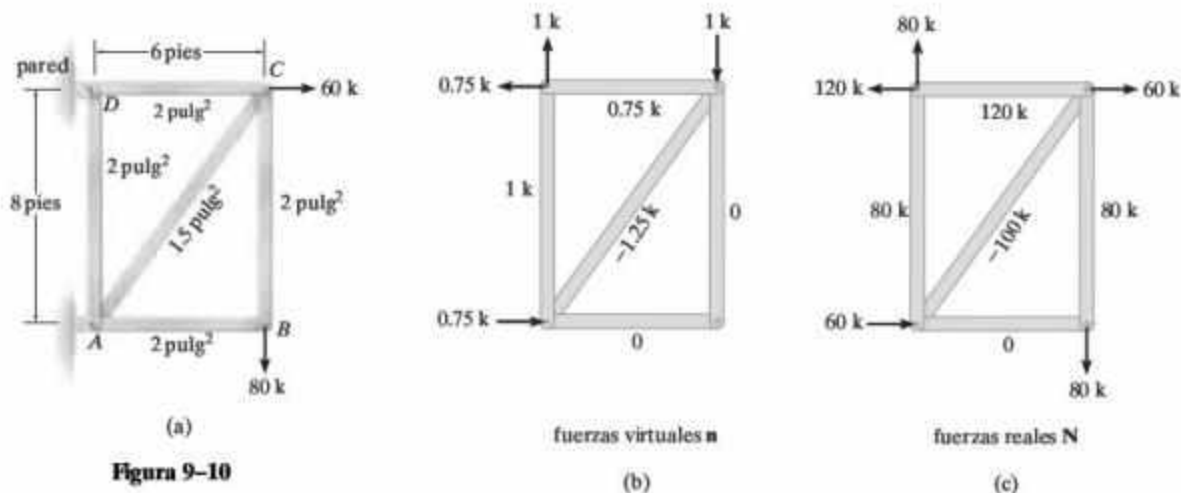


Figura 9-10

SOLUCIÓN

Fuerzas virtuales n . Se aplica una carga *vertical* de 1 k sobre la armadura en la junta C y se calculan las fuerzas en los elementos, figura 9-10b.

Fuerzas reales N . Como las fuerzas n en los elementos AB y BC son iguales a *cero*, no es necesario calcular las fuerzas N en esos elementos. ¿Por qué? Sin embargo, con el propósito de completar el método, en la figura 9-10c se muestra el análisis de todas las fuerzas reales.

Ecuación del trabajo virtual. Tanto las cargas como la temperatura afectan la deformación; por lo tanto, las ecuaciones 9-15 y 9-16 se combinan. Si se emplean unidades de kips y pulgadas, resulta

$$\begin{aligned}
 1 \cdot \Delta_{C_v} &= \sum \frac{nNL}{AE} + \sum n\alpha \Delta T L \\
 &= \frac{(0.75)(120)(6)(12)}{2[29(10^3)]} + \frac{(1)(80)(8)(12)}{2[29(10^3)]} \\
 &\quad + \frac{(-1.25)(-100)(10)(12)}{1.5[29(10^3)]} + (1)[0.6(10^{-5})](120)(8)(12)
 \end{aligned}$$

$$\Delta_{C_v} = 0.658 \text{ pulg}$$

Resp.

9.5 Teorema de Castigliano

En 1879, Alberto Castigliano, ingeniero italiano de ferrocarriles, publicó un libro en el que exponía un método para determinar la deflexión o la pendiente en un punto en una estructura, en una armadura, una viga o un marco. Este método, conocido como el *segundo teorema de Castigliano*, o el *método del trabajo mínimo*, sólo aplica a las estructuras que tienen una temperatura constante, soportes que no ceden y respuesta material *elástica lineal*. Si debe determinarse el desplazamiento de un punto, el teorema establece que éste es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación en la estructura con respecto a una fuerza que actúa en el punto y en la dirección del desplazamiento. De una manera parecida, la pendiente en un punto de una estructura es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación en la estructura con respecto a un momento de par que actúa en el punto y con la dirección de la rotación.

Para obtener el segundo teorema de Castigliano, considere un cuerpo (estructura) de cualquier forma arbitraria que está sometido a una serie de n fuerzas P_1, P_2, \dots, P_n . Como el trabajo externo realizado por estas cargas es igual a la energía de deformación interna almacenada en el cuerpo, puede escribirse

$$U_i = U_e$$

El trabajo externo es una función de las cargas externas ($U_e = \Sigma \int P dx$). Por lo tanto,

$$U_i = U_e = f(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

Ahora bien, si cualquiera de las fuerzas, por ejemplo P_i , se incrementa en una cantidad diferencial dP_i , el trabajo interno también aumenta de modo que la nueva energía de deformación se convierte en

$$U_i + dU_i = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_i} dP_i \quad (9-18)$$

Sin embargo, este valor no debe depender de la secuencia en la que estas n fuerzas se aplican al cuerpo. Por ejemplo, si *primero* se aplica dP_i al cuerpo, esto hará que el cuerpo se desplace una cantidad diferencial $d\Delta_i$ en la dirección de dP_i . Por la ecuación 9-3 ($U_e = \frac{1}{2} P \Delta$), el incremento de la energía de deformación sería $\frac{1}{2} dP_i d\Delta_i$. Sin embargo, esta cantidad es un diferencial de segundo orden y puede pasarse por alto. Una aplicación posterior de las cargas P_1, P_2, \dots, P_n que desplazaría al cuerpo $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ produciría la siguiente energía de deformación.

$$U_i + dU_i = U_i + dP_i \Delta_i \quad (9-19)$$

Aquí, como antes, U_i es la energía de deformación interna en el cuerpo, causada por las cargas P_1, P_2, \dots, P_n y $dU_i = dP_i \Delta_i$ es la energía de deformación *adicional* causada por dP_i (ecuación 9-4, $U_e = P \Delta'$).

En resumen, la ecuación 9-18 representa la energía de deformación en el cuerpo, determinada al aplicar primero las cargas P_1, P_2, \dots, P_n , después dP_i , y la ecuación 9-19 representa la energía de deformación determinada al

aplicar primero dP_i y luego las cargas P_1, P_2, \dots, P_n . Como estas dos ecuaciones deben ser iguales, se requiere que

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial P_i} \quad (9-20)$$

lo que demuestra el teorema; es decir, el desplazamiento Δ_i en la dirección de P_i es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación con respecto a P_i .*

Debe señalarse que la ecuación 9-20 es un enunciado acerca de la *compatibilidad de la estructura*. Además, la deducción anterior exige que en el análisis *sólo* se consideren las *fuerzas conservadoras*. Estas fuerzas realizan trabajo que es independiente de la trayectoria y por lo tanto no crean pérdidas de energía. Como las fuerzas que causan una respuesta lineal elástica son conservadoras, el teorema se limita a un *comportamiento lineal elástico* del material. Esto constituye una diferencia con el método de la fuerza virtual analizado en la sección anterior, que se aplica tanto al comportamiento elástico como al no elástico.

9.6 Teorema de Castigliano para armaduras

La energía de deformación para un elemento de una armadura está dada por la ecuación 9-9, $U_i = N^2 L / 2AE$. Al sustituir esta ecuación en la ecuación 9-20 y si se omite el subíndice i , resulta

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P} \sum \frac{N^2 L}{2AE}$$

Por lo general es más fácil realizar la diferenciación antes de la sumatoria. En el caso general L , A y E son constantes para un elemento dado, y por lo tanto puede escribirse así

$$\Delta = \sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} \quad (9-21)$$

donde

Δ = desplazamiento de la junta externa de la armadura.

P = fuerza externa aplicada a la junta de la armadura en la dirección de Δ .

N = fuerza interna en un elemento causada *tanto* por la fuerza P como por las cargas sobre la armadura.

L = longitud de un elemento.

A = área de la sección transversal de un elemento.

E = módulo de elasticidad de un elemento.

*El primer teorema de Castigliano es parecido a su segundo teorema; sin embargo, relaciona la carga P_i con la derivada parcial de la energía de deformación respecto al desplazamiento correspondiente, es decir $P_i = \partial U_i / \partial \Delta_i$. La comprobación es parecida a la dada anteriormente y, como el método del desplazamiento virtual, el primer teorema de Castigliano se aplica tanto al comportamiento material elástico como al no elástico. Este teorema es otra manera de expresar los *requisitos de equilibrio* para una estructura y, puesto que tiene un uso muy limitado en el análisis estructural, no se analiza en este libro.

Esta ecuación es semejante a la que se utiliza en el método del trabajo virtual, ecuación 9-15 ($1 \cdot \Delta = \sum nNL/AE$), excepto que n se sustituye por $\partial N/\partial P$. Observe que con el fin de determinar esta derivada parcial será necesario tratar P como una *variable* (no una cantidad numérica específica) y, además, cada elemento de la fuerza N debe expresarse en función de P . En consecuencia, el cálculo de $\partial N/\partial P$ generalmente requiere un poco más de operaciones que las necesarias para calcular cada fuerza n de manera directa. Por supuesto, estos términos serán iguales porque n o $\partial N/\partial P$ es simplemente el cambio de la fuerza interna del elemento con respecto a la carga P , o el cambio en la fuerza del elemento por carga unitaria.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede utilizarse para determinar el desplazamiento de cualquier junta de una armadura usando el teorema de Castigliano.

Fuerza externa P

- Coloque una fuerza P sobre la armadura en la junta donde se desea determinar el desplazamiento. Se supone que esta fuerza tiene una *magnitud variable* con el fin de obtener el cambio $\partial N/\partial P$. Asegúrese de que P esté dirigida a lo largo de la línea de acción del desplazamiento.

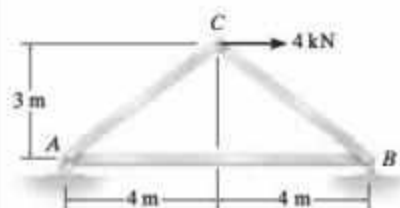
Fuerzas internas N

- Determine la fuerza N en cada elemento causada tanto por las cargas reales (numéricas) como por la fuerza variable P . Suponga que las fuerzas de tensión son positivas y que las de compresión son negativas.
- Calcule las derivadas parciales respectivas $\partial N/\partial P$ para cada elemento.
- Después de determinar N y $\partial N/\partial P$, asigne a P su valor numérico si ha reemplazado una fuerza real sobre la armadura. De lo contrario, considere que P es igual a cero.

Teorema de Castigliano

- Aplique el teorema de Castigliano para determinar el desplazamiento Δ deseado. Es importante conservar los signos algebraicos para los valores correspondientes de N y $\partial N/\partial P$ al sustituir estos términos en la ecuación.
- Si la sumatoria resultante $\sum (\partial N/\partial P)L/AE$ es positiva, Δ tiene la misma dirección que P . Si se obtiene un valor negativo, Δ es opuesto a P .

EJEMPLO 9.4



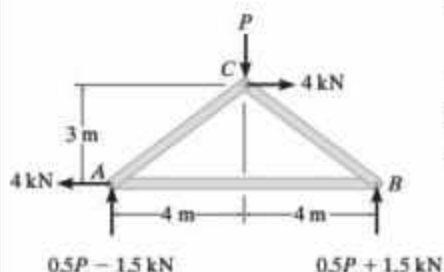
(a)

Determine el desplazamiento vertical de la junta C de la armadura que se muestra en la figura 9-11a. El área de la sección transversal de cada elemento es $A = 400 \text{ mm}^2$ y $E = 200 \text{ GPa}$.

SOLUCIÓN

Fuerza externa P . Se aplica una fuerza vertical P sobre la armadura en la junta C , puesto que es donde debe determinarse el desplazamiento vertical, figura 9-11b.

Fuerzas internas N . Se determinan las reacciones en los soportes A y B de la armadura y los resultados se muestran en la figura 9-11b. Utilizando el método de los nudos, se determinan las fuerzas N en cada elemento, figura 9-11c.* Por conveniencia, estos resultados junto con las derivadas parciales $\partial N / \partial P$ se enuncian en forma tabular de la siguiente manera:



(b)

Elemento	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N (P = 0)$	L	$N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) L$
AB	$0.667P + 2$	0.667	2	8	10.67
AC	$-(0.833P - 2.5)$	-0.833	2.5	5	-10.42
BC	$-(0.833P + 2.5)$	-0.833	-2.5	5	10.42
					$\Sigma = 10.67 \text{ kN} \cdot \text{m}$

En vista de que P en realidad no existe como una carga real sobre la armadura, se requiere que $P = 0$ en la tabla anterior.

Teorema de Castigliano. Al aplicar la ecuación 9-21, se tiene

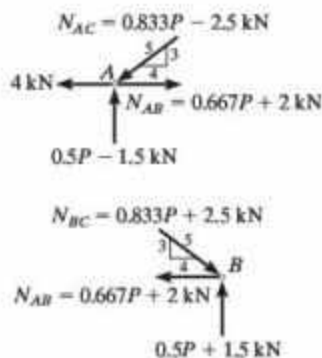
$$\Delta_{C_v} = \sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} = \frac{10.67 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE}$$

Si se sustituye $A = 400 \text{ mm}^2 = 400(10^{-6}) \text{ m}^2$, $E = 200 \text{ GPa} = 200(10^9) \text{ Pa}$, y las unidades de N se convierten de kN a N, se tiene

$$\Delta_{C_v} = \frac{10.67(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}}{400(10^{-6}) \text{ m}^2 (200(10^9) \text{ N/m}^2)} = 0.000133 \text{ m} = 0.133 \text{ mm}$$

Resp.

Esta solución debe compararse con el método del trabajo virtual del ejemplo 9-2.



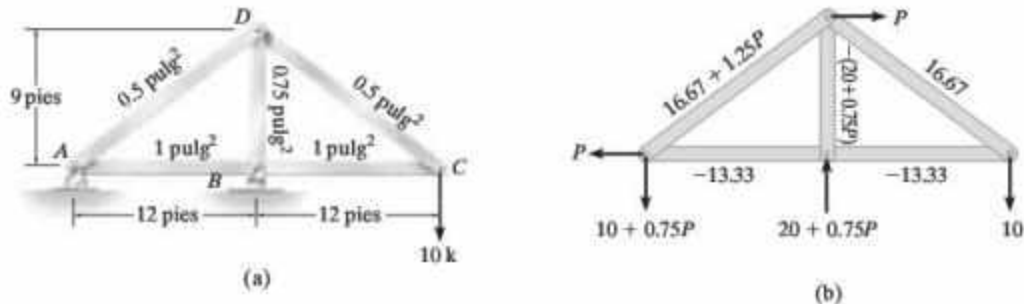
(c)

Figura 9-11

*Quizá sea más conveniente analizar la armadura sólo con la carga de 4 kN sobre ella, y luego analizar la armadura con la carga P . De este modo pueden sumarse los resultados para obtener las fuerzas N .

EJEMPLO 9.5

Determine el desplazamiento horizontal de la junta D de la armadura que se muestra en la figura 9-17a. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi. El área de la sección transversal de cada elemento se indica en la figura.

**Figura 9-12****SOLUCIÓN**

Fuerza externa P . Como debe determinarse el desplazamiento horizontal de D , se aplica una fuerza variable horizontal P a la junta D , figura 9-12b.

Fuerzas internas N . Aplicando el método de los nudos, se calcula la fuerza N en cada elemento.* Una vez más, al aplicar la ecuación 9-21, se establece $P = 0$ porque esta fuerza no existe realmente sobre la armadura. Los resultados se muestran en la figura 9-12b. Al disponer los datos en forma tabular, se tiene

Elemento	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N (P = 0)$	L	$N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) L$
AB	-13.33	0	-13.33	12	0
BC	-13.33	0	-13.33	12	0
CD	16.67	0	16.67	15	0
DA	$16.67 + 1.25P$	1.25	16.67	15	312.50
BD	$-(20 + 0.75P)$	-0.75	-20	9	135.00

Teorema de Castigliano. Al aplicar la ecuación 9-21, se tiene

$$\Delta_{D_h} = \sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} = 0 + 0 + 0 + \frac{312.50 \text{ k} \cdot \text{pie} (12 \text{ pulg/pie})}{(0.5 \text{ pulg}^2) [29(10^3) \text{ k/pulg}^2]} + \frac{135.00 \text{ k} \cdot \text{pie} (12 \text{ pulg/pie})}{(0.75 \text{ pulg}^2) [29(10^3) \text{ k/pulg}^2]}$$

Resp.

$$= 0.333 \text{ pulg}$$

*Como en el ejemplo anterior, quizá lo recomendable sea realizar un análisis por separado de la armadura cargada con 10 k y cargada con P , para después superponer los resultados.

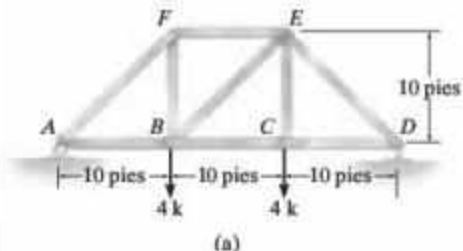
EJEMPLO 9.6

Determine el desplazamiento vertical de la junta C de la armadura que se muestra en la figura 9-13a. Suponga que $A = 0.5 \text{ pulg}^2$ y que $E = 29 (10^3) \text{ ksi}$.

SOLUCIÓN

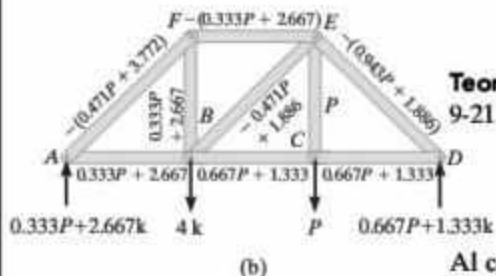
Fuerza externa P . La fuerza de 4 k en C se sustituye por una fuerza variable P en la junta C , figura 9-13b.

Fuerzas internas N . Se usa el método de los nudos para determinar la fuerza N en cada elemento de la armadura. Los resultados se resumen en la figura 9-13b. Aquí, $P = 4 \text{ k}$ cuando se aplica la ecuación 9-21. Los datos requeridos pueden disponerse en forma tabular de la siguiente manera:



Elemento	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N (P = 4 \text{ k})$	L	$N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) L$
AB	$0.333P + 2.667$	0.333	4	10	13.33
BC	$0.667P + 1.333$	0.667	4	10	26.67
CD	$0.667P + 1.333$	0.667	4	10	26.67
DE	$-(0.943P + 1.886)$	-0.943	-5.66	14.14	75.42
EF	$-(0.333P + 2.667)$	-0.333	-4	10	13.33
FA	$-(0.471P + 3.771)$	-0.471	-5.66	14.14	37.71
BF	$0.333P + 2.667$	0.333	4	10	13.33
BE	$-0.471P + 1.886$	-0.471	0	14.14	0
CE	P	1	4	10	40

$$\Sigma = 246.47 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

**Figura 9-13**

Teorema de Castigliano. Si se sustituyen los datos en la ecuación 9-21, resulta

$$\Delta_{C_v} = \sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} = \frac{246.47 \text{ k} \cdot \text{pie}}{AE}$$

Al convertir las unidades de longitud del elemento en pulgadas y al sustituir el valor numérico de AE , se tiene

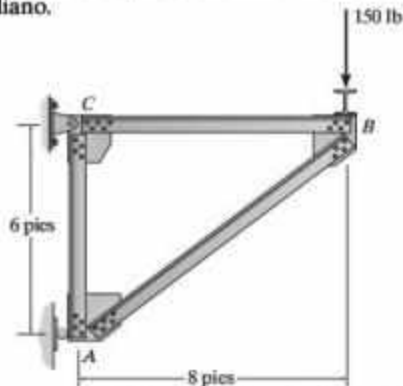
$$\Delta_{C_v} = \frac{(246.47 \text{ k} \cdot \text{pie})(12 \text{ pulg/pie})}{(0.5 \text{ pulg}^2)(29(10^3) \text{ k/pulg}^2)} = 0.204 \text{ pulg} \quad \text{Resp.}$$

Debe observarse la semejanza entre esta solución y la del método del trabajo virtual, ejemplo 9-1.

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F9-1. Determine el desplazamiento vertical de la junta B . AE es constante. Use el principio del trabajo virtual.

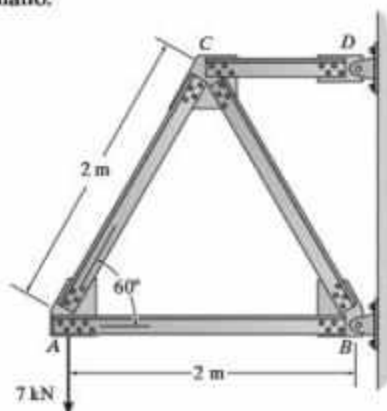
F9-2. Resuelva el problema F9-1 usando el teorema de Castigliano.



F9-1/9-2

F9-3. Determine el desplazamiento horizontal de la junta A . AE es constante. Use el principio del trabajo virtual.

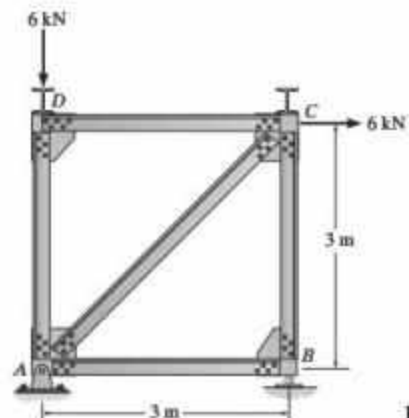
F9-4. Resuelva el problema F9-3 usando el teorema de Castigliano.



F9-3/9-4

F9-5. Determine el desplazamiento horizontal de la junta D . AE es constante. Use el principio del trabajo virtual.

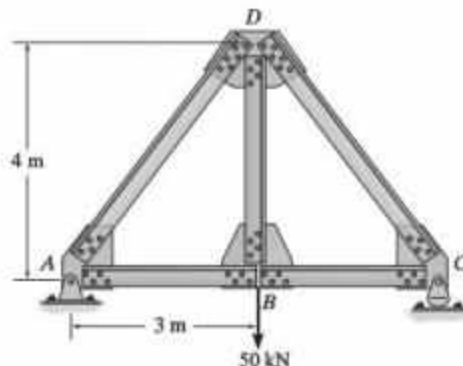
F9-6. Resuelva el problema F9-5 usando el teorema de Castigliano.



F9-5/9-6

F9-7. Determine el desplazamiento vertical de la junta D . AE es constante. Utilice el principio del trabajo virtual.

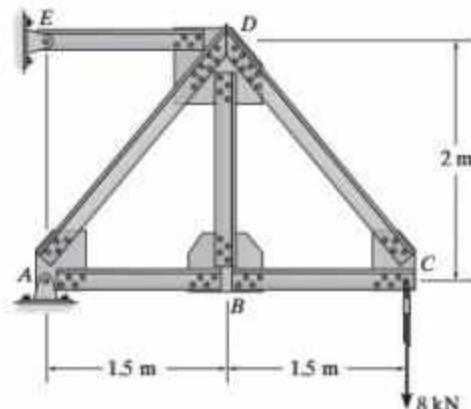
F9-8. Resuelva el problema F9-7 usando el teorema de Castigliano.



F9-7/9-8

F9-9. Determine el desplazamiento vertical de la junta B . AE es constante. Utilice el principio del trabajo virtual.

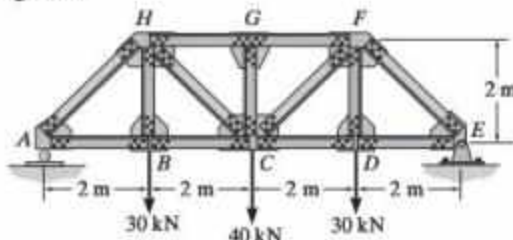
F9-10. Resuelva el problema F9-9 usando el teorema de Castigliano.



F9-9/9-10

F9-11. Determine el desplazamiento vertical de la junta C . AE es constante. Use el principio del trabajo virtual.

F9-12. Resuelva el problema F9-11 usando el teorema de Castigliano.

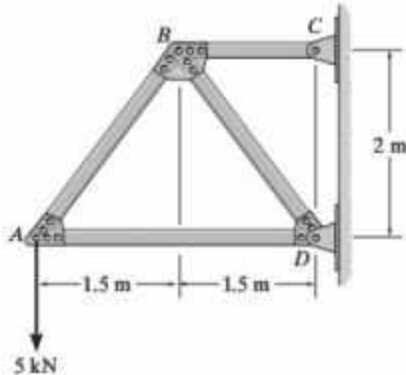


F9-11/9-12

PROBLEMAS

9-1. Determine el desplazamiento vertical de la junta A . Cada barra está hecha de acero y tiene un área en su sección transversal de 600 mm^2 . Considere que $E = 200 \text{ GPa}$. Use el método del trabajo virtual.

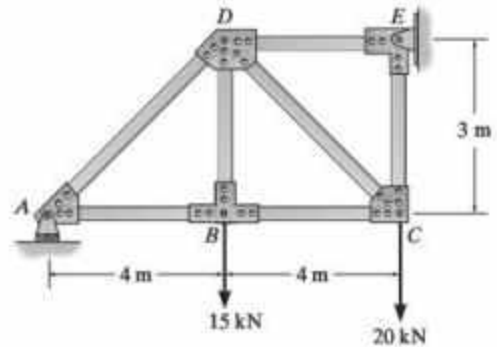
9-2. Resuelva el problema 9-1 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-1/9-2

9-7. Determine el desplazamiento vertical de la junta D . Use el método del trabajo virtual. AE es constante. Suponga que los elementos están articulados en sus extremos.

***9-8.** Resuelva el problema 9-7 usando el teorema de Castigliano.



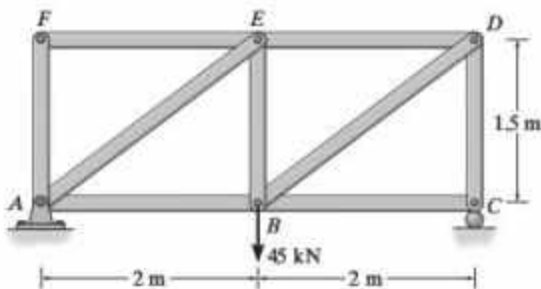
Probs. 9-7/9-8

9-3. Determine el desplazamiento vertical de la junta B . Para cada elemento $A = 400 \text{ mm}^2$, $E = 200 \text{ GPa}$. Use el método del trabajo virtual.

***9-4.** Resuelva el problema 9-3 usando el teorema de Castigliano.

9-5. Determine el desplazamiento vertical de la junta E . Para cada elemento $A = 400 \text{ mm}^2$, $E = 200 \text{ GPa}$. Use el método del trabajo virtual.

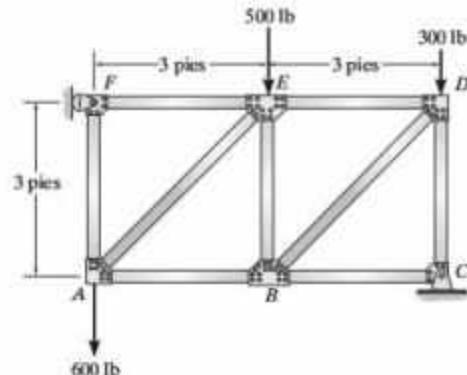
9-6. Resuelva el problema 9-5 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-3/9-4/9-5/9-6

9-9. Use el método del trabajo virtual.

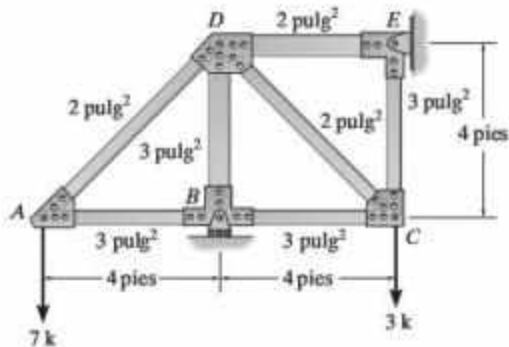
9-10. Resuelva el problema 9-9 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-9/9-10

9-11. Determine el desplazamiento vertical de la junta A . El área de la sección transversal de cada elemento se indica en la figura. Suponga que los elementos están articulados en sus extremos. $E = 29(10^3)$ ksi. Use el método del trabajo virtual.

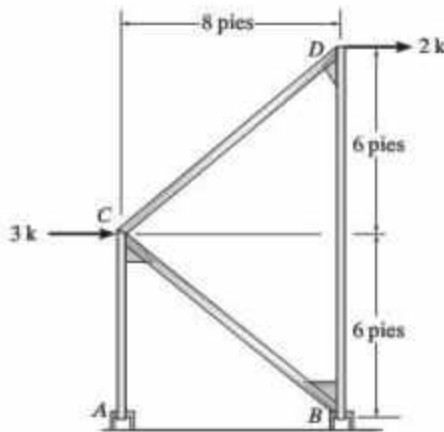
***9-12.** Resuelva el problema 9-11 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-11/9-12

9-13. Determine el desplazamiento horizontal de la junta D . Suponga que los elementos están articulados en sus extremos. AE es constante. Use el método del trabajo virtual.

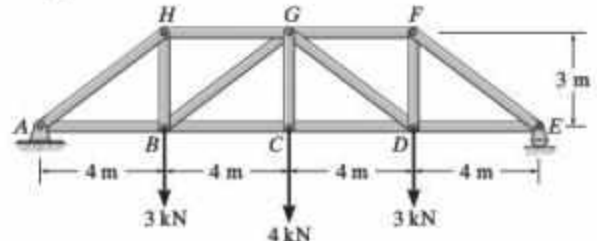
9-14. Resuelva el problema 9-13 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-13/9-14

9-15. Determine el desplazamiento vertical de la junta C de la armadura. Cada elemento tiene un área en su sección transversal de $A = 300 \text{ mm}^2$, $E = 200 \text{ GPa}$. Use el método del trabajo virtual.

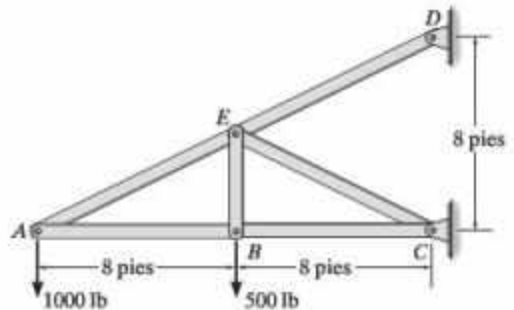
***9-16.** Resuelva el problema 9-15 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-15/9-16

9-17. Determine el desplazamiento vertical de la junta A . Suponga que los elementos están articulados en sus extremos. Considere que $A = 2 \text{ pulg}^2$ y $E = 29(10^3)$ para cada elemento. Use el método del trabajo virtual.

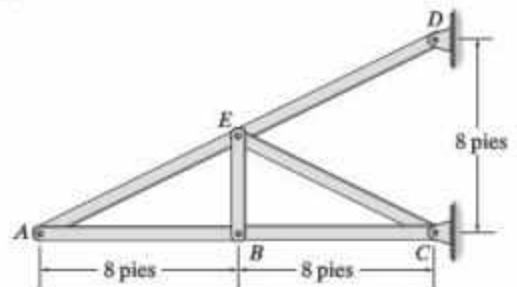
9-18. Resuelva el problema 9-17 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-17/9-18

9-19. Determine el desplazamiento vertical de la junta A si los elementos AB y BC experimentan un aumento de la temperatura de $\Delta T = 200^\circ\text{F}$. Considere que $A = 2 \text{ pulg}^2$ y $E = 29(10^3)$ ksi. Además, $\alpha = 6.60(10^{-6})/^\circ\text{F}$.

***9-20.** Determine el desplazamiento vertical de la junta A si el elemento AE se fabrica 0.5 pulgadas más corto de lo esperado.



Probs. 9-19/9-20

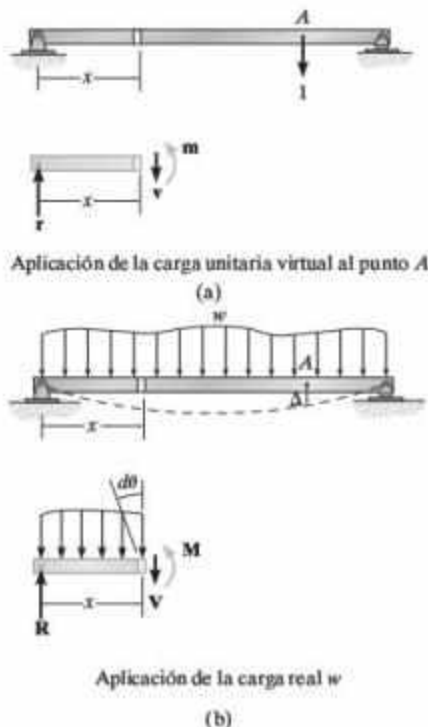


Figura 9-14

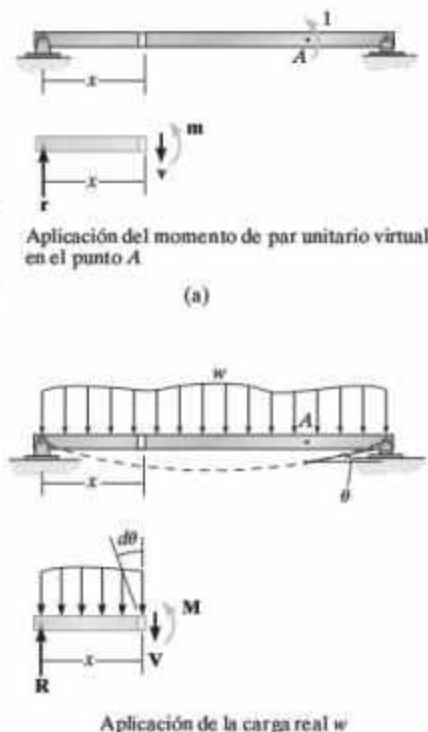


Figura 9-15

9.7 Método del trabajo virtual: Vigas y marcos

El método del trabajo virtual también puede aplicarse a los problemas de deflexión en vigas y marcos. Como las deformaciones debidas a la *flexión* son la *causa principal* de las deflexiones en vigas o marcos, primero se analizarán sus efectos. Las deflexiones debidas a las cargas cortantes, axiales y de torsión, así como a la temperatura, se considerarán en la sección 9-8.

El principio del trabajo virtual o, más exactamente, el método de la fuerza virtual, puede formularse para deflexiones en vigas y marcos al considerar la viga que se muestra en la figura 9-14b. Aquí debe determinarse el desplazamiento Δ de un punto A. Para calcular Δ se coloca una carga virtual unitaria que actúa en la dirección de Δ sobre la viga en A, y el *momento virtual interno* m se determina mediante el método de las secciones en una ubicación arbitraria x medida desde el soporte de la izquierda, figura 9-14a. Cuando las cargas reales actúan sobre la viga, figura 9-14b, el punto A se desplaza Δ . Siempre que estas cargas causen una *respuesta material elástica lineal*, entonces con base en la ecuación 8-2, el elemento dx se deforma o gira $d\theta = (M/EI)dx$.^{*} Aquí M es el momento interno en x causado por las cargas reales. En consecuencia, el *trabajo virtual externo* realizado por la carga unitaria es $1 \cdot \Delta$, y el *trabajo virtual interno* realizado por el momento m es $m d\theta = m(M/EI) dx$. La sumatoria de los efectos sobre todos los elementos dx a lo largo de la viga requiere una integración y, por lo tanto, la ecuación 9-13 se convierte en

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx \quad (9-22)$$

donde

1 = carga unitaria virtual externa que actúa sobre la viga o el marco en la dirección de Δ .

m = momento virtual interno en la viga o el marco, expresado como una función de x y que es causado por la carga unitaria virtual externa.

Δ = desplazamiento externo del punto causado por las cargas reales que actúan sobre la viga o el marco.

M = momento interno en la viga o el marco, expresado como una función de x y que es causado por las cargas reales.

E = módulo de elasticidad del material.

I = momento de inercia del área transversal, calculado con respecto al eje neutro.

De una manera semejante, si debe determinarse la rotación de la tangente o el ángulo θ de la pendiente en un punto A de la curva elástica de la viga, figura 9-15, se aplica primero un momento de par unitario en el punto, y se determinan los momentos internos correspondientes m_θ . Como el trabajo del par unitario es $1 \cdot \theta$, entonces

$$1 \cdot \theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx \quad (9-23)$$

^{*}Recuerde que si el material se deforma más allá de su límite elástico, todavía puede aplicarse el principio del trabajo virtual, aun cuando en este caso debe emplearse un análisis no lineal o plástico.

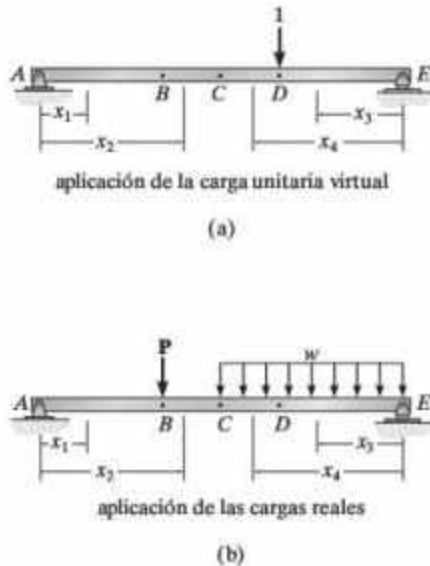


Figura 9-16

Al aplicar las ecuaciones 9-22 y 9-23, es importante tener en cuenta que las integrales definitivas al lado derecho representan en realidad la cantidad de energía de deformación virtual que está *almacenada* en la viga. Si sobre la viga actúan fuerzas concentradas o momentos de par o si la carga distribuida es discontinua, no se puede realizar sólo una integración a través de toda la longitud de la viga. En vez de esto deberán elegirse coordenadas x separadas dentro de las regiones que no tienen discontinuidad de carga. Además, no es necesario que cada x tenga el mismo origen; sin embargo, la x seleccionada para determinar el momento M real en una región particular debe ser la *misma* x que la seleccionada para determinar el momento virtual m o m_θ dentro de la misma región. Por ejemplo, considere la viga de la figura 9-16. Para determinar el desplazamiento de D deben considerarse cuatro regiones de la viga, y por lo tanto, deben evaluarse cuatro integrales que contengan la forma $\int (mM/EI) dx$. Es posible usar x_1 para determinar la energía de deformación en la región AB , x_2 para la región BC , x_3 para la región DE y x_4 para la región DC . En cualquier caso, cada coordenada x debe seleccionarse de modo que M y m (o m_θ) se puedan formular con facilidad.

Integración utilizando tablas. Cuando la estructura está sometida a una carga relativamente simple y que aún así la solución para un desplazamiento requiere varias integraciones, puede usarse un *método tabular* para realizar estas integraciones. En este método, primero se dibujan los diagramas de momento para cada elemento, tanto para las cargas reales como virtuales. Al relacionar estos diagramas para m y M con los indicados en la tabla de la portada interior, se puede determinar la integral $\int mM dx$ con base en la fórmula apropiada. Los ejemplos 9-8 y 9-10 ilustran la aplicación de este método.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento puede usarse para determinar el desplazamiento y/o la pendiente en un punto de la curva elástica de una viga o un marco mediante el método del trabajo virtual.

Momentos virtuales m o m_θ

- Coloque una *carga unitaria* sobre la viga o marco en el punto y en la dirección del *desplazamiento deseado*.
- Si debe determinarse la *pendiente*, coloque un *momento de par unitario* en el punto.
- Establezca las coordenadas x apropiadas que son válidas dentro de las regiones de la viga o el marco donde no haya discontinuidad de la carga real o virtual.
- Con la carga virtual en su sitio y todas las cargas reales *removidas* de la viga o el marco, calcule el momento interno m o m_θ como una función de cada coordenada x .
- Suponga que m o m_θ actúan en la dirección positiva convencional, según se indica en la figura 4-1.

Momentos reales

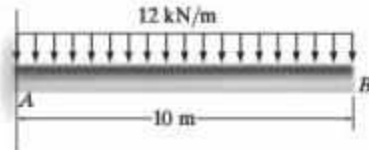
- Usando las *mismas* coordenadas x que las establecidas para m o m_θ , determine los momentos internos M causados sólo por las cargas reales.
- Debido a que se supone que m o m_θ actúan en la dirección positiva convencional, es importante que M *positivo* actúe en la *misma* dirección. Esto es necesario porque el trabajo interno positivo o negativo depende del sentido direccional de la carga (definido por $\pm m$ o $\pm m_\theta$) y el desplazamiento (definido por $\pm M dx/EI$).

Ecuación del trabajo virtual

- Aplique la ecuación del trabajo virtual para determinar el desplazamiento deseado Δ o la rotación θ . Es importante conservar el signo algebraico de cada integral calculada dentro de su región específica.
- Si la suma algebraica de todas las integrales para toda la viga o marco es positiva, Δ o θ tienen la misma dirección que la carga unitaria virtual o el momento de par unitario, respectivamente. Si se obtiene un valor negativo, la dirección de Δ o θ es opuesta a la de la carga unitaria o el momento de par unitario.

EJEMPLO 9.7

Determine el desplazamiento del punto B de la viga de acero que se muestra en la figura 9.17a. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 500(10^6) \text{ mm}^4$.



(a)

SOLUCIÓN

Momento virtual m . El desplazamiento vertical del punto B se obtiene al colocar una carga virtual unitaria de 1 kN en B , figura 9-17b. Por inspección se observa que no hay discontinuidades de carga en la viga, tanto para las cargas reales como para las virtuales. Así, puede usarse una sola coordenada x para determinar la energía de deformación virtual. Esta coordenada se seleccionará con origen en B , porque de ese modo no habrá necesidad de determinar las reacciones en A con el fin de encontrar los momentos internos m y M . Usando el método de las secciones, el momento interno m se formula de la manera que se muestra en la figura 9-17b.

Momento real M . Con base en la misma coordenada x , el momento interno M se formula como se muestra en la figura 9-17c.

Ecuación del trabajo virtual. Entonces, el desplazamiento vertical de B es

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_B = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^{10} \frac{(-1x)(-6x^2)}{EI} dx$$

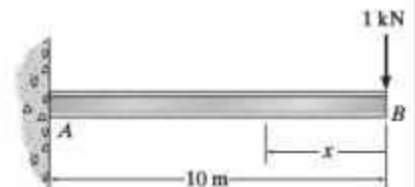
$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_B = \frac{15(10^3) \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

or bien,

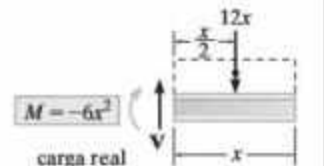
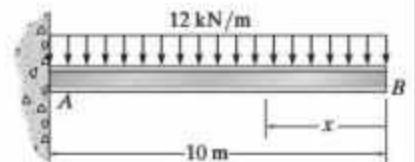
$$\Delta_B = \frac{15(10^3) \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{200(10^6) \text{ kN/m}^2 (500(10^6) \text{ mm}^4) (10^{-12} \text{ m}^4/\text{mm}^4)}$$

$$= 0.150 \text{ m} = 150 \text{ mm}$$

Resp.



(b)

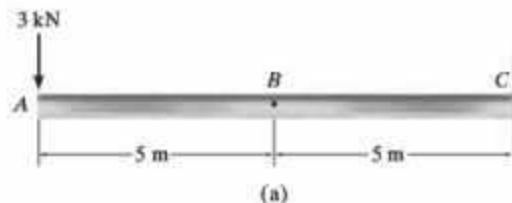


(c)

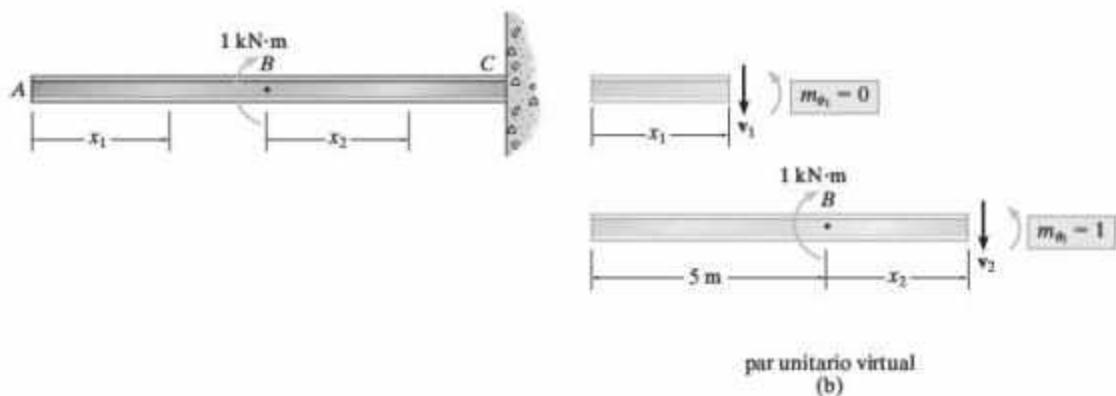
Figura 9-17

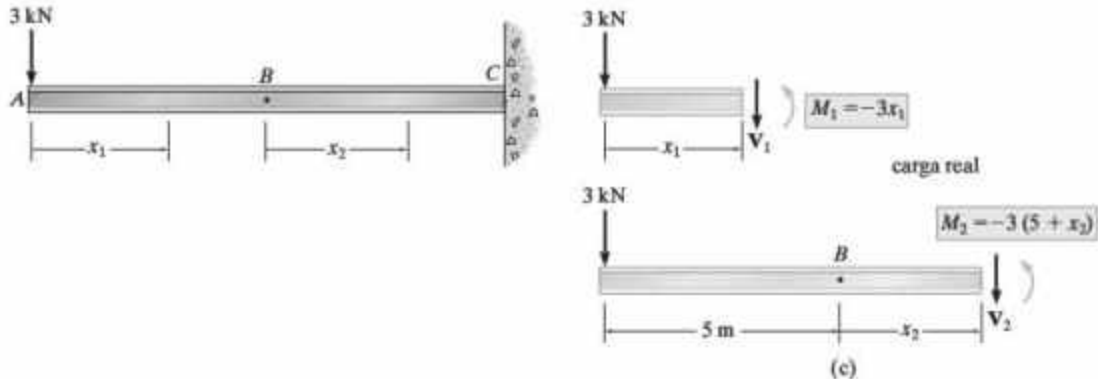
EJEMPLO 9.8

Determine la pendiente θ en el punto B de la viga de acero que se muestra en la figura 9-18a. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 60(10^6) \text{ mm}^4$.

**Figura 9-18****SOLUCIÓN**

Momento virtual m_θ . La pendiente en B se determina al colocar un momento de par unitario virtual de $1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ en B , figura 9-18b. Aquí deben seleccionarse dos coordenadas x con el fin de determinar la energía de deformación virtual total en la viga. La coordenada x_1 toma en cuenta la energía de deformación dentro del segmento AB y la coordenada x_2 incluye la del segmento BC . Los momentos internos m_θ dentro de cada uno de estos segmentos se calculan usando el método de las secciones como se muestra en la figura 9-18b.





Momentos reales M . Si se usan las mismas coordenadas x_1 y x_2 , los momentos internos M se calculan como se muestra en la figura 9-18c.

Ecuación del trabajo virtual. Entonces, la pendiente en B es resultado de

$$\begin{aligned}
 1 \cdot \theta_B &= \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx \\
 &= \int_0^5 \frac{(0)(-3x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^5 \frac{(1)[-3(5 + x_2)]}{EI} dx_2 \\
 \theta_B &= \frac{-112.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}
 \end{aligned}
 \quad (1)$$

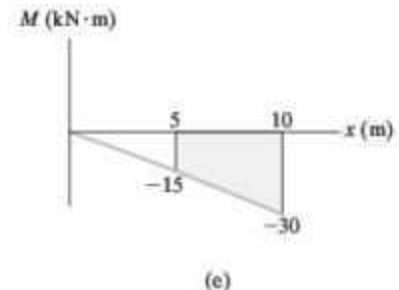
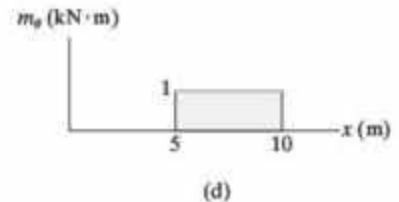
También se pueden evaluar las integrales $\int m_\theta M dx$ de forma gráfica, empleando la tabla que se encuentra al reverso de la portada de este libro. Para ello, primero es necesario establecer los diagramas de momento para las vigas en las figuras 9-18b y 9-18c. Éstos se muestran en las figuras 9-18d y 9-18e, respectivamente. Como no hay momento m para $0 \leq x < 5$ m, sólo se utilizan las áreas sombreadas rectangulares y trapezoidales para evaluar la integral. Después de encontrar estas formas en la fila y la columna correspondientes de la tabla, se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_5^{10} m_\theta M dx &= \frac{1}{2} m_\theta (M_1 + M_2) L = \frac{1}{2} (1) (-15 - 30) 5 \\
 &= -112.5 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3
 \end{aligned}$$

Éste es el mismo valor que se determinó en la ecuación 1. Por lo tanto,

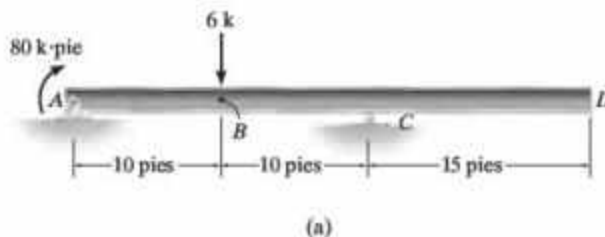
$$\begin{aligned}
 (1 \text{ kN} \cdot \text{m}) \cdot \theta_B &= \frac{-112.5 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{200(10^6) \text{ kN/m}^2 [60(10^6) \text{ mm}^4] (10^{-12} \text{ m}^4/\text{mm}^4)} \\
 \theta_B &= -0.00938 \text{ rad} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

El signo negativo indica que θ_B es opuesto a la dirección del momento de par virtual que se muestra en la figura 9-18b.

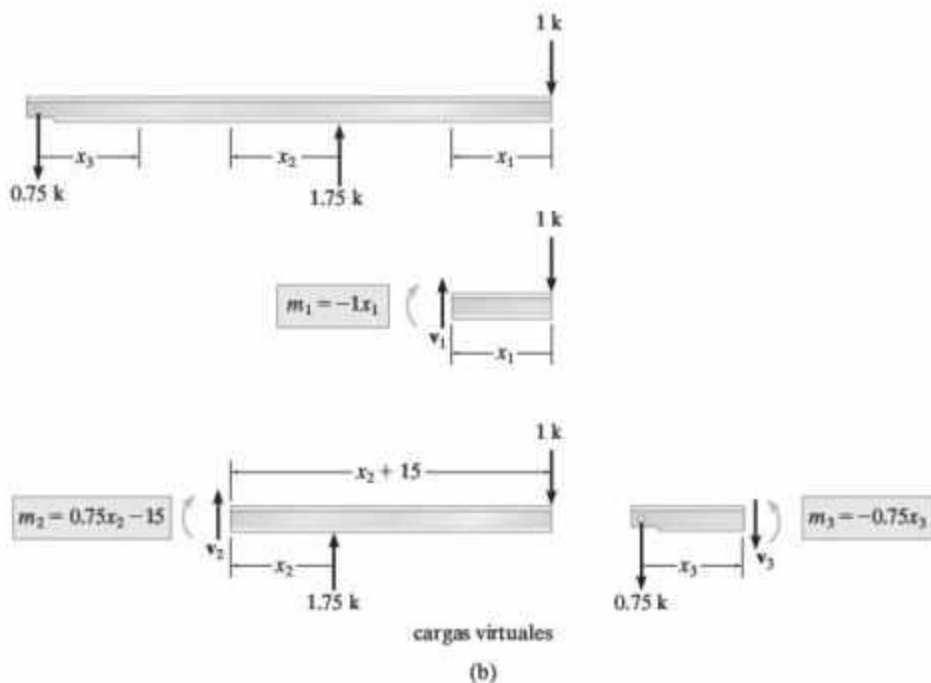


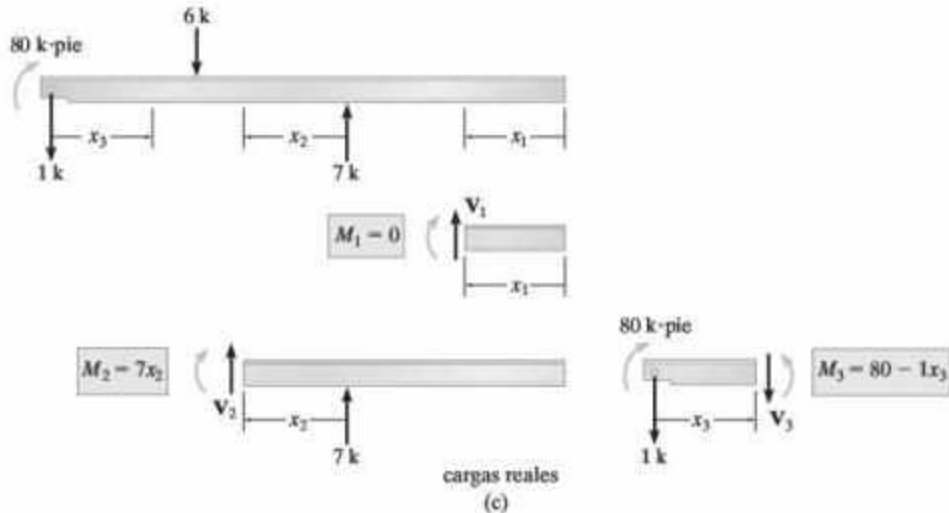
EJEMPLO 9.9

Determine el desplazamiento en D de la viga de acero que se muestra en la figura 9-19a. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 800$ pulg⁴.

**Figura 9-19****SOLUCIÓN**

Momentos virtuales m . La viga está sometida a una carga virtual unitaria en D , como se muestra en la figura 9-19b. Por inspección, deben usarse *tres coordenadas*, como x_1 , x_2 y x_3 para cubrir todas las regiones de la viga. Observe que estas coordenadas cubren las regiones donde no ocurren discontinuidades en las cargas ya sean reales o virtuales. Los momentos internos m se calcularon en la figura 9-19b por el método de las secciones.





Momentos reales M . En primer lugar se calculan las reacciones sobre la viga; después, empleando las *mismas* coordenadas x que se usaron para m , se determinan los momentos internos M como se muestra en la figura 9-19c.

Ecuación del trabajo virtual. Al aplicar la ecuación del trabajo virtual a la viga, con los datos de las figuras 9-19b y 9-19c, se tiene

$$\begin{aligned}
 1 \cdot \Delta_D &= \int_0^L \frac{mM}{EI} dx \\
 &= \int_0^{15} \frac{(-1x_1)(0)}{EI} dx_1 + \int_0^{10} \frac{(0.75x_2 - 15)(7x_2)}{EI} dx_2 \\
 &\quad + \int_0^{10} \frac{(-0.75x_3)(80 - 1x_3)}{EI} dx_3 \\
 \Delta_D &= \frac{0}{EI} - \frac{3500}{EI} - \frac{2750}{EI} = -\frac{6250 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI}
 \end{aligned}$$

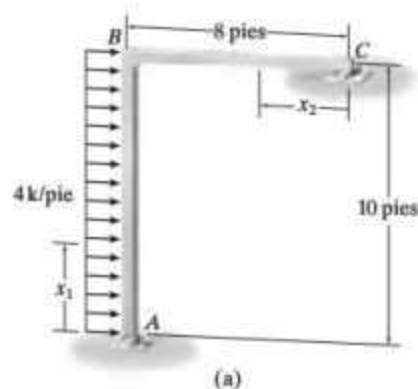
o bien

$$\begin{aligned}
 \Delta_D &= \frac{-6250 \text{ k} \cdot \text{pie}^3 (12)^3 \text{ pulg}^3 / \text{pie}^3}{29(10^3) \text{ k/pulg}^2 (800 \text{ pulg}^4)} \\
 &= -0.466 \text{ pulg} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

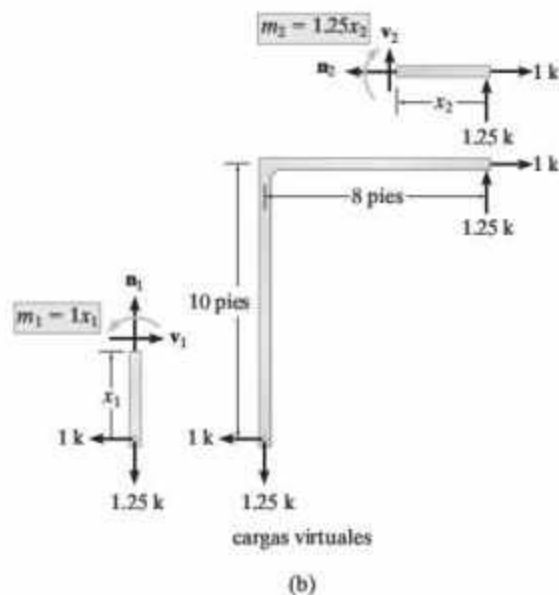
El signo negativo indica que el desplazamiento es hacia arriba, opuesto a la carga unitaria hacia abajo, figura 9-19b. También tenga en cuenta que en realidad no hay necesidad de calcular m_1 puesto que $M_1 = 0$.

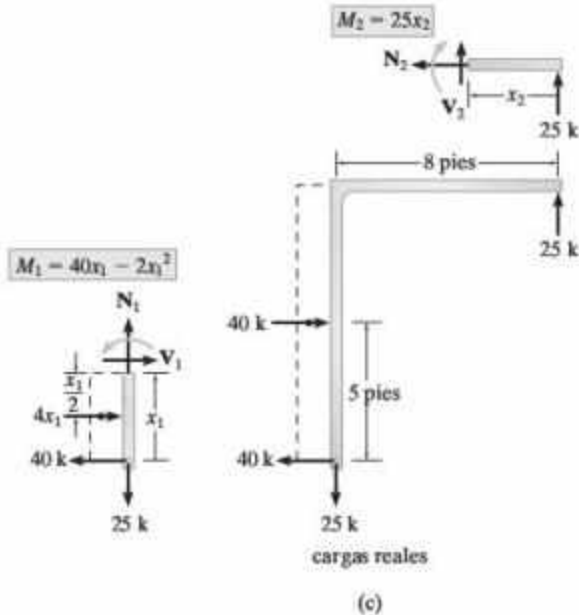
EJEMPLO 9.10

Determine el desplazamiento horizontal del punto C en el marco que se muestra en la figura 9-20a. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 600$ pulg⁴ para ambos elementos.

**Figura 9-20****SOLUCIÓN**

Momentos virtuales m . Por conveniencia, se usarán las coordenadas x_1 y x_2 en la figura 9-20b. Se aplica una carga unitaria *horizontal* en C , figura 9-20b. ¿Por qué? Las reacciones en los soportes y los momentos internos virtuales se calculan como se muestra.





Momentos reales M . De igual manera, las reacciones en los soportes y los momentos reales se calculan como se muestra en la figura 9-20c.

Ecuación del trabajo virtual. Con base en los datos de las figuras 9-20b y 9-20c, se tiene

$$1 \cdot \Delta_{C_k} = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^{10} \frac{(1x_1)(40x_1 - 2x_1^2) dx_1}{EI} + \int_0^8 \frac{(1.25x_2)(25x_2) dx_2}{EI}$$

$$\Delta_{C_k} = \frac{8333.3}{EI} + \frac{5333.3}{EI} = \frac{13\,666.7 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \quad (1)$$

Si se desea, las integrales $\int mM/dx$ también pueden evaluarse gráficamente empleando la tabla que está detrás de la portada. Los diagramas de momento para el marco de las figuras 9-20b y 9-20c se muestran en las figuras 9-20d y 9-20e, respectivamente. Por lo tanto, utilizando las fórmulas para las formas semejantes de la tabla, se obtiene

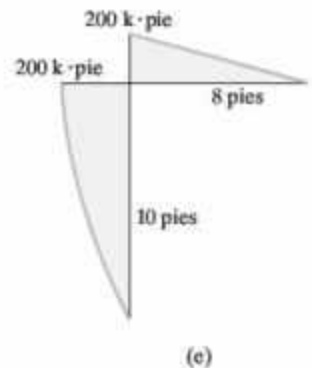
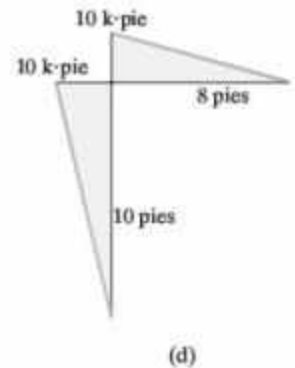
$$\int mM dx = \frac{5}{12}(10)(200)(10) + \frac{1}{3}(10)(200)(8)$$

$$= 8333.3 + 5333.3 = 13\,666.7 \text{ k}^2 \cdot \text{pie}^3$$

Que es igual a lo que se calculó en la ecuación 1. Así,

$$\Delta_{C_k} = \frac{13\,666.7 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{[29(10^3) \text{ k/pulg}^2][(12)^2 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2]][600 \text{ pulg}^4(\text{pie}^4/(12)^4 \text{ pulg}^4)]}$$

$$= 0.113 \text{ pies} = 1.36 \text{ pulg} \quad \text{Resp.}$$



EJEMPLO 9.11

Determine la rotación tangencial en el punto C del marco que se muestra en la figura 9-21a. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 15(10^6) \text{ mm}^4$.

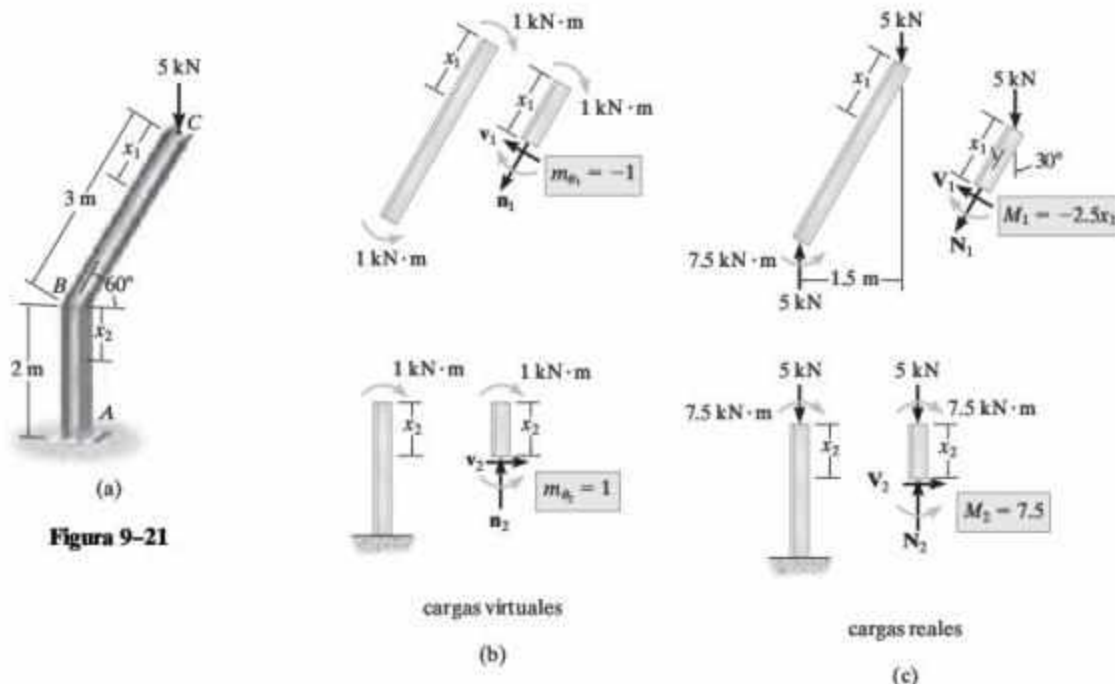


Figura 9-21

SOLUCIÓN

Momentos virtuales m_θ . Se usarán las coordenadas x_1 y x_2 que se muestran en la figura 9-21a. Se aplica un momento de par unitario en C y se calculan los momentos internos m_θ , figura 9-21b.

Momentos reales M . De una manera similar, se calculan los momentos reales M como se muestra en la figura 9-21c.

Ecuación del trabajo virtual. Con base en los datos de las figuras 9-21b y 9-21c, se tiene

$$1 \cdot \theta_C = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx = \int_0^3 \frac{(-1)(-2.5x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^2 \frac{(1)(7.5)}{EI} dx_2$$

$$\theta_C = \frac{11.25}{EI} + \frac{15}{EI} = \frac{26.25 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$$

o bien

$$\theta_C = \frac{26.25 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{200(10^6) \text{ kN/m}^2 [15(10^6) \text{ mm}^4] (10^{-12} \text{ m}^4/\text{mm}^4)}$$

$$= 0.00875 \text{ rad} \quad \text{Resp.}$$

9.8 Energía de deformación virtual causada por carga axial, fuerza cortante, torsión y temperatura

Aunque las deflexiones en vigas y marcos se producen principalmente debido a la energía de deformación por flexión, en algunas estructuras la energía de deformación adicional de la carga axial, la fuerza cortante, la torsión y quizá la temperatura pueden llegar a ser importantes. A continuación se considerará cada uno de estos efectos.

Carga axial. Los elementos de un marco pueden estar sometidos a cargas axiales y la energía de deformación virtual causada por estas cargas se ha establecido en la sección 9-4. Para los elementos que cuentan con un área constante en su sección transversal, se tiene

$$U_n = \frac{nNL}{AE} \quad (9-24)$$

donde

n = carga axial virtual interna causada por la carga unitaria virtual externa.

N = fuerza axial interna en el elemento causada por las cargas reales.

E = módulo de elasticidad del material.

A = área de la sección transversal del elemento.

L = longitud del elemento.

Fuerza cortante. Para determinar la energía de deformación virtual debida a la fuerza cortante en una viga, se considerará el elemento dx de la viga que se muestra en la figura 9-22. La distorsión cortante dy del elemento cuando es causada por las *cargas reales* es $dy = \gamma dx$. Si la deformación cortante γ es causada por la *respuesta de un material elástico lineal*, entonces puede aplicarse la ley de Hooke, $\gamma = \tau/G$. Por lo tanto, $dy = (\tau/G) dx$. El esfuerzo cortante puede expresarse como $\tau = K(V/A)$, donde K es un *factor de forma* que depende del perfil del área transversal A de la viga. Por lo tanto, se puede escribir $dy = K(V/GA) dx$. El trabajo virtual interno hecho por una fuerza cortante virtual v , que actúa sobre el elemento dy mientras se deforma, es entonces $dU_s = v dy = v(KV/GA) dx$. Para toda la viga, la energía de deformación virtual se determina por integración.

$$U_s = \int_0^L K \left(\frac{vV}{GA} \right) dx \quad (9-25)$$

donde

v = fuerza cortante virtual interna en el elemento, expresada en función de x y causada por la carga virtual unitaria externa.

V = fuerza cortante interna en el elemento, expresada como una función de x y causada por las cargas reales.

A = área de la sección transversal del elemento.

K = factor de forma para el área de la sección transversal:

$K = 1.2$ para secciones transversales rectangulares.

$K = 10/9$ para secciones transversales circulares.

$K \approx 1$ para vigas de ala ancha o doble T, donde A es el área del alma.

G = módulo de elasticidad al corte para el material.

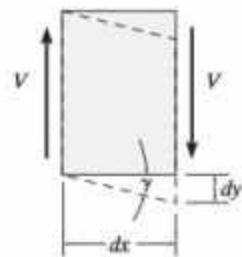


Figura 9-22

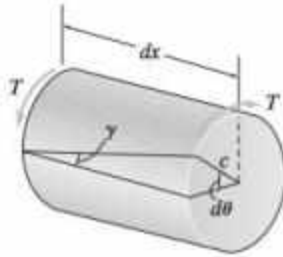


Figura 9-23

Torsión. Con frecuencia, los marcos tridimensionales se someten a cargas de torsión. Si el elemento tiene una sección transversal *circular*, no ocurrirá ningún pandeo en su área transversal al cargarlo. Como resultado, puede obtenerse la energía de deformación virtual en el elemento. Para ello se considera un elemento dx del elemento que está sometido a un par de torsión T aplicado, figura 9-23. Este par de torsión produce una deformación cortante de $\gamma = (cd\theta)/dx$. Dado que se produce una *respuesta material lineal elástica*, entonces, $\gamma = \tau/G$, donde $\tau = Tc/J$. Por lo tanto, el ángulo de giro $d\theta = (\gamma dx)/c = (\tau/Gc) dx = (T/GJ) dx$. Si se aplica una carga unitaria virtual a la estructura que ocasione un par de torsión virtual interno t en el elemento, después de aplicar las cargas reales, la energía de deformación virtual en el elemento de longitud dx será $dU_t = td\theta = tT dx/GJ$. Integrar a toda la longitud L del elemento da por resultado

$$U_t = \frac{tTL}{GJ} \quad (9-26)$$

donde

t = par de torsión virtual interno causado por la carga unitaria virtual externa.

T = par de torsión interno en el elemento causado por las cargas reales.

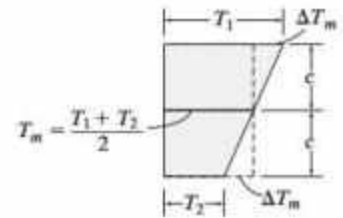
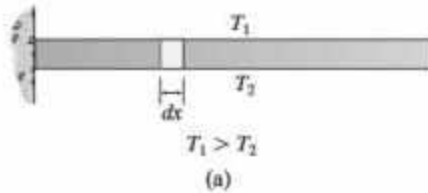
G = módulo de elasticidad al corte del material.

J = momento polar de inercia para la sección transversal, $J = \pi c^4/2$, donde c es el radio del área de la sección transversal.

L = longitud del elemento.

La energía de deformación virtual debida a la torsión de elementos que no tienen áreas transversales circulares se determina mediante un análisis más riguroso que el que se ha presentado aquí.

Temperatura. En la sección 9-4 se consideró el efecto de un *cambio de temperatura uniforme* ΔT sobre un elemento de una armadura y se indicó que el elemento se alargaría o acortaría una cantidad $\Delta L = \alpha \Delta TL$. Sin embargo, en algunos casos un elemento estructural puede estar sometido a una *diferencia de temperatura en toda su profundidad*, como en el caso de la viga que se muestra en la figura 9-24a. Si esto ocurre, es posible determinar el desplazamiento de los puntos a lo largo de la curva elástica de la viga usando el principio del trabajo virtual. Para ello, primero debe calcularse la cantidad de *rotación* de un elemento diferencial dx de la viga, causado por el gradiente térmico que actúa sobre la sección transversal de la viga. Para hacer más claro el análisis, se elegirá el caso más común de una viga que tiene un eje neutro situado a la mitad de la profundidad (c) de la viga. Al graficar el perfil de la temperatura, figura 9-24b, se observará que la temperatura media es $T_m = (T_1 + T_2)/2$. Si $T_1 > T_2$, la diferencia de temperatura en la parte superior del elemento causa una deformación de alargamiento, mientras que en la parte baja provoca una deformación por contracción. En ambos casos la diferencia de temperatura es $\Delta T_m = T_1 - T_m = T_m - T_2$. Como el cambio térmico



de longitud en la parte superior e inferior es de $\delta x = \alpha \Delta T_m dx$, figura 9-24c, entonces la rotación del miembro es

$$d\theta = \frac{\alpha \Delta T_m dx}{c}$$

Si se aplica una carga unitaria virtual en un punto de la viga donde debe determinarse el desplazamiento, o se aplica un momento de par unitario virtual en un punto donde desea conocerse el desplazamiento rotacional de la tangente, entonces esta carga crea un momento virtual m en la viga en el punto donde se encuentra el elemento dx . Cuando se impone el gradiente de temperatura, la energía de deformación virtual en la viga es

$$U_{\text{temp}} = \int_0^L \frac{m \alpha \Delta T_m dx}{c} \quad (9-27)$$

donde

m = momento virtual interno en la viga expresado en función de x , y causado por la carga unitaria virtual externa o el momento de par unitario virtual externo.

α = coeficiente de expansión térmica.

ΔT_m = diferencia de temperatura entre la temperatura media y la temperatura en la parte superior o inferior de la viga.

c = profundidad media de la viga.

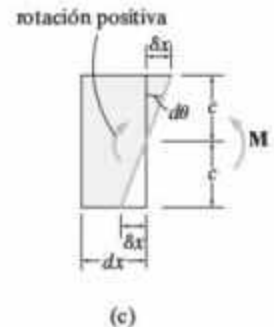
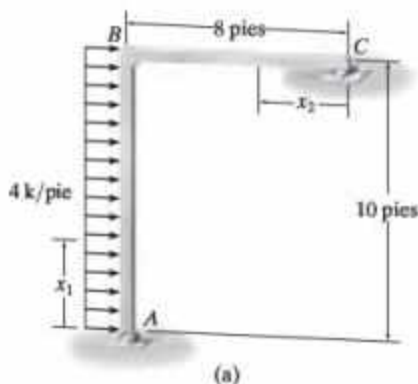


Figura 9-24

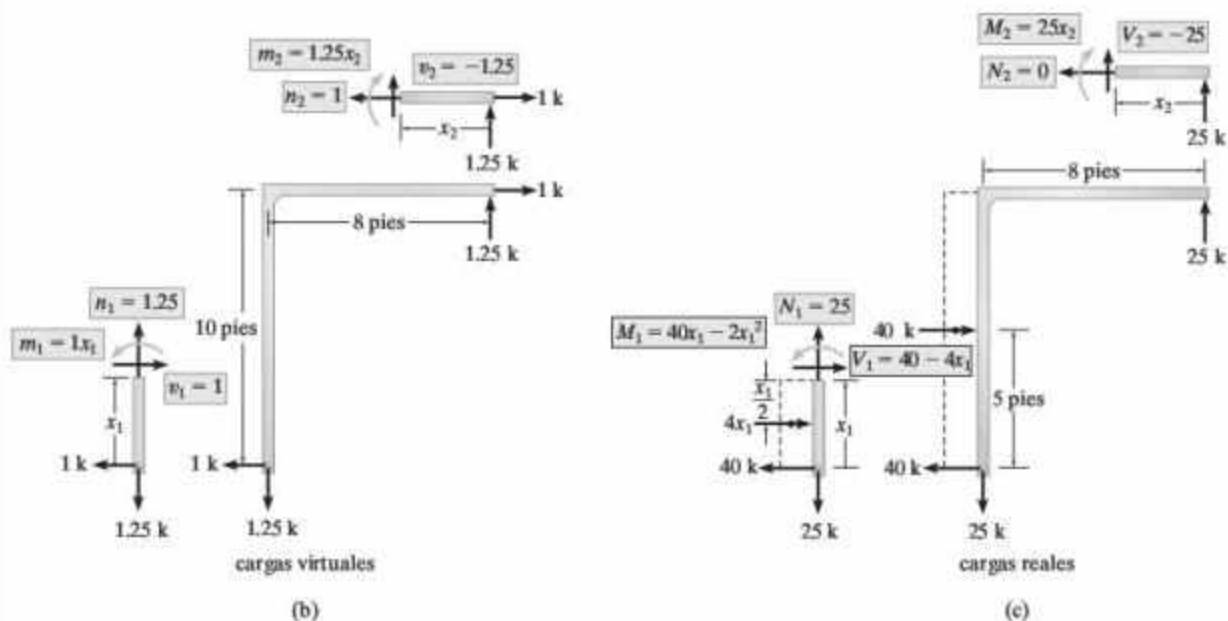
A menos que se indique lo contrario, en este texto se considerarán sólo las deflexiones en vigas y marcos debidas a la flexión. No obstante, por lo general los elementos de vigas y marcos pueden estar sometidos a varias de las otras cargas analizadas en esta sección. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, las deflexiones adicionales causadas por las fuerzas cortantes y axiales alteran la deflexión de las vigas en sólo un pequeño porcentaje por lo que generalmente se ignoran, incluso en el análisis de "pequeños" marcos de dos o tres elementos con un nivel de altura. Si éstos y otros efectos de la torsión y la temperatura deben considerarse en un análisis, entonces simplemente se agrega su energía de deformación virtual definida por las ecuaciones 9-24 a 9-27 a la ecuación del trabajo virtual definido por la ecuación 9-22 o la ecuación 9-23. Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de estas ecuaciones.

EJEMPLO 9.12

Determine el desplazamiento horizontal del punto C en el marco de la figura 9-25a. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi, $G = 12(10^3)$ ksi, $I = 600$ pulg⁴ y $A = 80$ pulg² para ambos elementos. El área de la sección transversal es rectangular. Incluya la energía de deformación interna debida a la carga axial y la fuerza cortante.

**Figura 9-25****SOLUCIÓN**

Aquí debe aplicarse una carga unitaria horizontal en C . Los diagramas de cuerpo libre necesarios para las cargas reales y virtuales se muestran en las figuras 9-25b y 9-25c.



Flexión. La energía de deformación virtual debida a la flexión se determinó en el ejemplo 9-10. Se demostró que

$$U_b = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \frac{13\,666.7 \text{ k}^2 \cdot \text{pie}^3}{EI} = \frac{13\,666.7 \text{ k}^2 \cdot \text{pie}^3 (12^3 \text{ pulg}^3 / 1 \text{ pie}^3)}{[29(10^3) \text{ k/pulg}^2](600 \text{ pulg}^4)} = 1.357 \text{ pulg} \cdot \text{k}$$

Carga axial. A partir de los datos de las figuras 9-25b y 9-25c, se tiene

$$\begin{aligned} U_a &= \sum \frac{nNL}{AE} \\ &= \frac{1.25 \text{ k}(25 \text{ k})(120 \text{ pulg})}{80 \text{ pulg}^2[29(10^3) \text{ k/pulg}^2]} + \frac{1 \text{ k}(0)(96 \text{ pulg})}{80 \text{ pulg}^2[29(10^3) \text{ k/pulg}^2]} \\ &= 0.001616 \text{ pulg} \cdot \text{k} \end{aligned}$$

Fuerza cortante. Al aplicar la ecuación 9-25 con $K = 1.2$ para secciones transversales rectangulares y al utilizar las funciones de fuerza cortante que se muestran en la figura 9-25b y 9-25c, resulta

$$\begin{aligned} U_s &= \int_0^L K \left(\frac{vV}{GA} \right) dx \\ &= \int_0^{10} \frac{1.2(1)(40 - 4x_1) dx_1}{GA} + \int_0^8 \frac{1.2(-1.25)(-25) dx_2}{GA} \\ &= \frac{540 \text{ k}^2 \cdot \text{pie}(12 \text{ pulg/pie})}{[12(10^3) \text{ k/pulg}^2](80 \text{ pulg}^2)} = 0.00675 \text{ pulg} \cdot \text{k} \end{aligned}$$

Si se aplica la ecuación del trabajo virtual, se tiene

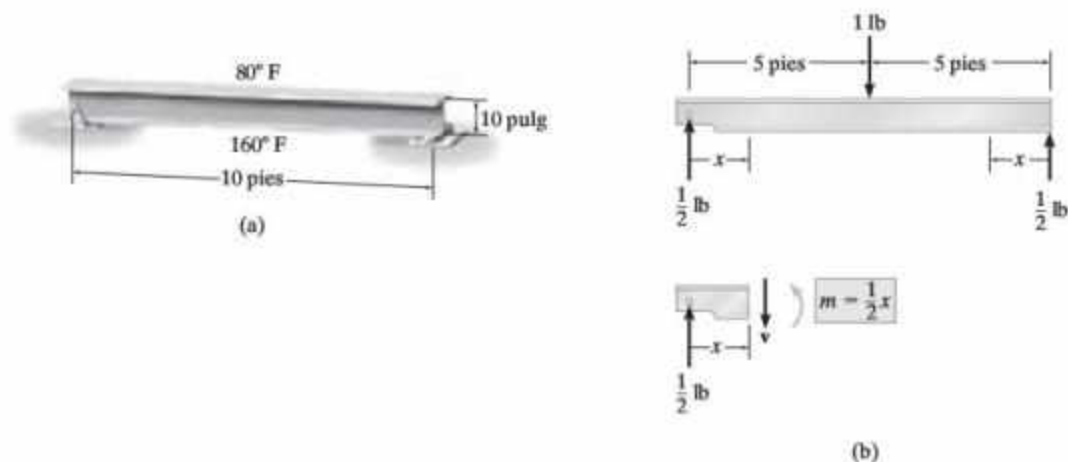
$$1 \text{ k} \cdot \Delta_{C_A} = 1.357 \text{ pulg} \cdot \text{k} + 0.001616 \text{ pulg} \cdot \text{k} + 0.00675 \text{ pulg} \cdot \text{k}$$

$$\Delta_{C_A} = 1.37 \text{ pulg} \quad \text{Resp.}$$

La inclusión de los efectos de la fuerza cortante y la carga axial contribuyó sólo con un aumento del 0.6% sobre la respuesta que se determinó usando únicamente la flexión.

EJEMPLO 9.13

La viga que se muestra en la figura 9-26a se utiliza en un edificio sometido a dos ambientes térmicos diferentes. Si la temperatura en la superficie superior de la viga es de 80°F y en la inferior es de 160°F , determine la deflexión vertical de la viga en su punto medio, debido al gradiente de temperatura. Considere que $\alpha = 6.5(10^{-6})/^{\circ}\text{F}$.

**Figura 9-26****SOLUCIÓN**

Dado que la deflexión en el centro de la viga debe determinarse, se coloca una carga virtual unitaria allí y se calcula el momento virtual interno en la viga, figura 9-26b.

La temperatura media en el centro de la viga es $(160^{\circ} + 80^{\circ})/2 = 120^{\circ}\text{F}$, por lo que para la aplicación de la ecuación 9-27, $\Delta T_m = 120^{\circ}\text{F} - 80^{\circ}\text{F} = 40^{\circ}\text{F}$. Además, $c = 10 \text{ pulg}/2 = 5 \text{ pulg}$. Al aplicar el principio del trabajo virtual, se tiene

$$\begin{aligned} 1 \text{ lb} \cdot \Delta_{C_v} &= \int_0^L \frac{m \alpha \Delta T_m dx}{c} \\ &= 2 \int_0^{60 \text{ pulg}} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right) 6.5(10^{-6})/^{\circ}\text{F}(40^{\circ}\text{F})}{5 \text{ pulg}} dx \end{aligned}$$

$$\Delta_{C_v} = 0.0936 \text{ pulg}$$

Resp.

El resultado indica una deflexión muy insignificante.

9.9 Teorema de Castigliano para vigas y marcos

La energía de deformación por flexión interna para una viga o un marco resulta de la ecuación 9-11 ($U_i = \int M^2 dx / 2EI$). Al sustituir esta ecuación en la ecuación 9-20 ($\Delta_i = \partial U_i / \partial P_i$) y omitir el subíndice i , se tiene

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

En lugar de elevar al cuadrado la expresión del momento interno M , integrar y luego obtener la derivada parcial, generalmente resulta más fácil diferenciar antes de la integración. Dado que E e I son constantes, se tiene

$$\Delta = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} \quad (9-28)$$

donde

Δ = desplazamiento externo del punto causado por las cargas reales que actúan sobre la viga o marco.

P = fuerza externa aplicada a la viga o marco en la dirección de Δ .

M = momento interno en la viga o marco, expresado como una función de x y causado tanto por la fuerza P como por las cargas reales sobre la viga.

E = módulo de elasticidad del material de la viga.

I = momento de inercia del área de la sección transversal calculado respecto al eje neutro.

Si debe determinarse la pendiente θ en un punto, es necesario encontrar la derivada parcial del momento interno M con respecto a un *momento de par externo* M' que actúa en el punto, es decir,

$$\theta = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI} \quad (9-29)$$

Las ecuaciones anteriores son similares a las usadas para el método del trabajo virtual, ecuaciones 9-22 y 9-23, excepto que $\partial M / \partial P$ y $\partial M / \partial M'$ remplazan a m y m_θ , respectivamente. Como en el caso de las armaduras, generalmente se requiere un poco más de cálculo para determinar las derivadas parciales y aplicar el teorema de Castigliano en vez de emplear el método del trabajo virtual. También, recuerde que este teorema sólo se aplica a materiales que tengan una respuesta elástica lineal. Si se desea una determinación más completa de la energía de deformación en la estructura, debe incluirse la energía de deformación debida a las fuerzas cortantes, axiales y de torsión. Las deducciones para la fuerza cortante y la torsión siguen el mismo desarrollo que las ecuaciones 9-25 y 9-26. Las energías de deformación y sus derivadas son, respectivamente,

$$U_s = K \int_0^L \frac{V^2 dx}{2AG} \quad \frac{\partial U_s}{\partial P} = \int_0^L \frac{V}{AG} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right) dx$$

$$U_t = \int_0^L \frac{T^2 dx}{2JG} \quad \frac{\partial U_t}{\partial P} = \int_0^L \frac{T}{JG} \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right) dx$$

Sin embargo, estos efectos no se incluyeron en el análisis de los problemas para este texto, debido a que las deflexiones en vigas y marcos se producen principalmente debido a la energía de deformación por flexión. Los marcos más grandes, o aquellos que tienen una geometría inusual, pueden analizarse por computadora, donde estos efectos pueden incorporarse fácilmente al análisis.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede emplearse para determinar la deflexión y/o la pendiente en un punto de una viga o un marco usando el teorema de Castigliano.

Fuerza externa P o momento de par M'

- Coloque una fuerza P sobre la viga o el marco en el punto y en la dirección del desplazamiento deseado.
- Si debe determinarse la pendiente, coloque un momento de par M' en el punto.
- Se supone que tanto P como M' tienen una *magnitud variable* para obtener los cambios $\partial M / \partial P$ o $\partial M / \partial M'$.

Momentos internos M

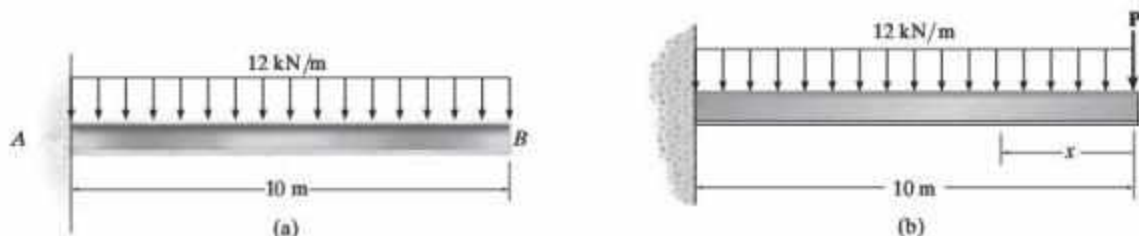
- Establezca las coordenadas x apropiadas que son válidas dentro de las regiones de la viga o el marco donde no hay discontinuidad en la fuerza, la carga distribuida o el momento.
- Calcule el momento interno M en función de P y M' y cada coordenada x . Además, calcule la derivada parcial $\partial M / \partial P$ o $\partial M / \partial M'$ para cada coordenada x .
- Después de determinar M y $\partial M / \partial P$ o $\partial M / \partial M'$, asigne a P o M' su valor numérico si han sustituido a una fuerza o momento reales. De lo contrario, establezca P o M' iguales a cero.

Teorema de Castigliano

- Aplique la ecuación 9-28 o 9-29 para determinar el desplazamiento Δ o la pendiente θ deseados. Es importante conservar los signos algebraicos de los valores correspondientes de M y $\partial M / \partial P$ o $\partial M / \partial M'$.
- Si la suma resultante de todas las integrales definidas es positiva, Δ o θ tienen la misma dirección que P o M' .

EJEMPLO 9.14

Determine el desplazamiento del punto B de la viga que se muestra en la figura 9-27a. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$ e $I = 500(10^6) \text{ mm}^4$.

**SOLUCIÓN**

Fuerza externa P . Se coloca una fuerza vertical P sobre la viga en B como se muestra en la figura 9-27b.

Momentos internos M . Se requiere una sola coordenada x para obtener la solución, puesto que no hay discontinuidades de carga entre A y B . Si se usa el método de las secciones, figura 9-27c, se tiene

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M &= 0; & -M - (12x)\left(\frac{x}{2}\right) - Px &= 0 \\ M &= -6x^2 - Px & \frac{\partial M}{\partial P} &= -x \end{aligned}$$

Al establecer $P = 0$, su valor real, resulta

$$M = -6x^2 \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Teorema de Castigliano. Si se aplica la ecuación 9-28, se tiene

$$\Delta_B = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} = \int_0^{10} \frac{(-6x^2)(-x) dx}{EI} = \frac{15(10^3) \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

o bien

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \frac{15(10^3) \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{200(10^6) \text{ kN/m}^2 [500(10^6) \text{ mm}^4] (10^{-12} \text{ m}^4/\text{mm}^4)} \\ &= 0.150 \text{ m} = 150 \text{ mm} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Debe observarse la semejanza entre esta solución y la obtenida mediante el método del trabajo virtual, ejemplo 9-7.

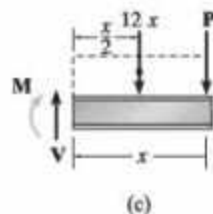
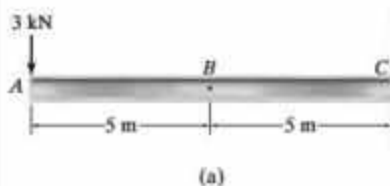


Figura 9-27

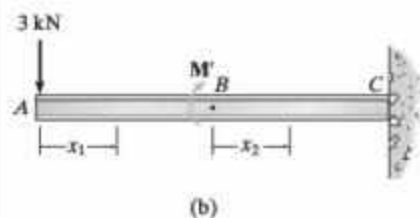
EJEMPLO 9.15

Determine la pendiente en el punto B de la viga que se muestra en la figura 9-28a. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 60(10^6) \text{ mm}^4$.

SOLUCIÓN

Momento de par externo M' . Dado que debe determinarse la pendiente en el punto B , se coloca un par externo M' sobre la viga en ese punto, figura 9-28b.

Momentos internos M . Para determinar los momentos internos en la viga deben usarse dos coordenadas, x_1 y x_2 , puesto que hay una discontinuidad, M' , en B . Como se muestra en la figura 9.28b, x_1 va de A a B y x_2 va de B a C . Utilizando el método de las secciones, figura 9-28c, los momentos internos y las derivadas parciales se calculan de la siguiente manera:



Para x_1 :

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M &= 0; & M_1 + 3x_1 &= 0 \\ M_1 &= -3x_1 \\ \frac{\partial M_1}{\partial M'} &= 0 \end{aligned}$$

Para x_2 :

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M &= 0; & M_2 - M' + 3(5 + x_2) &= 0 \\ M_2 &= M' - 3(5 + x_2) \\ \frac{\partial M_2}{\partial M'} &= 1 \end{aligned}$$

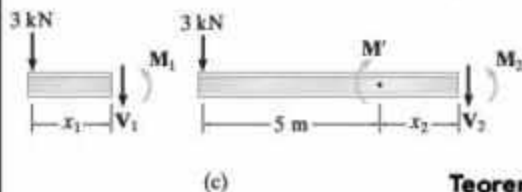


Figura 9-28

Teorema de Castigliano. Si se establece $M' = 0$, su valor real, y se aplica la ecuación 9-29, resulta

$$\begin{aligned} \theta_B &= \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI} \\ &= \int_0^5 \frac{(-3x_1)(0) dx_1}{EI} + \int_0^5 \frac{-3(5 + x_2)(1) dx_2}{EI} = -\frac{112.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{-112.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{200(10^6) \text{ kN/m}^2 [60(10^6) \text{ mm}^4] (10^{-12} \text{ m}^4/\text{mm}^4)} \\ &= -0.00938 \text{ rad} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

El signo negativo indica que θ_B es opuesto a la dirección del momento de par M' . Observe la similitud entre esta solución y la del ejemplo 9-8.

EJEMPLO 9.16

Determine el desplazamiento vertical del punto C de la viga que se muestra en la figura 9-29a. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 150(10^6) \text{ mm}^4$.

SOLUCIÓN

Fuerza externa P . Se aplica una fuerza vertical P en el punto C, figura 9-29b. Después, esta fuerza será igual a un valor fijo de 20 kN.

Momentos internos M . En este caso se requieren dos coordenadas x para la integración, figura 9-29b, puesto que la carga es discontinua en C. Empleando el método de las secciones, figura 9-29c, se tiene

Para x_1 :

$$\downarrow + \Sigma M = 0; \quad -(24 + 0.5P)x_1 + 8x_1\left(\frac{x_1}{2}\right) + M_1 = 0$$

$$M_1 = (24 + 0.5P)x_1 - 4x_1^2$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0.5x_1$$

Para x_2 :

$$\downarrow + \Sigma M = 0; \quad -M_2 + (8 + 0.5P)x_2 = 0$$

$$M_2 = (8 + 0.5P)x_2$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = 0.5x_2$$

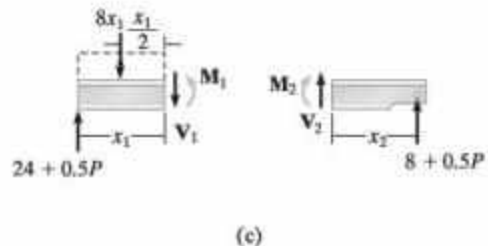
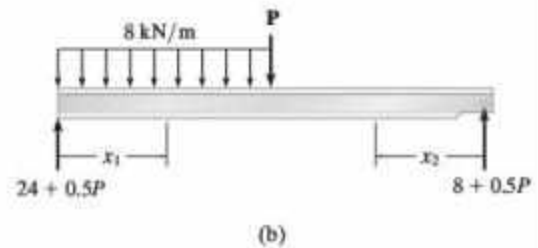
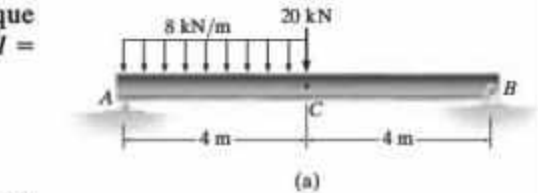


Figura 9-29

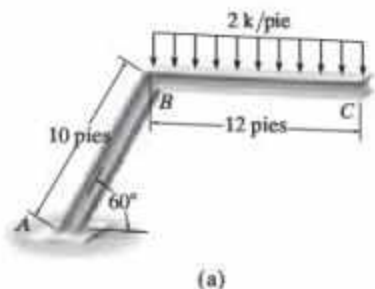
Teorema de Castigliano. Si se establece $P = 20 \text{ kN}$, su valor real, y se aplica la ecuación 9-28, resulta

$$\begin{aligned} \Delta_{C_v} &= \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} \\ &= \int_0^4 \frac{(34x_1 - 4x_1^2)(0.5x_1) dx_1}{EI} + \int_0^4 \frac{(18x_2)(0.5x_2) dx_2}{EI} \\ &= \frac{234.7 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} + \frac{192 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{426.7 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \Delta_{C_v} &= \frac{426.7 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{200(10^6) \text{ kN/m}^2 [150(10^6) \text{ mm}^4] (10^{-12} \text{ m}^4/\text{mm}^4)} \\ &= 0.0142 \text{ m} = 14.2 \text{ mm} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 9.17



Determine la pendiente en el punto C del marco de dos elementos que se muestra en la figura 9-30a. El soporte en A es fijo. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 600$ pulg⁴.

SOLUCIÓN

Momento de par externo M' . Se aplica un momento variable M' sobre el marco en el punto C, puesto que debe determinarse la pendiente en este punto, figura 9-30b. Después, este momento se igualará a cero.

Momentos internos M . Debido a la discontinuidad de la carga interna en B, se eligen dos coordenadas x_1 y x_2 , como se muestra en la figura 9-30b. Usando el método de las secciones, figura 9-30c, se tiene

Para x_1 :

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M &= 0; & -M_1 - 2x_1\left(\frac{x_1}{2}\right) - M' &= 0 \\ M_1 &= -(x_1^2 + M') \\ \frac{\partial M_1}{\partial M'} &= -1 \end{aligned}$$

Para x_2 :

$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M &= 0; & -M_2 - 24(x_2 \cos 60^\circ + 6) - M' &= 0 \\ M_2 &= -24(x_2 \cos 60^\circ + 6) - M' \\ \frac{\partial M_2}{\partial M'} &= -1 \end{aligned}$$

Teorema de Castigliano. Al establecer $M' = 0$ y aplicar la ecuación 9-29 se obtiene

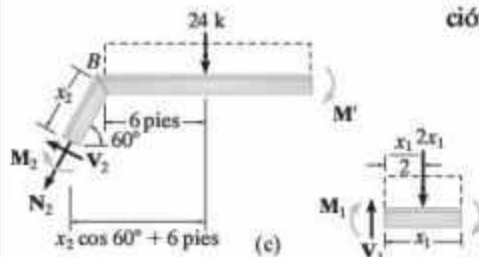


Figura 9-30

$$\begin{aligned} \theta_C &= \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI} \\ &= \int_0^{12} \frac{(-x_1^2)(-1) dx_1}{EI} + \int_0^{10} \frac{-24(x_2 \cos 60^\circ + 6)(-1) dx_2}{EI} \\ &= \frac{576 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI} + \frac{2040 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI} = \frac{2616 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI} \end{aligned}$$

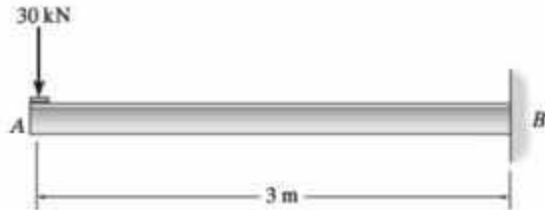
$$\theta_C = \frac{2616 \text{ k} \cdot \text{pie}^2 (144 \text{ pulg}^2 / \text{pie}^2)}{29(10^3) \text{ k/pulg}^2 (600 \text{ pulg}^4)} = 0.0216 \text{ rad}$$

Resp.

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F9-13. Determine la pendiente y el desplazamiento en el punto A . EI es constante. Use el principio del trabajo virtual.

F9-14. Resuelva el problema F9-13 usando el teorema de Castigliano.



F9-13/14

F9-15. Determine la pendiente y el desplazamiento en el punto A . EI es constante. Use el principio del trabajo virtual.

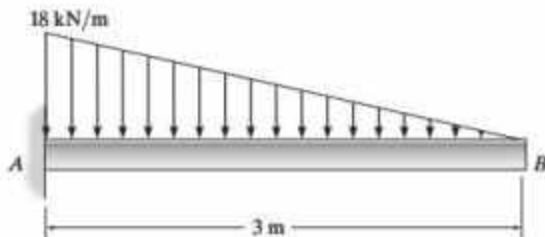
F9-16. Resuelva el problema F9-15 usando el teorema de Castigliano.



F9-15/16

F9-17. Determine la pendiente y el desplazamiento en el punto B . EI es constante. Use el principio del trabajo virtual.

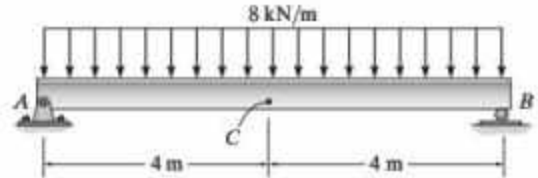
F9-18. Resuelva el problema F9-17 usando el teorema de Castigliano.



F9-17/18

F9-19. Determine la pendiente en A y el desplazamiento en el punto C . EI es constante. Use el principio del trabajo virtual.

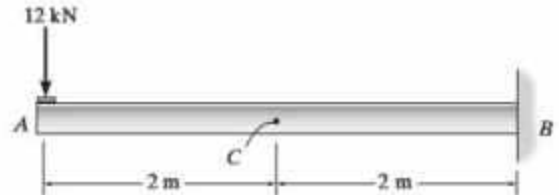
F9-20. Resuelva el problema F9-19 usando el teorema de Castigliano.



F9-19/20

F9-21. Determine la pendiente y el desplazamiento en el punto C . EI es constante. Use el principio del trabajo virtual.

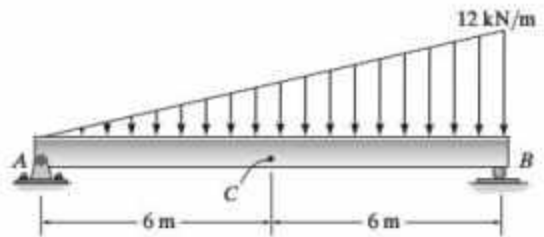
F9-22. Resuelva el problema F9-21 usando el teorema de Castigliano.



F9-21/22

F9-23. Determine el desplazamiento en el punto C . EI es constante. Use el principio del trabajo virtual.

F9-24. Resuelva el problema F9-23 usando el teorema de Castigliano.

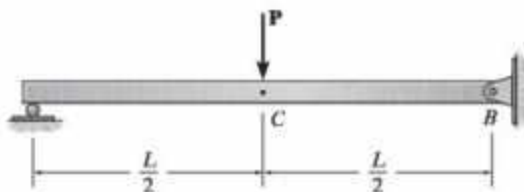


F9-23/24

PROBLEMAS

9-21. Determine el desplazamiento del punto C y la pendiente en el punto B . EI es constante. Use el principio del trabajo virtual.

9-22. Resuelva el problema 9-21 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-21/9-22

9-23. Determine el desplazamiento en el punto C . EI es constante. Use el método del trabajo virtual.

***9-24.** Resuelva el problema 9-23 usando el teorema de Castigliano.



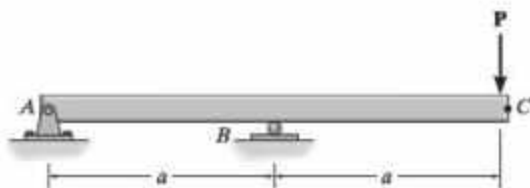
Probs. 9-23/9-24

9-25. Determine la pendiente en el punto C . EI es constante. Use el método del trabajo virtual.

9-26. Resuelva el problema 9-25 usando el teorema de Castigliano.

9-27. Determine la pendiente en el punto A . EI es constante. Use el método del trabajo virtual.

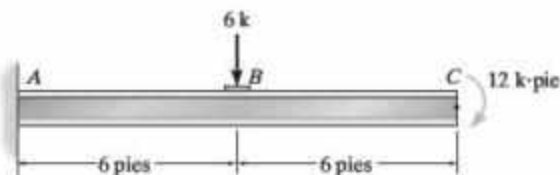
***9-28.** Resuelva el problema 9-27 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-25/9-26/9-27/9-28

9-29. Determine la pendiente y el desplazamiento en el punto C . Use el método del trabajo virtual. $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 800$ pulg⁴.

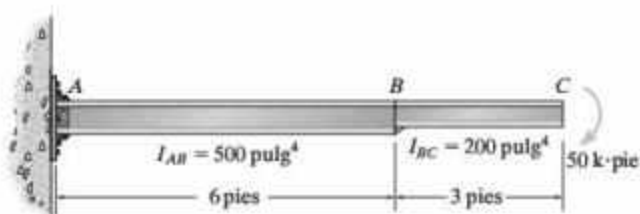
9-30. Resuelva el problema 9-29 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-29/9-30

9-31. Determine el desplazamiento y la pendiente en el punto C de la viga en voladizo. El momento de inercia de cada segmento se indica en la figura. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi. Use el principio del trabajo virtual.

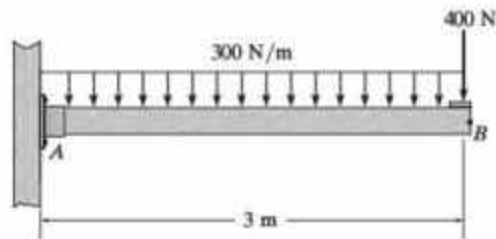
***9-32.** Resuelva el problema 9-31 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-31/9-32

9-33. Determine la pendiente y el desplazamiento en el punto B . EI es constante. Use el método del trabajo virtual.

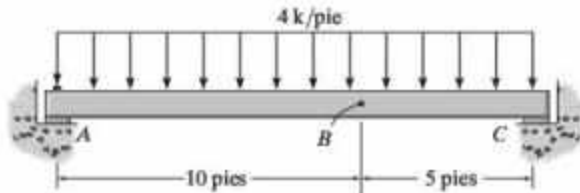
9-34. Resuelva el problema 9-33 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-33/9-34

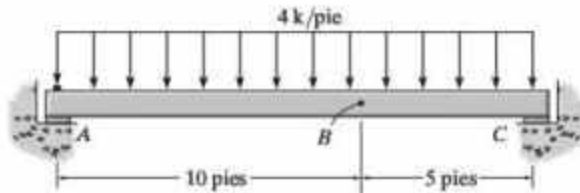
9-35. Determine la pendiente y el desplazamiento en el punto B . Suponga que el soporte en A es un pasador y en C es un rodillo. Considere $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 300$ pulg⁴. Use el método del trabajo virtual.

***9-36.** Resuelva el problema 9-35 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-35/9-36

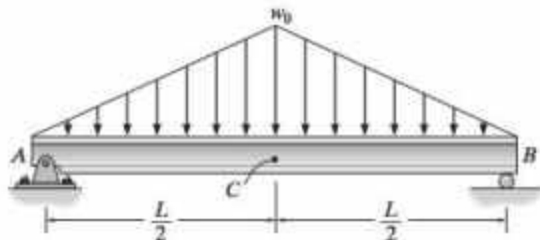
9-37. Determine la pendiente y el desplazamiento en el punto B . Suponga que el soporte en A es un pasador y en C es un rodillo. Tome en cuenta la energía de deformación adicional debida a la fuerza cortante. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 300$ pulg⁴, $G = 12(10^3)$ ksi y suponga que AB tiene un área en su sección transversal de $A = 7.50$ pulg². Use el método del trabajo virtual.



Prob. 9-37

9-38. Determine el desplazamiento del punto C . Use el método del trabajo virtual. EI es constante.

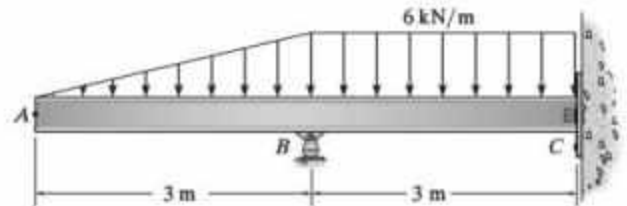
9-39. Resuelva el problema 9-38 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-38/9-39

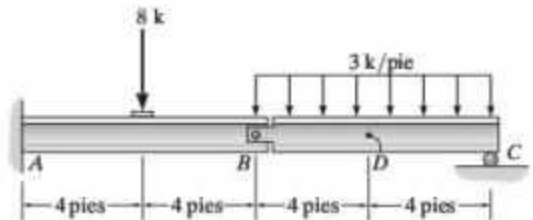
***9-40.** Determine la pendiente y el desplazamiento en el punto A . Suponga que C está articulado. Use el principio del trabajo virtual. EI es constante.

9-41. Resuelva el problema 9-40 usando el teorema de Castigliano.



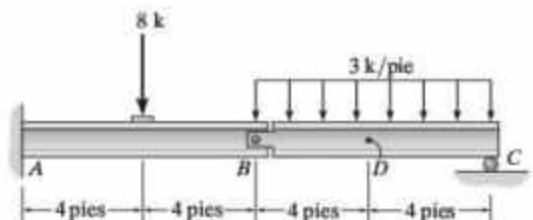
Probs. 9-40/9-41

9-42. Determine el desplazamiento en el punto D . Use el principio del trabajo virtual. EI es constante.



Prob. 9-42

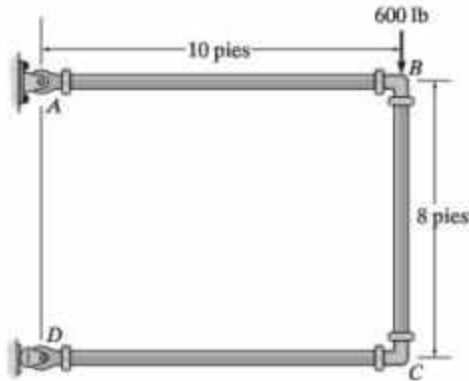
9-43. Determine el desplazamiento en el punto D . Use el teorema de Castigliano. EI es constante.



Prob. 9-43

***9-44.** Use el método del trabajo virtual para determinar la deflexión vertical en el soporte de oscilador D . EI es constante.

9-45. Resuelva el problema 9-44 usando el teorema de Castigliano.

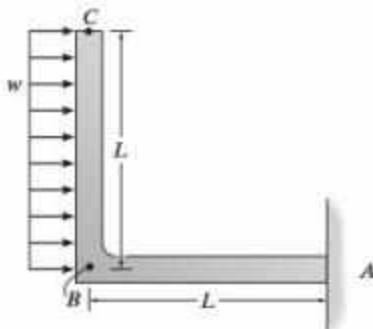


Probs. 9-44/9-45

9-46. El marco en forma de L se compone de dos segmentos, cada uno de longitud L y rigidez a la flexión EI . Si se somete a la carga uniformemente distribuida, determine el desplazamiento horizontal del extremo C . Use el método del trabajo virtual.

9-47. El marco en forma de L se compone de dos segmentos, cada uno de longitud L y rigidez a la flexión EI . Si se somete a la carga uniformemente distribuida, determine el desplazamiento vertical del punto B . Use el método del trabajo virtual.

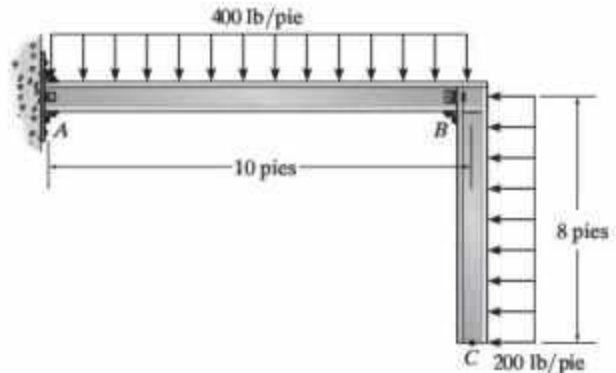
***9-48.** Resuelva el problema 9-47 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-46/9-47/9-48

9-49. Determine el desplazamiento horizontal del punto C . EI es constante. Use el método del trabajo virtual.

9-50. Resuelva el problema 9-49 usando el teorema de Castigliano.

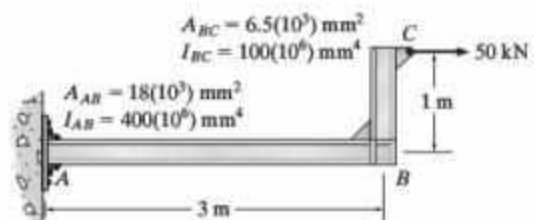


Probs. 9-49/9-50

9-51. Determine la deflexión vertical en C . El área de la sección transversal y el momento de inercia de cada segmento se muestran en la figura. Considere que $E = 200$ GPa. Suponga que A es un soporte fijo. Use el método del trabajo virtual.

***9-52.** Resuelva el problema 9-51, incluyendo el efecto de la energía de deformación cortante y axial.

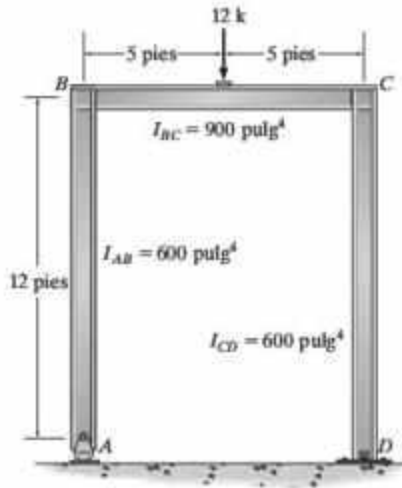
9-53. Resuelva el problema 9-51 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-51/9-52/9-53

9-54. Determine la pendiente en A . Considere que $E = 29(10^3)$ ksi. El momento de inercia de cada segmento del marco se indica en la figura. Suponga que D es un soporte articulado. Use el método del trabajo virtual.

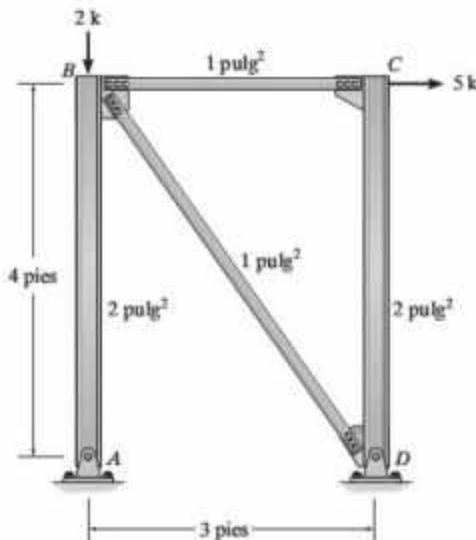
9-55. Resuelva el problema 9-54 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-54/9-55

9-56. Use el método del trabajo virtual y determine la deflexión horizontal en C . El área de la sección transversal de cada elemento se indica en la figura. Suponga que los elementos están articulados en sus extremos. $E = 29(10^3)$ ksi.

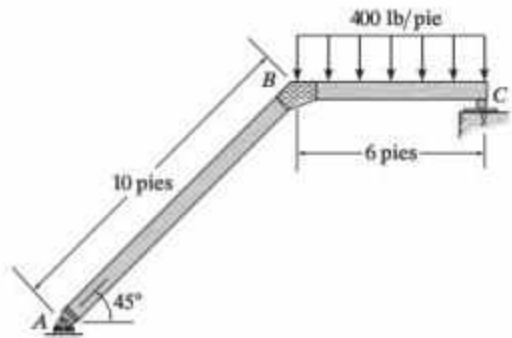
9-57. Resuelva el problema 9-56 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-56/9-57

9-58. Use el método del trabajo virtual y determine la deflexión horizontal en C . EI es constante. Hay un pasador en A . Suponga que C es un rodillo y que B es una junta fija.

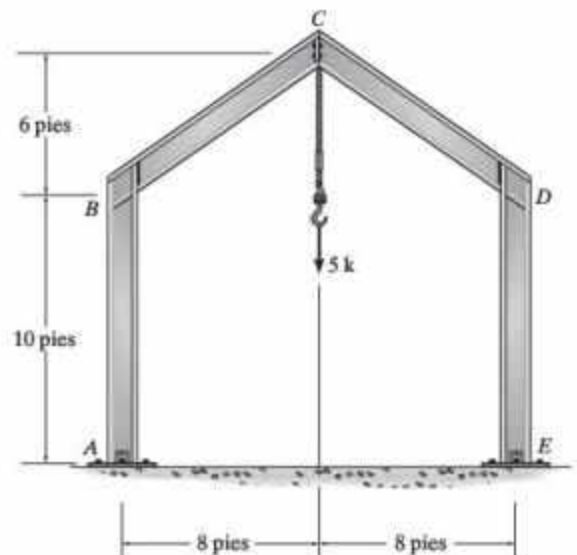
9-59. Resuelva el problema 9-58 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 9-58/9-59

9-60. El marco está sometido a la carga de 5 k. Determine el desplazamiento vertical en C . Suponga que los elementos están articulados en A , C y E , y que están conectados fijamente en las juntas acodadas B y D . EI es constante. Use el método del trabajo virtual.

9-61. Resuelva el problema 9-60 usando el teorema de Castigliano.



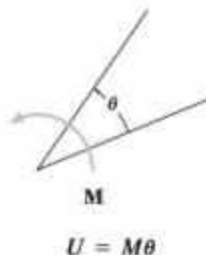
Probs. 9-60/9-61

REPASO DEL CAPÍTULO

Todos los métodos de energía se basan en el principio de la conservación de la energía, el cual establece que el trabajo realizado por todas las fuerzas externas que actúan sobre la estructura, U_e , se transforman en trabajo interno o energía de deformación, U_i , desarrollada en los elementos cuando la estructura se deforma.

$$U_e = U_i$$

Una fuerza (momento) realiza trabajo U cuando experimenta un desplazamiento (rotación) en la dirección de la fuerza (momento).



El principio del trabajo virtual se basa en el trabajo realizado por una fuerza unitaria "virtual" o imaginaria. Si debe obtenerse la deflexión (rotación) en un punto de la estructura, se aplica una fuerza (momento de par) unitaria virtual a la estructura en ese punto. Esto ocasiona cargas virtuales internas en la estructura. El trabajo virtual se desarrolla cuando las cargas reales se colocan sobre la estructura provocando su deformación.

Los desplazamientos en las armaduras se encuentran utilizando

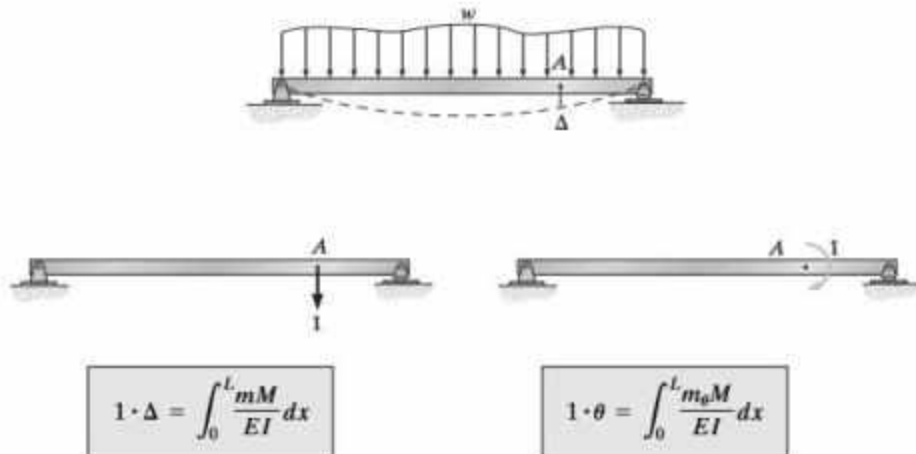
$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE}$$

Si el desplazamiento es causado por la temperatura o errores de fabricación, entonces

$$1 \cdot \Delta = \sum n\alpha \Delta T L$$

$$1 \cdot \Delta = \sum n \Delta L$$

Para las vigas y los marcos, el desplazamiento (rotación) se define a partir de



El segundo teorema de Castigliano, también llamado el método del trabajo mínimo, puede usarse para determinar las deflexiones en las estructuras que respondan elásticamente. Se afirma que el desplazamiento (rotación) en un punto de una estructura es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación en la estructura con respecto a una fuerza P (momento de par M') que actúa en el punto y en la dirección del desplazamiento (rotación). Para una armadura

$$\Delta = \sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE}$$

Para vigas y marcos

$$\Delta = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$$

$$\theta = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI}$$



Las juntas de este marco de concreto conectadas fijamente hacen que la estructura sea estáticamente indeterminada.

Análisis de estructuras estáticamente indeterminadas por el método de la fuerza

En este capítulo se aplicará el método de la fuerza o de la flexibilidad para analizar armaduras, vigas y marcos estáticamente indeterminados. Al final del capítulo se presentará un método para dibujar la línea de influencia para una viga o un marco estáticamente indeterminado.

10.1 Estructuras estáticamente indeterminadas

En la sección 2-4 se estableció que una estructura de cualquier tipo se clasifica como *estáticamente indeterminada* cuando la cantidad de reacciones o fuerzas internas desconocidas excede a la de las ecuaciones de equilibrio disponibles para su análisis. En esta sección se analizarán los beneficios de utilizar las estructuras indeterminadas y dos formas fundamentales en las que pueden analizarse. Tenga en cuenta que la mayoría de las estructuras diseñadas en la actualidad son estáticamente indeterminadas. Esta indeterminación puede surgir como resultado de la adición de soportes o elementos, o debido a la forma general de la estructura. Por ejemplo, las construcciones de concreto reforzado son casi siempre estáticamente indeterminadas porque las columnas y las vigas se vacían como elementos continuos a través de las juntas y sobre los soportes.

Ventajas y desventajas. Aunque el análisis de una estructura estáticamente indeterminada es más complicado que el de una estáticamente determinada, por lo general hay varias razones muy importantes para la elección de este tipo de estructura durante el diseño. Pero aún más importante es que, para una carga dada, el esfuerzo máximo y la deflexión de una estructura indeterminada son generalmente *más pequeños* que los de su contraparte estáticamente determinada. Por ejemplo, la viga fijamente apoyada y estáticamente indeterminada de la figura 10-1a estará sometida a un momento máximo de $M_{\max} = PL/8$, mientras que la misma viga, cuando está simplemente apoyada, figura 10-1b, se someterá a dos veces el momento, es decir, $M_{\max} = PL/4$. En consecuencia, la viga fijamente apoyada tiene un cuarto de la deflexión y la mitad del esfuerzo en el centro que la viga simplemente apoyada.

Otra razón importante para seleccionar una estructura estáticamente indeterminada es que tiene una tendencia a redistribuir su carga en sus soportes redundantes en las situaciones donde ocurre un diseño defectuoso o se presenta una sobrecarga. En estos casos, la estructura mantiene su estabilidad y se evita el colapso. Lo anterior es particularmente importante cuando se imponen sobre la estructura cargas laterales *repentinas*, como las provocadas por el viento o los sismos. Para ilustrar esto, considere de nuevo la viga con un extremo fijo de la figura 10-1a. A medida que **P** aumenta, el material de la viga empieza a *ceder* en sus paredes y en su centro formando “articulaciones plásticas” localizadas, las cuales hacen que la viga se deforme, como si estuviera conectada mediante bisagras o pasadores en estos puntos. Aunque la deflexión se haga grande, las paredes desarrollarán fuerzas horizontales y reacciones de momento que podrán sostener la viga y así evitar que se colapse por completo. En el caso de la viga simplemente apoyada de la figura 10-1b, una carga **P** excesiva hará que la “articulación plástica” se forme sólo en el centro de la viga y, debido a la gran deformación vertical, los soportes no desarrollarán ninguna fuerza horizontal ni reacciones de momento que pudieran ser necesarias para evitar un colapso total.

Aunque las estructuras estáticamente indeterminadas pueden soportar una carga con elementos más delgados y tienen mayor estabilidad en comparación con sus contrapartes estáticamente determinadas, hay casos en los que, por el contrario, estas ventajas pueden convertirse en desventajas. El ahorro de costos en material debe compararse con el costo adicional necesario para fabricar la estructura, puesto que en muchas ocasiones la construcción de los soportes y las juntas de una estructura indeterminada es más costosa que la de una determinada. Sin embargo, más importante aún es que las estructuras estáticamente indeterminadas tienen reacciones redundantes en los soportes, es necesario tener mucho cuidado para evitar el desplazamiento diferencial de los soportes, ya que este efecto introduce esfuerzos internos en la estructura. Por ejemplo, se ajustara si la pared ubicada en un extremo de la viga fija que se muestra en la figura 10-1a, se desarrollaría un esfuerzo en la viga debido a esta deformación “obligada”. Por otra parte, si la viga estuviera simplemente apoyada o estáticamente determinada, figura 10-1b, entonces cualquier ajuste de su extremo no ocasionaría una deformación de la viga y, por lo tanto, no se desarrollará esfuerzo en la viga. Entonces, en general, cualquier deformación como la causada por el desplazamiento relativo de un soporte o los cambios en la longitud de los elementos por errores de fabricación o cambios de temperatura, introduce esfuerzos adicionales en la estructura, los cuales deben ser considerados en el diseño de estructuras indeterminadas.



Figura 10-1

Métodos de análisis. Al analizar cualquier estructura indeterminada es necesario satisfacer los requisitos de *equilibrio*, *compatibilidad* y *fuerza-desplazamiento* para la estructura. El *equilibrio* se satisface cuando las fuerzas de reacción mantienen la estructura en reposo y la *compatibilidad* se cumple cuando los diferentes segmentos de la estructura se ajustan sin interrupciones o traslapes intencionales. Los requisitos de *fuerza-desplazamiento* dependerán de la forma en que responda el material; en este texto se ha supuesto una respuesta elástica lineal. En general, hay dos maneras diferentes de satisfacer estos requisitos cuando se analiza una estructura estáticamente indeterminada: el *método de la fuerza* o de la *flexibilidad* y el *método del desplazamiento* o de la *rigidez*.

Método de la fuerza. Originalmente, James Clerk Maxwell desarrolló en 1864 el método de la fuerza y posteriormente fue refinado por Otto Mohr y Heinrich Müller-Breslau. Este método fue uno de los primeros que existió para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas. Como la compatibilidad forma la base de este método, en ocasiones se le ha llamado el *método de la compatibilidad* o el *método de los desplazamientos consistentes*. Este método consiste en escribir las ecuaciones que satisfacen los *requisitos de compatibilidad* y de *fuerza-desplazamiento* para la estructura con el fin de determinar las *fuerzas* redundantes. Una vez que se han determinado estas fuerzas, se calcula el resto de las fuerzas de reacción sobre la estructura mediante el cumplimiento de los requisitos de equilibrio. Los principios fundamentales involucrados en la aplicación de este método son fáciles de entender y desarrollar, y se estudiarán en este capítulo.

Método del desplazamiento. Este método se basa en escribir primero las relaciones de fuerza-desplazamiento para los elementos, para luego satisfacer los *requisitos de equilibrio* de la estructura. En este caso las *incógnitas* en las ecuaciones son *desplazamientos*. Una vez que se han obtenido los desplazamientos, las fuerzas se determinan a partir de las ecuaciones de compatibilidad y de fuerza-desplazamiento. En los capítulos 11 y 12 se estudiarán algunas de las técnicas clásicas que se utilizan para aplicar el método del desplazamiento. Debido a que en la actualidad casi todo el software para el análisis estructural se desarrolla usando este método, en los capítulos 14, 15 y 16 se presentará una formulación de la matriz del método del desplazamiento.

Cada uno de estos dos métodos de análisis, que se delinean en la figura 10-2, tiene sus ventajas y desventajas particulares, dependiendo de la geometría de la estructura y de su grado de indeterminación. Al terminar la presentación de los métodos, se dará una explicación sobre la utilidad de cada uno de ellos.

	Incógnitas	Ecuaciones usadas para la solución	Coefficientes de las incógnitas
Método de la fuerza	Fuerzas	Compatibilidad y fuerza-desplazamiento	Coefficientes de flexibilidad
Método del desplazamiento	Desplazamientos	Equilibrio y fuerza-desplazamiento	Coefficientes de rigidez

Figura 10-2

10.2 Método de análisis de la fuerza: Procedimiento general

Tal vez la mejor manera de ilustrar los principios involucrados en el método de análisis de la fuerza sea considerar la viga que se muestra en la figura 10-3a. Si se dibujara su diagrama de cuerpo libre, habría cuatro reacciones desconocidas en los soportes; y como se puede disponer de tres ecuaciones de equilibrio para obtener una solución, la viga es indeterminada de primer grado. Por lo tanto, se requiere una ecuación adicional para la solución. Con el fin de obtener esta ecuación se usará el principio de superposición y se considerará la *compatibilidad del desplazamiento* en uno de los soportes. Esto se hace al elegir una de las reacciones en los soportes como “redundante” y al eliminar temporalmente su efecto sobre la viga de manera que ésta se vuelva estáticamente determinada y estable. Esta viga se conoce como la *estructura primaria*. Aquí se eliminará la acción de restricción del oscilador en B . Como resultado, la carga P hará que B se desplace hacia abajo en una cantidad Δ_B , como se muestra en la figura 10-3b. Sin embargo, por superposición, la reacción desconocida en B , es decir, B_y , hace que la viga en B se desplace Δ'_{BB} hacia arriba, figura 10-3c. Aquí, la primera literal de esta notación de doble subíndice se refiere al punto (B) donde se especifica la deflexión, y la segunda literal se refiere al punto (B) donde actúa la reacción desconocida. Si se supone que los desplazamientos positivos actúan hacia arriba, entonces, a partir de las figuras 10-3a a 10-3c, es posible escribir la ecuación de compatibilidad necesaria en el oscilador como

$$(+\uparrow) \quad 0 = -\Delta_B + \Delta'_{BB}$$

Ahora se indicará el desplazamiento en B causado por una *carga unitaria* que actúa en la dirección de B_y como el *coeficiente de flexibilidad lineal* f_{BB} , figura 10-3d. Si se emplea el mismo esquema anterior para esta notación de doble subíndice, f_{BB} es la deflexión en B causada por una carga unitaria en B . Como el material se comporta de una manera lineal-elástica, una fuerza B_y que actúa en B , en vez de la carga unitaria, causará un incremento proporcional en f_{BB} . Por lo tanto, es posible escribir

$$\Delta'_{BB} = B_y f_{BB}$$

Cuando se escribe en este formato, puede verse que el coeficiente de flexibilidad lineal f_{BB} es una *medida de la deflexión por unidad de fuerza*, por lo que sus unidades son m/N , pie/lb , etcétera. Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad anterior puede escribirse en términos de la incógnita B_y como

$$0 = -\Delta_B + B_y f_{BB}$$

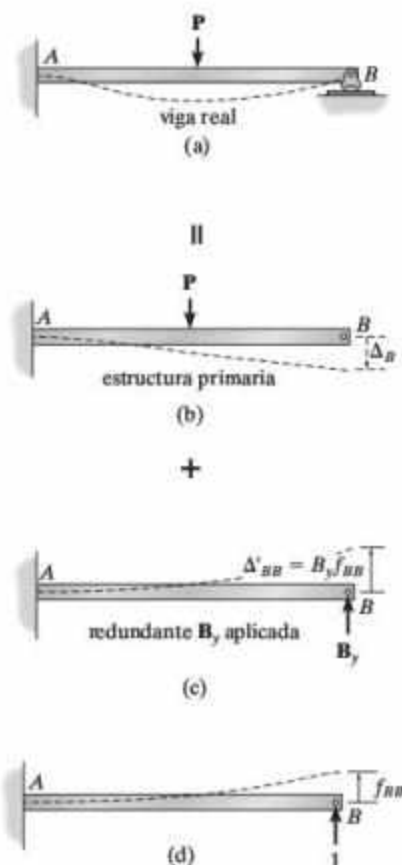


Figura 10-3

Si se emplean los métodos de los capítulos 8 o 9, o la tabla de deflexiones que se encuentra detrás de la portada del libro, es posible obtener las relaciones adecuadas de carga-desplazamiento para la deflexión Δ_B , figura 10-3b, y el coeficiente de flexibilidad f_{BB} , figura 10-3d; asimismo puede determinarse la solución para B_y , es decir, $B_y = \Delta_B/f_{BB}$. Una vez hecho esto, se pueden encontrar las tres reacciones en la pared A a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Como se indicó anteriormente, la elección de la redundante es *arbitraria*. Por ejemplo, el momento en A , figura 10-4a, puede determinarse *directamente* al eliminar la capacidad de la viga para soportar un momento en A , es decir, al sustituir el soporte fijo por un pasador. Como se muestra en la figura 10-4b, la rotación en A ocasionada por la carga P es θ_A , y la rotación en A causada por la redundante M_A en A es θ'_{AA} , figura 10-4c. Si se denota un *coeficiente de flexibilidad angular* α_{AA} como el desplazamiento angular en A causado por un momento de par unitario aplicado sobre A , figura 10-4d, entonces,

$$\theta'_{AA} = M_A \alpha_{AA}$$

Por lo tanto, el coeficiente de flexibilidad angular mide el desplazamiento angular por unidad de momento par, y por lo tanto tiene unidades de $\text{rad}/\text{N} \cdot \text{m}$ o de $\text{rad}/\text{lb} \cdot \text{pie}$, etcétera. Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad para la rotación en A requiere que,

$$(\uparrow+) \quad 0 = \theta_A + M_A \alpha_{AA}$$

En este caso, $M_A = -\theta_A/\alpha_{AA}$, un valor negativo; que simplemente significa que M_A actúa en una dirección opuesta a la del momento de par unitario.

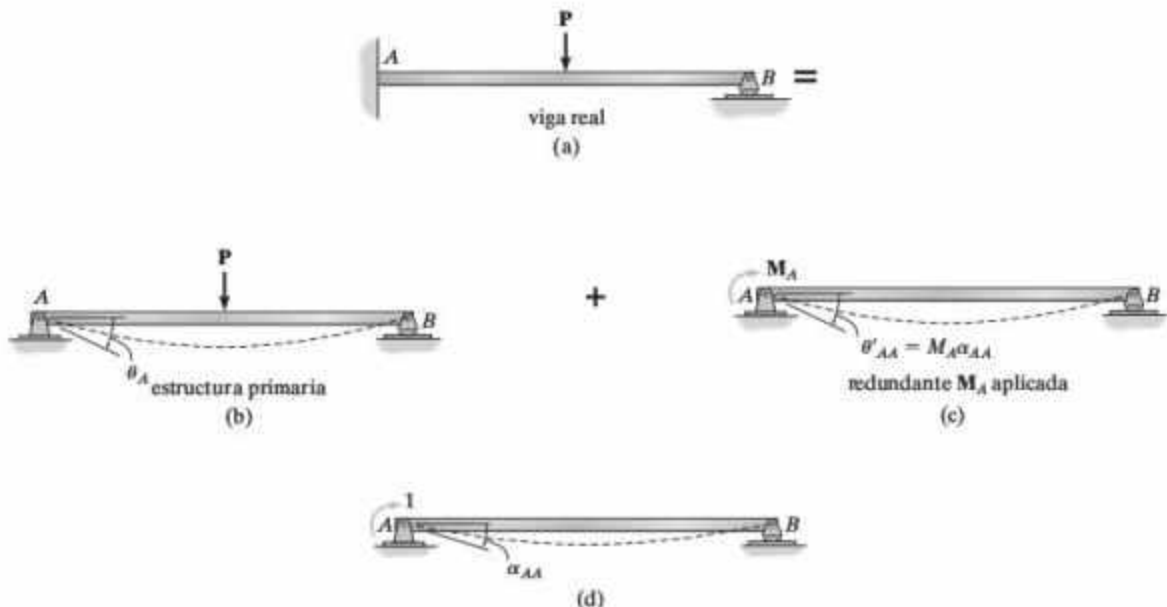


Figura 10-4

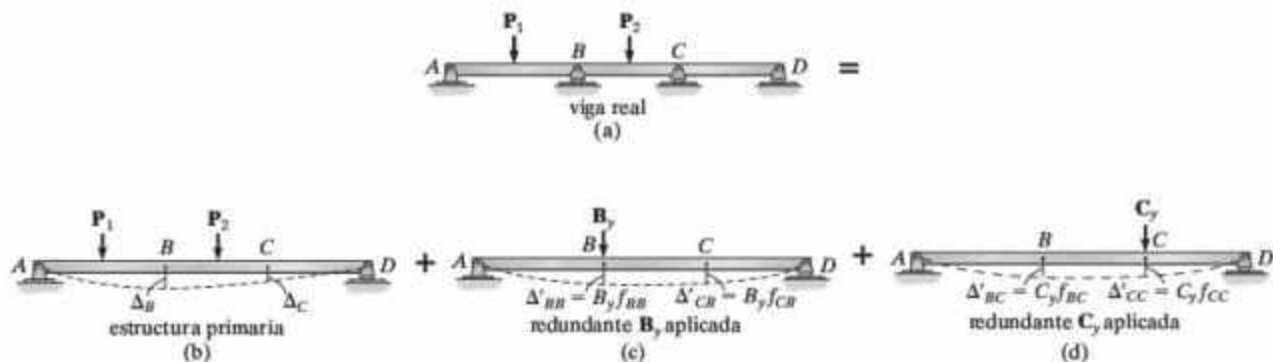


Figura 10-5

En la figura 10-5a se da un tercer ejemplo que ilustra la aplicación del método de la fuerza. Aquí la viga es indeterminada de segundo grado, y por lo tanto se requieren dos ecuaciones de compatibilidad para obtener la solución. Se elegirán las fuerzas verticales en los soportes de rodillo B y C como redundantes. La viga estáticamente determinada resultante se deforma como se muestra en la figura 10-5b cuando se retiran las fuerzas redundantes. Cada una de estas fuerzas, que se supone actúan hacia abajo, deforma la viga como se muestra en las figuras 10-5c y 10-5d, respectivamente. Aquí, los coeficientes de flexibilidad f_{BB} y f_{CB} se encuentran a partir de una carga unitaria que actúa en B , figura 10-5e; y f_{CC} y f_{BC} se hallan a partir de una carga unitaria que actúa en C , figura 10-5f. Por superposición, las ecuaciones de compatibilidad para la deflexión en B y C son, respectivamente

$$\begin{aligned} (+\downarrow) \quad 0 &= \Delta_B + B_y f_{BB} + C_y f_{BC} \\ (+\downarrow) \quad 0 &= \Delta_C + B_y f_{CB} + C_y f_{CC} \end{aligned} \quad (10-1)$$

Una vez establecidas las relaciones carga-desplazamiento utilizando los métodos de los capítulos 8 o 9, se pueden resolver simultáneamente estas ecuaciones para obtener las dos fuerzas desconocidas, B_y y C_y .

Después de haber ilustrado la aplicación del método de análisis de la fuerza mediante un ejemplo, ahora se analizará su aplicación en términos generales y luego se empleará como base para la solución de problemas relacionados con armaduras, vigas y marcos. Sin embargo, para todos estos casos tenga en cuenta que como el método depende de la superposición de desplazamientos, es necesario que el material permanezca elástico lineal cuando se somete a una carga. Además, considere que cualquier carga de reacción externa o interna en un punto de la estructura puede determinarse directamente al liberar en primer lugar la capacidad de la estructura para soportar la carga, y después escribir una ecuación de compatibilidad en el punto. Vea el ejemplo 10-4.

* f_{BB} es la deflexión en B causada por una carga unitaria en B ; f_{CB} es la deflexión en C causada por una carga unitaria en B .

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento ofrece un método general para determinar las reacciones o cargas internas de estructuras estáticamente indeterminadas utilizando el método de análisis de la fuerza o la flexibilidad.

Principio de superposición

Determine el número de grados n en que la estructura es indeterminada. Después, especifique las n fuerzas o los n momentos redundantes desconocidos que deben retirarse de la estructura para que sea estáticamente determinada y estable. Utilizando el principio de superposición, dibuje la estructura estáticamente indeterminada y muestre que es igual a una serie de estructuras estáticamente determinadas correspondientes. La estructura primaria soporta las mismas cargas externas que la estructura estáticamente indeterminada, y cada una de las estructuras que se añaden a la estructura primaria muestra la estructura cargada con una fuerza o momento redundante separado. También, trace la curva elástica en cada estructura e indique simbólicamente el desplazamiento o la rotación en el punto de cada fuerza o momento redundante.

Ecuaciones de compatibilidad

Escriba una ecuación de compatibilidad para el desplazamiento o la rotación en cada punto donde haya una fuerza o momento redundante. Estas ecuaciones deben expresarse en términos de las redundantes desconocidas y sus correspondientes coeficientes de flexibilidad obtenidos de las cargas o momentos de par unitarios que son colineales con las fuerzas o momentos redundantes.

Determine todas las deflexiones y todos los coeficientes de flexibilidad empleando la tabla que aparece detrás de la portada, o los métodos de los capítulos 8 o 9.* Sustituya estas relaciones de carga-desplazamiento en las ecuaciones de compatibilidad y resuelva las redundantes desconocidas. En particular, si el valor numérico de una redundante es negativo, indica que la redundante actúa opuesta a su fuerza unitaria o momento unitario correspondiente.

Ecuaciones de equilibrio

Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la estructura. Como las fuerzas y/o momentos redundantes ya han sido calculados, las reacciones desconocidas restantes pueden determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Es necesario tener en cuenta que una vez que se hayan obtenido todas las reacciones en los soportes, es posible dibujar los diagramas de fuerza cortante y de momento, así como determinar la deformación en cualquier punto de la estructura mediante los mismos métodos descritos anteriormente para estructuras estáticamente determinadas.

*Se sugiere que si el diagrama de M/EI para una viga consiste en segmentos simples, se usen los teoremas del momento de área o el método de la viga conjugada. Las vigas con diagramas M/EI complicados, es decir, aquellas que presentan muchos segmentos curvos (parabólicos, cúbicos, etcétera) pueden analizarse fácilmente utilizando el método del trabajo virtual, o el segundo teorema de Castigliano.

10.3 Teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos; Ley de Betti

Cuando Maxwell desarrolló el método de análisis de la fuerza, también publicó el teorema que relaciona los coeficientes de flexibilidad de cualquiera de los dos puntos en una estructura elástica, ya sea una armadura, una viga o un marco. Este teorema se conoce como el teorema de los desplazamientos recíprocos y puede enunciarse como sigue: *El desplazamiento de un punto B en una estructura debido a una carga unitaria que actúa en el punto A es igual al desplazamiento del punto A cuando la carga unitaria actúa en el punto B, es decir, $f_{BA} = f_{AB}$.*

La comprobación de este teorema puede realizarse fácilmente mediante el principio del trabajo virtual. Por ejemplo, considere la viga de la figura 10-6. Cuando una carga unitaria real actúa en A, suponga que los momentos internos en la viga están representados por m_A . Para determinar el coeficiente de flexibilidad en B, es decir, f_{BA} , se coloca una carga virtual unitaria en B, figura 10-7, y se calculan los momentos internos m_B . Entonces, al aplicar la ecuación 9-18 se obtiene

$$f_{BA} = \int \frac{m_B m_A}{EI} dx$$

Del mismo modo, si debe determinarse el coeficiente de flexibilidad f_{AB} cuando una carga unitaria real actúa en B, figura 10-7, entonces m_B representa los momentos internos en la viga debido a una carga unitaria real. Por otra parte, m_A representa los momentos internos debidos a una carga unitaria virtual en A, figura 10-6. Por lo tanto,

$$f_{AB} = \int \frac{m_A m_B}{EI} dx$$

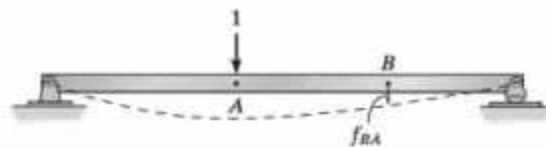


Figura 10-6

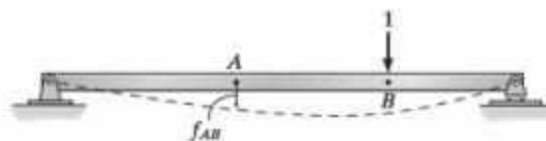


Figura 10-7

Por supuesto, ambas integrales dan el mismo resultado, lo que demuestra el teorema, el cual también se aplica en las rotaciones recíprocas, y puede enunciarse como sigue: *La rotación en el punto B de una estructura debida al momento de par unitario que actúa en el punto A es igual a la rotación en el punto A, cuando el momento de par unitario actúa en el punto B.* Por otra parte, si se usa una fuerza unitaria y un momento concentrado unitario, aplicados en puntos separados de la estructura, también se puede establecer que: *la rotación en radianes en el punto B de una estructura debida a una carga unitaria que actúa en la junta A es igual al desplazamiento en el punto A, cuando un momento concentrado unitario actúa en el punto B.*

Como consecuencia de este teorema, es posible ahorrarse algunos trabajos al aplicar el método de la fuerza a los problemas que son estáticamente indeterminados de segundo grado o de un grado superior. Por ejemplo, en las ecuaciones 10-1 sólo debe calcularse uno de los dos coeficientes de flexibilidad f_{BC} o f_{CB} , puesto que $f_{BC} = f_{CB}$. Por otra parte, el teorema de los desplazamientos recíprocos tiene aplicaciones en el análisis de modelos estructurales y en la construcción de líneas de influencia con el principio de Müller-Breslau (vea la sección 10-10).

Cuando el teorema de los desplazamientos recíprocos se formaliza en un sentido más general, se conoce como la *ley de Betti*. Dicho brevemente: El trabajo virtual δU_{AB} realizado por un sistema de fuerzas $\Sigma \mathbf{P}_B$ que experimentan un desplazamiento causado por un sistema de fuerzas $\Sigma \mathbf{P}_A$ es igual al trabajo virtual δU_{BA} causado por las fuerzas $\Sigma \mathbf{P}_A$ cuando la estructura se deforma debido al sistema de fuerzas de $\Sigma \mathbf{P}_B$. En otras palabras, $\delta U_{AB} = \delta U_{BA}$. La comprobación de este enunciado es similar a la dada anteriormente para el teorema de los desplazamientos recíprocos.

10.4 Método de análisis de la fuerza: Vigas

El método de la fuerza aplicado a las vigas se describió de manera general en la sección 10-2. Utilizando el "procedimiento de análisis" que también se vio en esa misma sección, se presentan ahora varios ejemplos que ilustran la aplicación de esta técnica.



Estas traveses de puente son estáticamente indeterminadas puesto que son continuas sobre sus pilares.

EJEMPLO 10.1

Determine la reacción en el soporte de rodillo B de la viga que se muestra en la figura 10-8a. EI es constante.

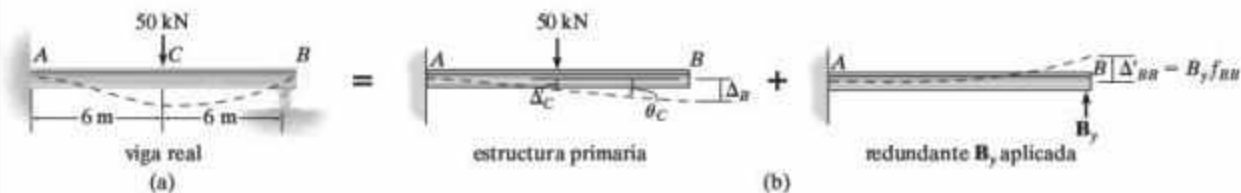


Figura 10-8

SOLUCIÓN

Principio de superposición. Por inspección, la viga es estáticamente indeterminada de primer grado. La redundante se tomará como B_y de modo que esta fuerza pueda determinarse *directamente*. En la figura 10-8b se muestra la aplicación del principio de superposición. Observe que la remoción de la redundante requiere que se retire el soporte de rodillo o la acción restrictiva de la viga en la dirección de B_y . Aquí se ha supuesto que B_y actúa hacia arriba sobre la viga.

Ecuación de compatibilidad. Si se toma el desplazamiento positivo como dirigido hacia arriba, figura 10-8b, se tiene

$$(+\uparrow) \quad 0 = -\Delta_B + B_y f_{BB} \quad (1)$$

Los términos Δ_B y f_{BB} se obtienen fácilmente usando la tabla de la portada interior. En particular, observe que $\Delta_B = \Delta_C + \theta_C(6\text{ m})$. Por lo tanto,

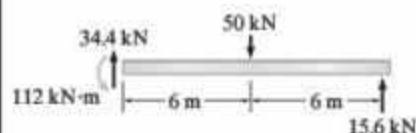
$$\begin{aligned} \Delta_B &= \frac{P(L/2)^3}{3EI} + \frac{P(L/2)^2}{2EI} \left(\frac{L}{2} \right) \\ &= \frac{(50\text{ kN})(6\text{ m})^3}{3EI} + \frac{(50\text{ kN})(6\text{ m})^2}{2EI} (6\text{ m}) = \frac{9000\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow \\ f_{BB} &= \frac{PL^3}{3EI} = \frac{1(12\text{ m})^3}{3EI} = \frac{576\text{ m}^3}{EI} \uparrow \end{aligned}$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación (1) resulta

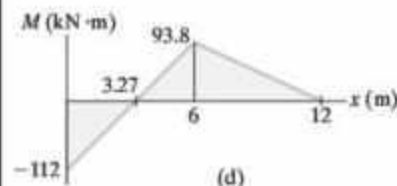
$$(+\uparrow) \quad 0 = -\frac{9000}{EI} + B_y \left(\frac{576}{EI} \right) \quad B_y = 15.6\text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Si esta reacción se coloca sobre el diagrama de cuerpo libre de la viga, las reacciones en A pueden obtenerse a partir de las tres ecuaciones de equilibrio, figura 10-8c.

Después de haber determinado todas las reacciones, puede construirse el diagrama de momento como se muestra en la figura 10-8d.



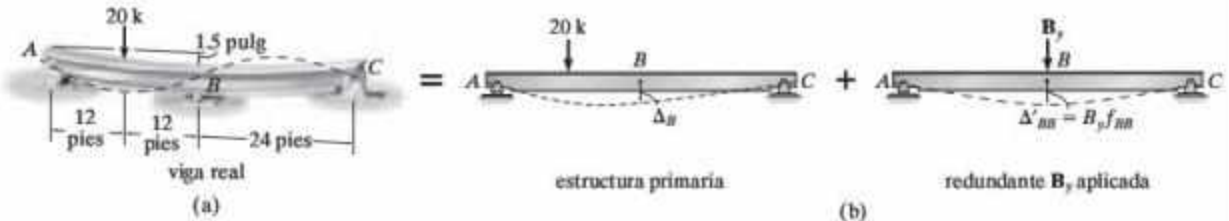
(c)



(d)

EJEMPLO 10.2

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga que se muestra en la figura 10-9a. El soporte en B se asienta 1.5 pulg. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 750$ pulg⁴.

**Figura 10-9****SOLUCIÓN**

Principio de superposición. Por inspección, la viga es indeterminada de primer grado. Se elegirá el soporte central B como redundante, de manera que se elimina el rodillo en B , figura 10-9b. Aquí se supone que B_y actúa hacia abajo sobre la viga.

Ecuación de compatibilidad. Con referencia al punto B de la figura 10-9b, usando unidades en pulgadas, se requiere

$$(+\downarrow) \quad 1.5 \text{ pulg} = \Delta_B + B_y f_{BB} \quad (1)$$

Se utilizará la tabla de la portada interior. Observe que para Δ_B la ecuación de la curva de deflexión requiere que $0 < x < a$. Como $x = 24$ pies, entonces $a = 36$ pies. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2) = \frac{20(12)(24)}{6(48)EI}[(48)^2 - (12)^2 - (24)^2] \\ &= \frac{31,680 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \end{aligned}$$

$$f_{BB} = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{1(48)^3}{48EI} = \frac{2304 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (1), se obtiene

$$\begin{aligned} 1.5 \text{ pulg} &= \frac{29(10^3) \text{ k/pulg}^2}{750 \text{ pulg}^4} \\ &= 31,680 \text{ k} \cdot \text{pie}^3 (12 \text{ pulg/pie})^3 + B_y (2304 \text{ k} \cdot \text{pie}^3) (12 \text{ pulg/pie})^3 \\ B_y &= -5.56 \text{ k} \end{aligned}$$

El signo negativo indica que B_y actúa *hacia arriba* sobre la viga.

EJEMPLO 10.2 (Continuación)

Ecuaciones de equilibrio. A partir del diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 10-9c se tiene

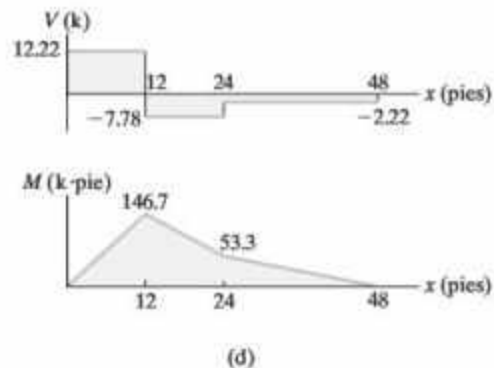
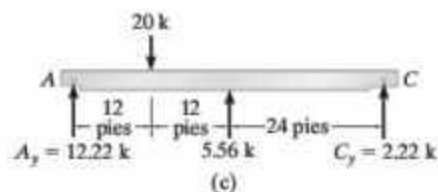
$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad -20(12) + 5.56(24) + C_y(48) = 0$$

$$C_y = 2.22 \text{ k}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 20 + 5.56 + 2.22 = 0$$

$$A_y = 12.22 \text{ k}$$

Con base en estos resultados, verifique los diagramas de fuerza cortante y de momento que se muestran en la figura 10-9d.



EJEMPLO 10.3

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga que se muestra en la figura 10-10a. EI es constante. Ignore los efectos de la carga axial.

SOLUCIÓN

Principio de superposición. Como la carga axial es insignificante, la viga es indeterminada de segundo grado. Los dos momentos en los extremos A y B se considerarán como los redundantes. La capacidad de la viga para resistir estos momentos se elimina al colocar un pasador en A y un oscilador en B . El principio de superposición aplicado a la viga se muestra en la figura 10-10b.

Ecuaciones de compatibilidad. La referencia a los puntos A y B , figura 10-10b, requiere que

$$(\uparrow +) \quad 0 = \theta_A + M_A \alpha_{AA} + M_B \alpha_{AB} \quad (1)$$

$$(\downarrow +) \quad 0 = \theta_B + M_A \alpha_{BA} + M_B \alpha_{BB} \quad (2)$$

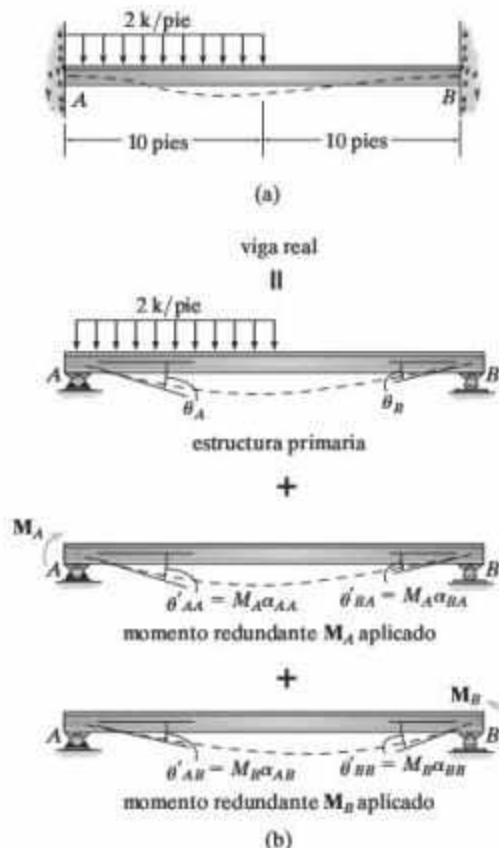


Figura 10-10

EJEMPLO 10.3 (Continuación)

Las pendientes y los coeficientes de flexibilidad angular necesarios pueden determinarse usando la tabla que se encuentra detrás de la portada. Se tiene

$$\theta_A = \frac{3wL^3}{128EI} = \frac{3(2)(20)^3}{128EI} = \frac{375}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{7wL^3}{384EI} = \frac{7(2)(20)^3}{384EI} = \frac{291.7}{EI}$$

$$\alpha_{AA} = \frac{ML}{3EI} = \frac{1(20)}{3EI} = \frac{6.67}{EI}$$

$$\alpha_{BB} = \frac{ML}{3EI} = \frac{1(20)}{3EI} = \frac{6.67}{EI}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{ML}{6EI} = \frac{1(20)}{6EI} = \frac{3.33}{EI}$$

Observe que $\alpha_{BA} = \alpha_{AB}$, es consecuencia del teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos.

Si se sustituyen los datos en las ecuaciones (1) y (2) resulta

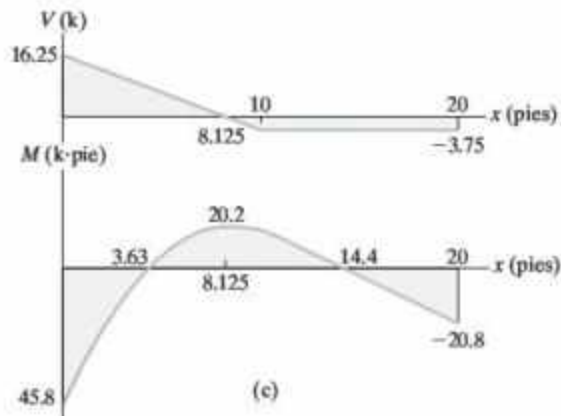
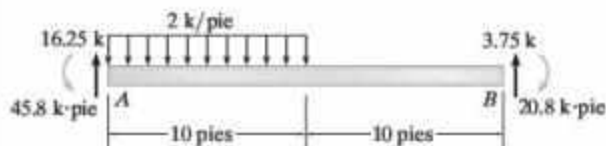
$$0 = \frac{375}{EI} + M_A \left(\frac{6.67}{EI} \right) + M_B \left(\frac{3.33}{EI} \right)$$

$$0 = \frac{291.7}{EI} + M_A \left(\frac{3.33}{EI} \right) + M_B \left(\frac{6.67}{EI} \right)$$

Al cancelar EI y resolver estas ecuaciones simultáneamente, se obtiene

$$M_A = -45.8 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad M_B = -20.8 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Con estos resultados pueden calcularse las fuerzas cortantes en los extremos, figura 10-10c, y graficarse los diagramas de cortante y de momento.



EJEMPLO 10.4

Determine las reacciones en los soportes de la viga que se muestra en la figura 10-11a. EI es constante.

SOLUCIÓN

Principio de superposición. Por inspección, la viga es indeterminada de primer grado. Aquí, con fines ilustrativos, se elegirá el momento interno en el soporte B como la redundante. En consecuencia, la viga se corta y se colocan pasadores extremos o una bisagra en B a fin de liberar *sólo* la capacidad de la viga para resistir momentos en este punto, figura 10-11b. El momento interno en B se aplica a la viga en la figura 10-11c.

Ecuaciones de compatibilidad. A partir de la figura 10-11a se requiere que la rotación relativa de un extremo de una viga con respecto al extremo de la otra viga sea igual a cero, es decir,

$$(\uparrow+) \quad \theta_B + M_B \alpha_{BB} = 0$$

donde

$$\theta_B = \theta'_B + \theta''_B$$

y

$$\alpha_{BB} = \alpha'_{BB} + \alpha''_{BB}$$

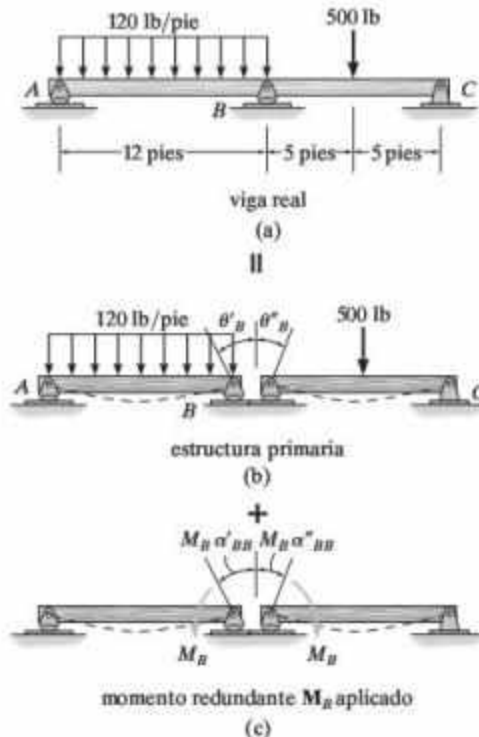


Figura 10-11

EJEMPLO 10.4 (Continuación)

Las pendientes y los coeficientes de flexibilidad angulares pueden determinarse a partir de la tabla que se presenta detrás de la portada, es decir,

$$\theta'_B = \frac{wL^3}{24EI} = \frac{120(12)^3}{24EI} = \frac{8640 \text{ lb} \cdot \text{pie}^2}{EI}$$

$$\theta''_B = \frac{PL^2}{16EI} = \frac{500(10)^2}{16EI} = \frac{3125 \text{ lb} \cdot \text{pie}^2}{EI}$$

$$\alpha'_{BB} = \frac{ML}{3EI} = \frac{1(12)}{3EI} = \frac{4 \text{ pies}}{EI}$$

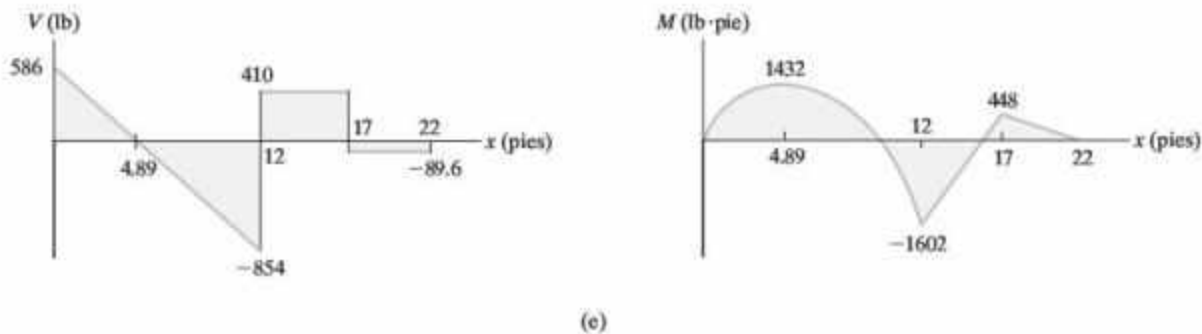
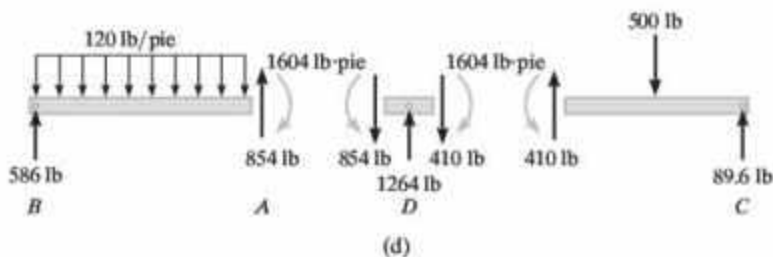
$$\alpha''_{BB} = \frac{ML}{3EI} = \frac{1(10)}{3EI} = \frac{3.33 \text{ pies}}{EI}$$

Así

$$\frac{8640 \text{ lb} \cdot \text{pie}^2}{EI} + \frac{3125 \text{ lb} \cdot \text{pie}^2}{EI} + M_B \left(\frac{4 \text{ pies}}{EI} + \frac{3.33 \text{ pies}}{EI} \right) = 0$$

$$M_B = -1604 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

El signo negativo indica que M_B actúa en la dirección opuesta a la que se muestra en la figura 10-11c. Utilizando este resultado, se calculan las reacciones en los soportes como se muestra en la figura 10-11d. Además, los diagramas de fuerza cortante y de momento son como se muestra en la figura 10-11e.



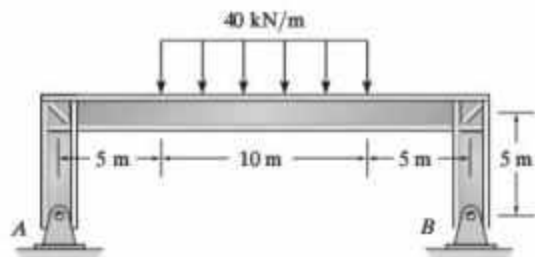
10.5 Método de análisis de la fuerza: Marcos

El método de la fuerza es muy útil para resolver problemas relacionados con marcos estáticamente indeterminados que tienen un solo nivel y una geometría inusual, como los bastidores de dos aguas. Los problemas que involucran marcos con varios niveles, o aquellos que presentan un alto grado de indeterminación, se resuelven de mejor manera mediante los métodos de pendiente-deflexión, de la distribución del momento, o de la rigidez que se analizarán en capítulos posteriores.

Los siguientes ejemplos ilustran las aplicaciones del método de la fuerza usando el procedimiento de análisis descrito en la sección 10-2.

EJEMPLO 10.5

El marco, o caballete, que se muestra en la fotografía se usa para soportar la cubierta del puente. Si se supone que EI es constante, se puede presentar un dibujo del marco junto con sus dimensiones y la carga aplicada, figura 10-12a. Determine las reacciones en los soportes.

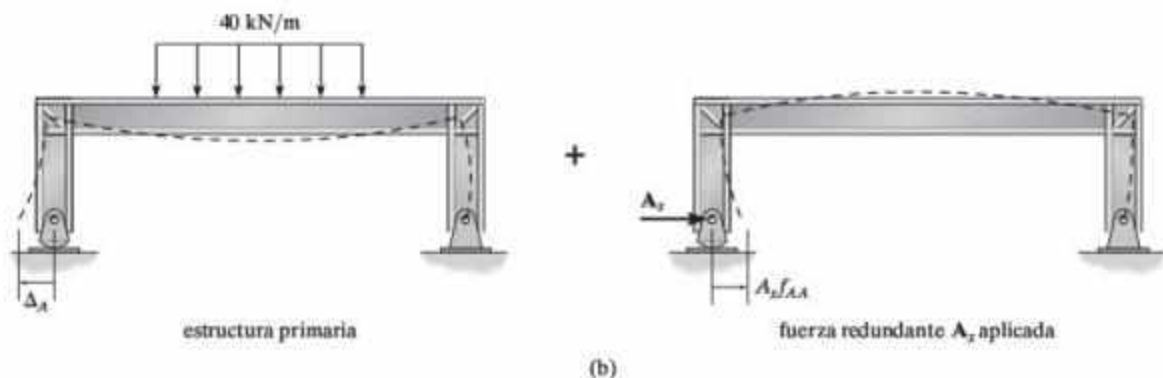


(a)

Figura 10-12

SOLUCIÓN

Principio de superposición. Por inspección, el marco es estáticamente indeterminado de primer grado. Se elegirá la reacción horizontal en A como redundante. En consecuencia, el pasador A se reemplaza por un oscilador, puesto que un soporte de este tipo no restringirá A en la dirección horizontal. El principio de superposición aplicado al modelo idealizado de la estructura se muestra en la figura 10-12b. Observe cómo se deforma el marco en cada caso.

EJEMPLO 10.5 (Continuación)

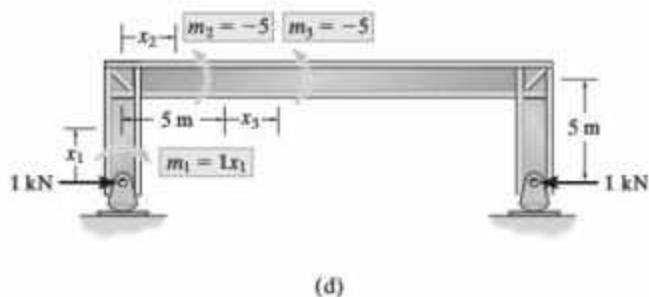
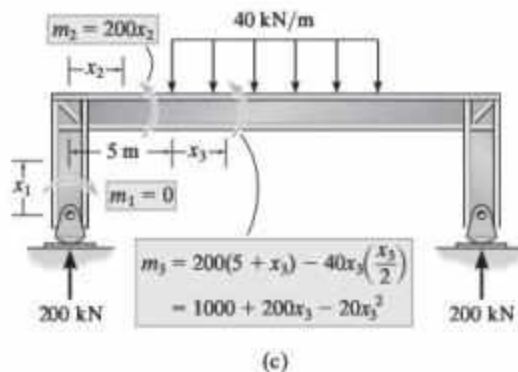
Ecuación de compatibilidad. La referencia al punto A de la figura 10-12b requiere que

$$(\rightarrow) \quad 0 = \Delta_A + A_x f_{AA} \quad (1)$$

Los términos Δ_A y f_{AA} se determinarán usando el método del trabajo virtual. Debido a la simetría de la geometría y la carga sólo se necesitan tres coordenadas x . Éstas y los momentos internos se muestran en las figuras 10-12c y 10-12d. Es importante que cada coordenada x sea la *misma* tanto para las cargas reales como para las virtuales. Además, las direcciones positivas de M y m deben ser *las mismas*.

Para Δ_A se requiere la aplicación de las cargas reales, figura 10-12c, y una carga unitaria virtual en A, figura 10-12d. Así,

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = 2 \int_0^5 \frac{(0)(1x_1)dx_1}{EI} + 2 \int_0^5 \frac{(200x_2)(-5)dx_2}{EI} \\ &\quad + 2 \int_0^5 \frac{(1000 + 200x_3 - 20x_3^2)(-5)dx_3}{EI} \\ &= 0 - \frac{25\,000}{EI} - \frac{66\,666.7}{EI} = -\frac{91\,666.7}{EI} \end{aligned}$$



Para f_{AA} se requiere la aplicación de una carga unitaria real y una carga unitaria virtual que actúe en A , figura 10-12d. Por lo tanto,

$$f_{AA} = \int_0^L \frac{mm}{EI} dx = 2 \int_0^5 \frac{(1x_1)^2 dx_1}{EI} + 2 \int_0^5 \frac{(5)^2 dx_2}{EI} + 2 \int_0^5 \frac{(5)^2 dx_3}{EI}$$

$$= \frac{583.33}{EI}$$

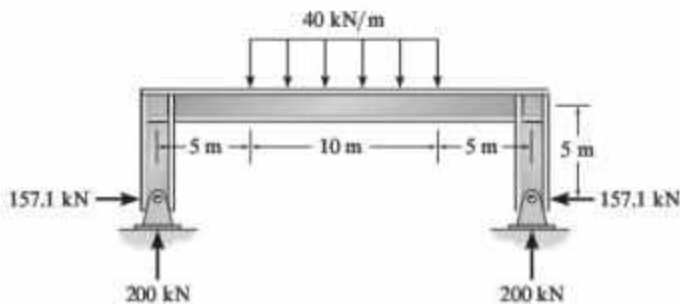
Sustituyendo los resultados en la ecuación (1) y resolviendo se obtiene

$$0 = \frac{-91\,666.7}{EI} + A_x \left(\frac{583.33}{EI} \right)$$

$$A_x = 157 \text{ kN}$$

Resp.

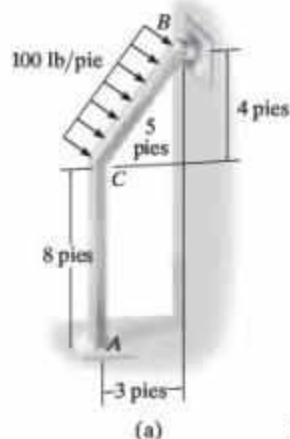
Ecuaciones de equilibrio. Con este resultado, en la figura 10-12e se muestran las reacciones sobre el modelo idealizado de la estructura.



(e)

EJEMPLO 10.6

Determine el momento en el soporte fijo A para el marco que se muestra en la figura 10-13a. EI es constante.

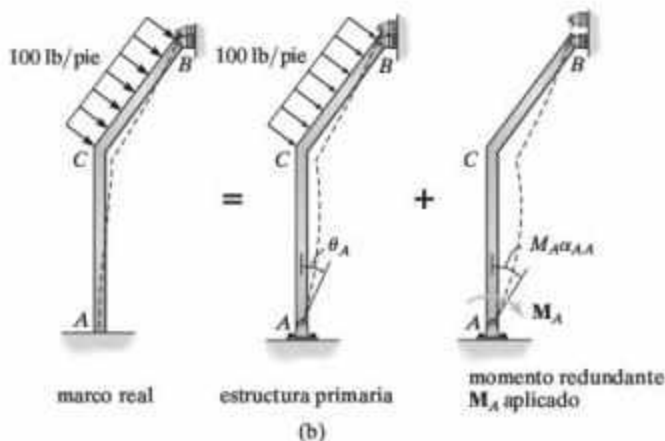
**Figura 10-13****SOLUCIÓN**

Principio de superposición. El marco es indeterminado de primer grado. Se puede obtener una solución directa de M_A al elegirlo como redundante. Así, la capacidad del marco para soportar un momento en A se elimina y por lo tanto se usa un pasador en el soporte. El principio de superposición aplicado a la estructura se muestra en la figura 10-13b.

Ecuación de compatibilidad. La referencia al punto A en la figura 10-13b requiere que

$$(\uparrow+) \quad 0 = \theta_A + M_A \alpha_{AA} \quad (1)$$

Como en el ejemplo anterior, θ_A y α_{AA} se calcula utilizando el método del trabajo virtual. Las coordenadas x del marco y los momentos internos se muestran en las figuras 10-13c y 10-13d.



Para θ_A se requiere la aplicación de las cargas reales, figura 10-13c, y un momento de par unitario virtual, figura 10-13d. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\theta_A &= \sum \int_0^L \frac{M m_\theta dx}{EI} \\ &= \int_0^8 \frac{(29.17x_1)(1 - 0.0833x_1) dx_1}{EI} \\ &\quad + \int_0^5 \frac{(296.7x_2 - 50x_2^2)(0.0667x_2) dx_2}{EI} \\ &= \frac{518.5}{EI} + \frac{303.2}{EI} = \frac{821.8}{EI}\end{aligned}$$

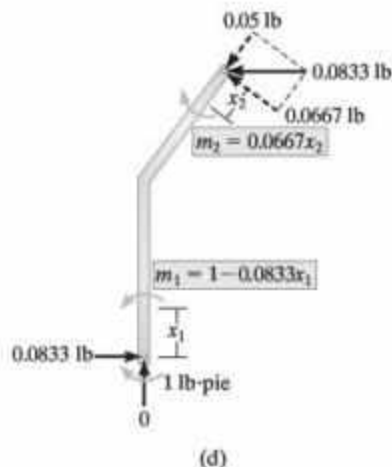
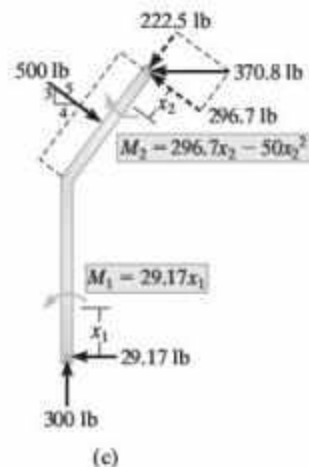
Para α_{AA} se requiere la aplicación de un momento de par unitario real y un momento de par unitario virtual que actúe en A, figura 10-13d. Por tanto,

$$\begin{aligned}\alpha_{AA} &= \sum \int_0^L \frac{m_\theta n_\theta}{EI} dx \\ &= \int_0^8 \frac{(1 - 0.0833x_1)^2 dx_1}{EI} + \int_0^5 \frac{(0.0667x_2)^2 dx_2}{EI} \\ &= \frac{3.85}{EI} + \frac{0.185}{EI} = \frac{4.04}{EI}\end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (1) y resolviendo se obtiene

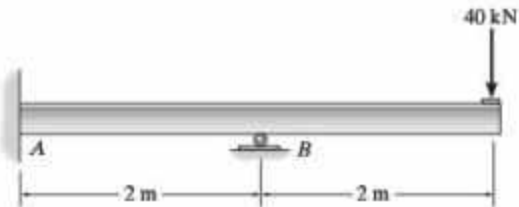
$$0 = \frac{821.8}{EI} + M_A \left(\frac{4.04}{EI} \right) \quad M_A = -204 \text{ lb} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

El signo negativo indica M_A actúa en la dirección opuesta a la que se muestra en la figura 10-13b.



PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F10-1. Determine las reacciones en el soporte fijo en A y en el rodillo en B . EI es constante.



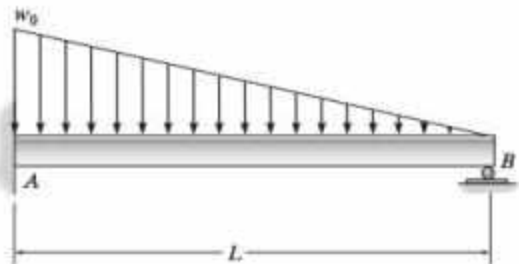
F10-1

F10-4. Determine las reacciones en la articulación A y en los rodillos en B y C .



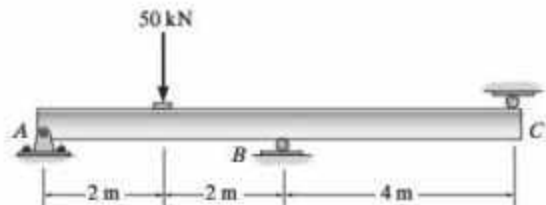
F10-4

F10-2. Determine las reacciones en el soporte fijo en A y en el rodillo en B . EI es constante.



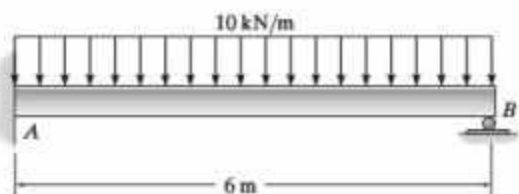
F10-2

F10-5. Determine las reacciones en la articulación A y en los rodillos en B y C sobre la viga. EI es constante.



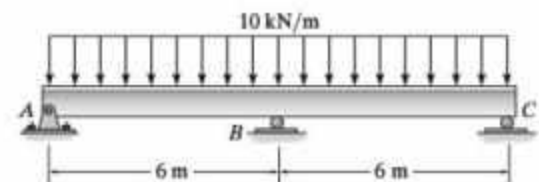
F10-5

10 F10-3. Determine las reacciones en el soporte fijo en A y en el rodillo en B . El soporte B se asienta 5 mm. Considere que $E = 200$ GPa e $I = 300(10^6)$ mm⁴.



F10-3

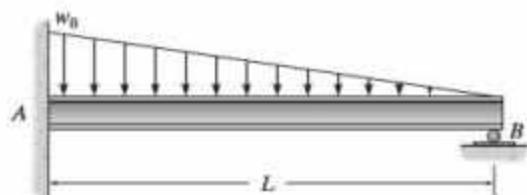
F10-6. Determine las reacciones en la articulación A y en los rodillos en B y C sobre la viga. El soporte B se asienta 5 mm. Considere que $E = 200$ GPa, $I = 300(10^6)$ mm⁴.



F10-6

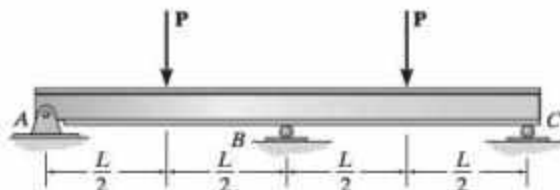
PROBLEMAS

10-1. Determine las reacciones en los soportes A y B . EI es constante.



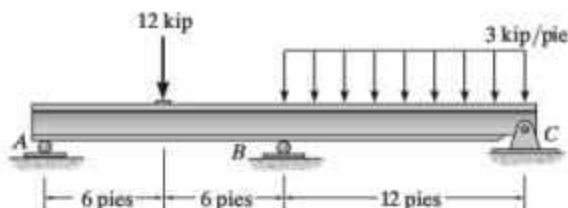
Prob. 10-1

***10-4.** Determine las reacciones en los soportes A , B y C ; después dibuje el diagrama de fuerza cortante y de momento. EI es constante.



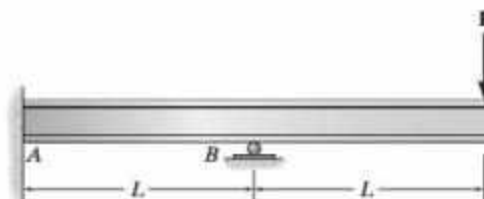
Prob. 10-4

10-2. Determine las reacciones en los soportes A , B y C , después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento. EI es constante.



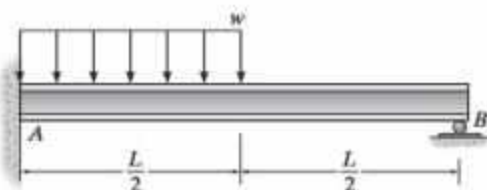
Prob. 10-2

10-5. Determine las reacciones en los soportes, después dibuje el diagrama de fuerza cortante y de momento. EI es constante.



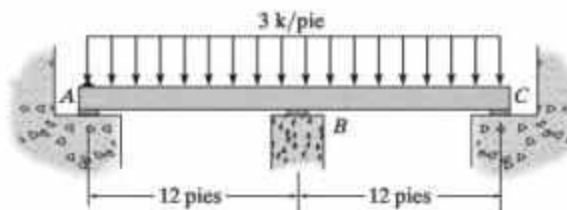
Prob. 10-5

10-3. Determine las reacciones en los soportes A y B . EI es constante.



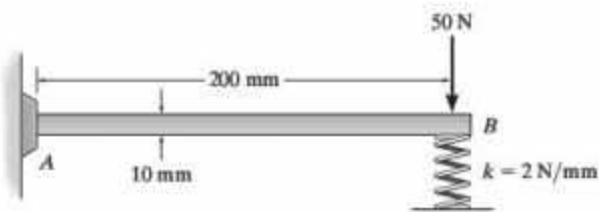
Prob. 10-3

10-6. Determine las reacciones en los soportes, después dibuje el diagrama de momentos. Suponga que B y C son rodillos y que A está articulado. El soporte en B se asienta hacia abajo 0.25 pies. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 500$ pulg⁴.



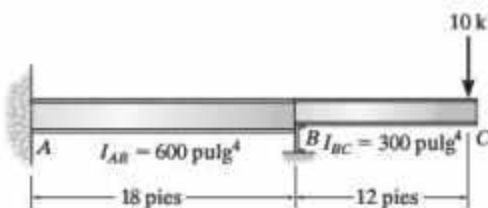
Prob. 10-6

10-7. Determine la deflexión en el extremo B de la tira asegurada de acero A-36. El resorte tiene una rigidez $k = 2 \text{ N/mm}$. La tira tiene 5 mm de ancho y 10 mm de alto. Además, dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la tira.



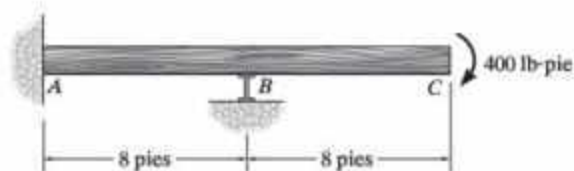
Prob. 10-7

***10-8.** Determine las reacciones en los soportes. En la figura se muestra el momento de inercia para cada segmento. Suponga que el soporte en B es un rodillo. Considere que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$.



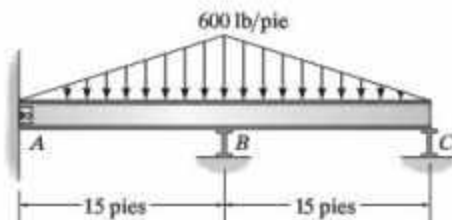
Prob. 10-8

10-10. Determine las reacciones en los soportes, después dibuje el diagrama de momentos. Suponga que el soporte en B es un rodillo. EI es constante.



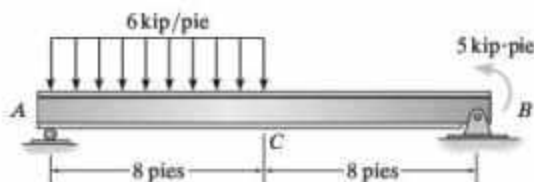
Prob. 10-10

10-11. Determine las reacciones en los soportes, después dibuje el diagrama de momentos. Suponga que A está articulado y que B y C son rodillos. EI es constante.



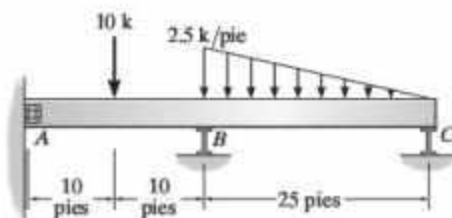
Prob. 10-11

10-9. La viga simplemente apoyada se somete a la carga que se muestra. Determine la deflexión en su centro C . EI es constante.



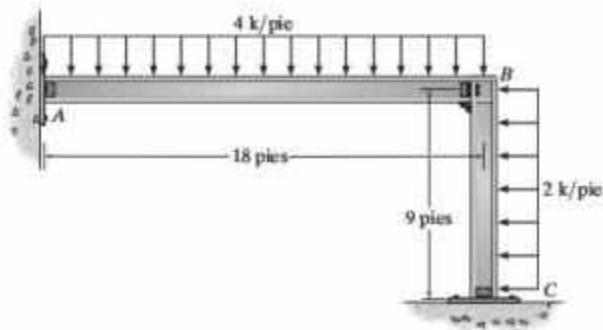
Prob. 10-9

***10-12.** Determine las reacciones en los soportes, después dibuje el diagrama de momentos. Suponga que el soporte en A está articulado y que B y C son rodillos. EI es constante.



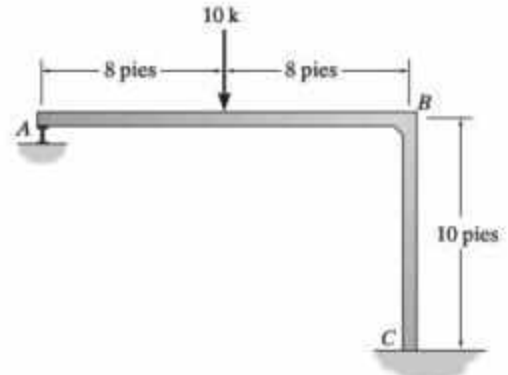
Prob. 10-12

10-13. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A y C están articulados y que la junta en B está conectada fijamente. EI es constante.



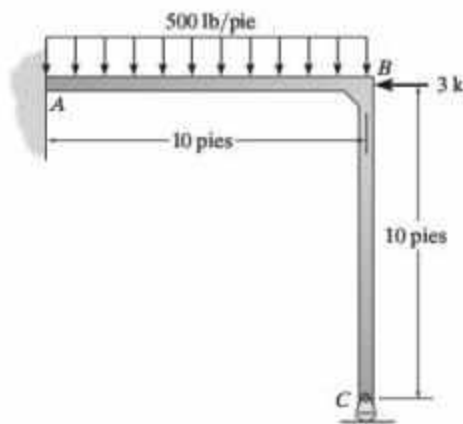
Prob. 10-13

10-15. Determine las reacciones en los soportes, después dibuje el diagrama de momentos para cada elemento. EI es constante.



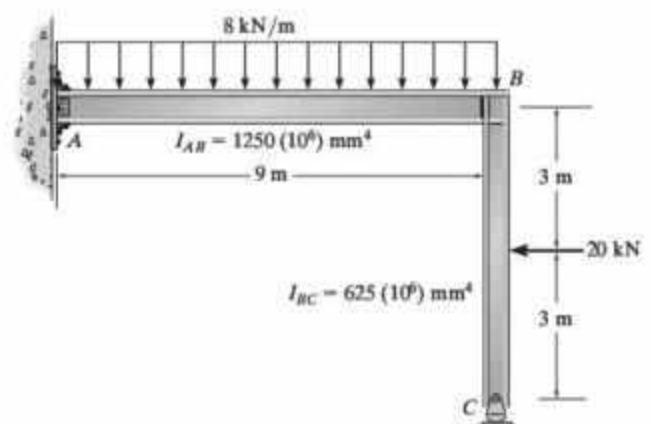
Prob. 10-15

10-14. Determine las reacciones en los soportes. EI es constante.



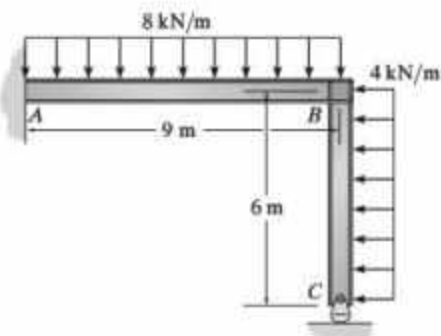
Prob. 10-14

***10-16.** Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A está conectado fijamente. E es constante.



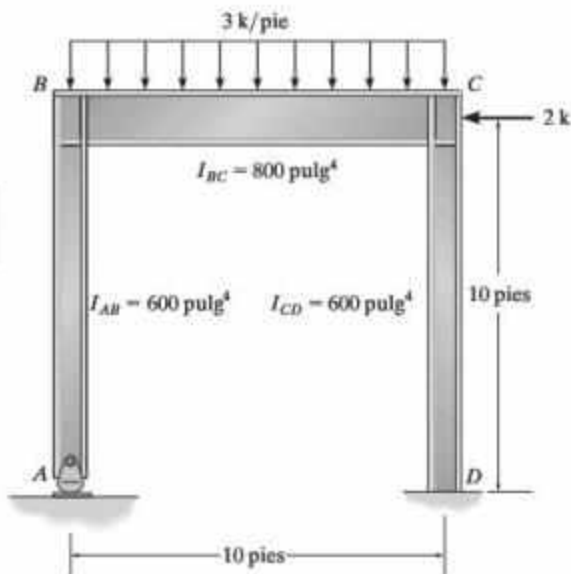
Prob. 10-16

10-17. Determine las reacciones en los soportes. EI es constante.



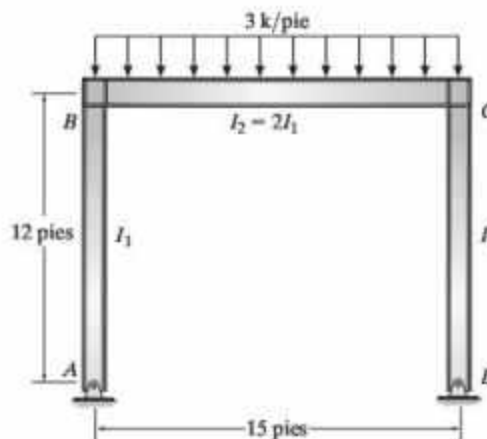
Prob. 10-17

10-18. Determine las reacciones en los soportes A y D . El momento de inercia de cada segmento del marco se muestra en la figura. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi.



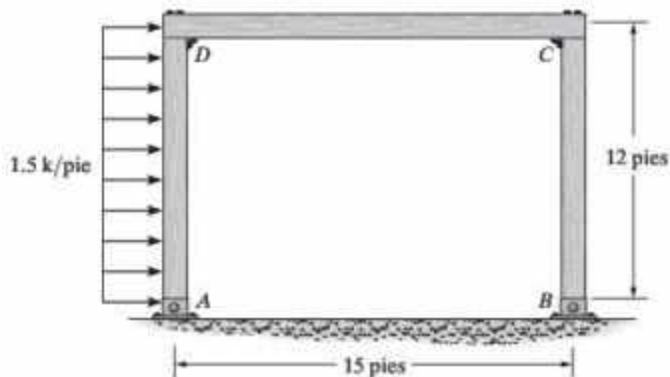
Prob. 10-18

10-19. El marco de acero soporta las cargas indicadas. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en los soportes A y D . Dibuje el diagrama de momentos para los elementos del marco. E es constante.



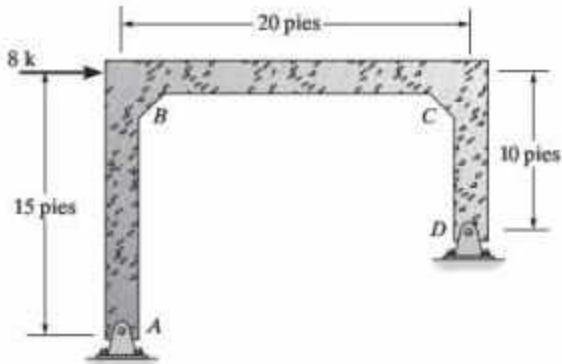
Prob. 10-19

***10-20.** Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A y B están articulados y que las juntas en C y D son conexiones fijas. EI es constante.



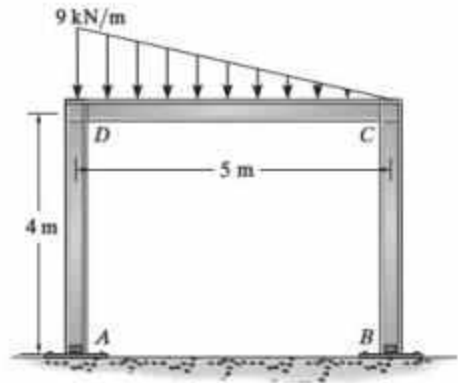
Prob. 10-20

10-21. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A y D están articulados. EI es constante.



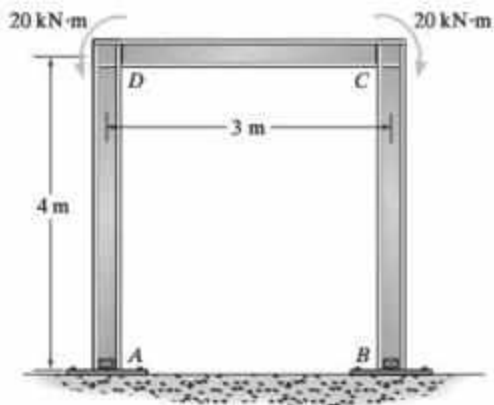
Prob. 10-21

10-23. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A y B están articulados. EI es constante.



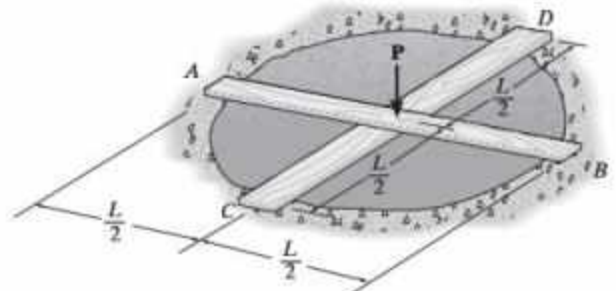
Prob. 10-23

10-22. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A y B están articulados. EI es constante.



Prob. 10-22

***10-24.** Dos tablas, cada una con el mismo EI y la misma longitud L se cruzan entre sí de manera perpendicular, como se muestra en la figura. Determine las reacciones verticales en los soportes. Suponga que las tablas apenas se tocan entre sí antes de aplicar la carga P .



Prob. 10-24

10.6 Método de análisis de la fuerza: Armaduras

El grado de indeterminación de una armadura, por lo general puede determinarse por inspección; sin embargo, si esto se hace difícil, use la ecuación 3-1, $b + r > 2j$. Aquí las incógnitas están representadas por el número de fuerzas en las barras (b), más las reacciones en los soportes (r), y el número de ecuaciones de equilibrio disponibles es de $2j$ puesto que pueden escribirse dos ecuaciones para cada una de las juntas (j).

El método de la fuerza es muy adecuado para analizar armaduras que son estáticamente indeterminadas de primero o segundo grado. Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de este método usando el procedimiento de análisis descrito en la sección 10-2.

EJEMPLO 10.7

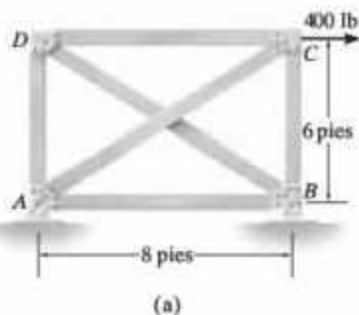


Figura 10-14

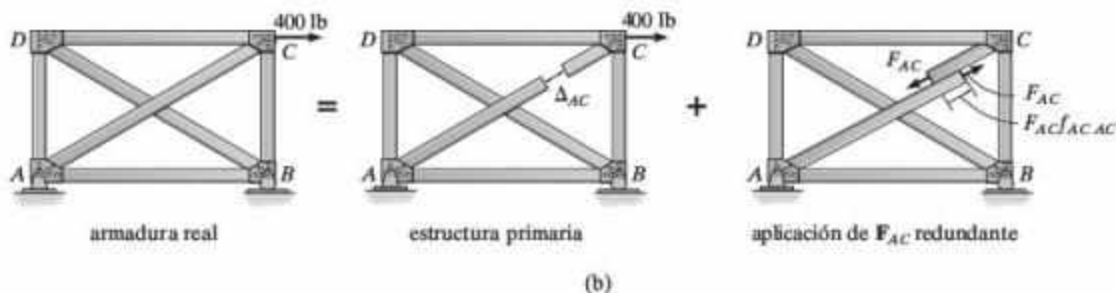
Determine la fuerza en el elemento AC de la armadura que se muestra en la figura 10-14a. AE es igual para todos los elementos.

SOLUCIÓN

Principio de superposición. Por inspección, la armadura es indeterminada de primer grado.* Como debe determinarse la fuerza en el elemento CA , éste se elegirá como redundante. Para ello es necesario "cortar" el elemento para que no pueda sostener una fuerza, con lo que la viga se vuelve estáticamente determinada y estable. El principio de superposición aplicado a la armadura se muestra en la figura 10-14b.

Ecuación de compatibilidad. Con referencia al elemento AC en la figura 10-14b, se requiere que el desplazamiento relativo Δ_{AC} , el cual ocurre en los extremos del elemento cortado AC debido a la carga de 400 lb, más el desplazamiento relativo $F_{AC}f_{ACAC}$ causado por la fuerza redundante que actúa sola, sea igual a cero, es decir,

$$0 = \Delta_{AC} + F_{AC}f_{ACAC} \quad (1)$$



*Al aplicar la ecuación 3-1, $b + r > 2j$ o $6 + 3 > 2(4)$, $9 > 8$, $9 - 8 = 1$ er grado.

Aquí el coeficiente de flexibilidad f_{ACAC} representa el desplazamiento relativo de los extremos cortados del elemento AC causado por una carga unitaria "real" que actúa en los extremos cortados del elemento AC . Este término, f_{ACAC} y Δ_{AC} se calcularán empleando el método de análisis del trabajo virtual. El análisis de la fuerza, utilizando el método de los nudos, se resume en las figuras 10-14c y 10-14d.

Para Δ_{AC} se requiere la aplicación de la carga real de 400 lb, figura 10-14c, y una fuerza unitaria virtual que actúa en los extremos cortados del elemento AC , figura 10-14d. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta_{AC} &= \sum \frac{nNL}{AE} \\ &= 2 \left[\frac{(-0.8)(400)(8)}{AE} \right] + \frac{(-0.6)(0)(6)}{AE} + \frac{(-0.6)(300)(6)}{AE} \\ &\quad + \frac{(1)(-500)(10)}{AE} + \frac{(1)(0)(10)}{AE} \\ &= -\frac{11\,200}{AE}\end{aligned}$$

Para f_{ACAC} se requiere la aplicación de las fuerzas unitarias reales y las fuerzas unitarias virtuales que actúan en los extremos cortados del elemento AC , figura 10-14d. Así,

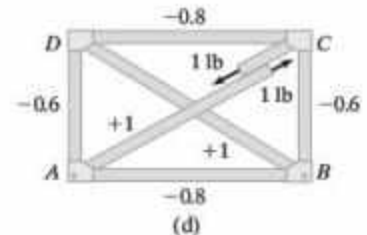
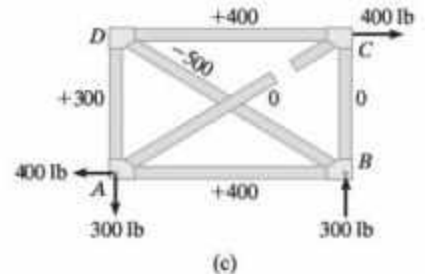
$$\begin{aligned}f_{ACAC} &= \sum \frac{n^2L}{AE} \\ &= 2 \left[\frac{(-0.8)^2(8)}{AE} \right] + 2 \left[\frac{(-0.6)^2(6)}{AE} \right] + 2 \left[\frac{(1)^2(10)}{AE} \right] \\ &= \frac{34.56}{AE}\end{aligned}$$

Al sustituir los datos en la ecuación (1) y resolver, se obtiene

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{11\,200}{AE} + \frac{34.56}{AE} F_{AC} \\ F_{AC} &= 324 \text{ lb (T)}\end{aligned}$$

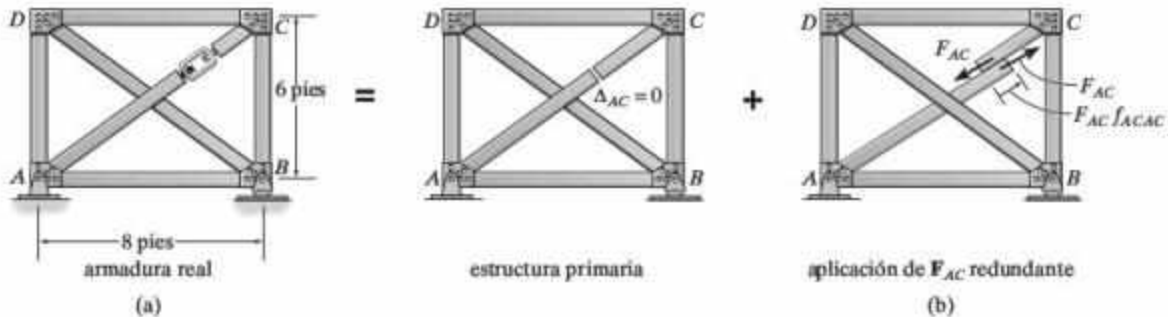
Resp.

Dado que el resultado numérico es positivo, AC está sometido a tensión tal como se supuso, figura 10-14b. Usando este resultado, las fuerzas en los otros elementos pueden encontrarse mediante el equilibrio, usando el método de los nudos.



EJEMPLO 10.8

Determine la fuerza en cada elemento de la armadura que se muestra en la figura 10-15a si el torniquete sobre el elemento AC se utiliza para acortar el elemento en 0.5 pulgadas. Cada barra tiene un área en su sección transversal de 0.2 pulg^2 , y $E = 29 (10^6) \text{ psi}$.

**Figura 10-15****SOLUCIÓN**

Principio de superposición. Esta armadura tiene la misma geometría que la del ejemplo 10-7. Como AC se ha acortado, se elegirá como redundante, figura 10-15b.

Ecuación de compatibilidad. Debido a que no hay cargas externas que actúen sobre la estructura primaria (armadura), no habrá desplazamiento relativo entre los extremos del elemento seccionado causado por la carga; es decir $\Delta_{AC} = 0$. El coeficiente de flexibilidad f_{ACAC} se determinó en el ejemplo 10-7, por lo que

$$f_{ACAC} = \frac{34.56}{AE}$$

Si se supone que la cantidad en la que se acorta la barra es positiva, entonces la ecuación de compatibilidad para la barra es

$$0.5 \text{ pulg} = 0 + \frac{34.56}{AE} F_{AC}$$

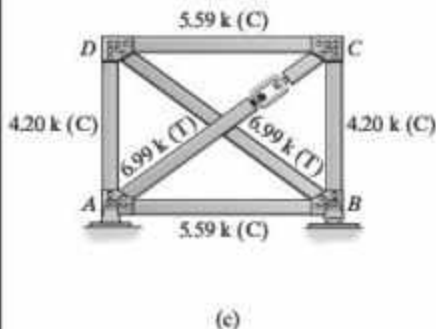
Al reconocer que el f_{ACAC} es una medida del desplazamiento por unidad de fuerza, se tiene

$$0.5 \text{ pulg} = 0 + \frac{34.56 \text{ pies}(12 \text{ pulg/pie})}{(0.2 \text{ pulg}^2)[29(10^6) \text{ lb/pulg}^2]} F_{AC}$$

Por lo tanto,

$$F_{AC} = 6993 \text{ lb} = 6.99 \text{ k (T)} \quad \text{Resp.}$$

Dado que sobre la armadura no actúa ninguna fuerza externa, las reacciones externas son iguales a cero. Por lo tanto, si se usa F_{AC} y se analiza la viga mediante el método de los nudos se obtienen los resultados que se muestran en la figura 10-15c.



10.7 Estructuras compuestas

Las *estructuras compuestas* están formadas por algunos elementos sometidos sólo a fuerza axial, mientras que otros elementos están sujetos a flexión. Si la estructura es estáticamente indeterminada, el método de la fuerza puede ser convenientemente empleado para su análisis. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 10.9

La viga de péndola armada que se muestra en la fotografía está simplemente apoyada y debe diseñarse para soportar una carga uniforme de 2 kN/m . Las dimensiones de la estructura se muestran en la figura 10-16a. Determine la fuerza desarrollada en el elemento CE . No tome en cuenta el espesor de la viga y suponga que los elementos de la armadura están conectados mediante pasadores a la viga. Además, ignore el efecto de la compresión axial y la fuerza cortante en la viga. El área de la sección transversal de cada puntal es de 400 mm^2 , y para la viga $I = 20 (10^6) \text{ mm}^4$. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$.



SOLUCIÓN

Principio de superposición. Si se conoce la fuerza en uno de los elementos de la armadura, entonces es posible determinar la fuerza en todos los demás elementos, así como en la viga, mediante la estática. Por lo tanto, la estructura es indeterminada de primer grado. Para obtener la solución, se elige la fuerza en el elemento CE como la redundante. Entonces, este elemento se secciona para eliminar su capacidad de sostener una fuerza. El principio de superposición aplicado a la estructura se muestra en la figura 10-16b.

Ecuación de compatibilidad. Con referencia al desplazamiento relativo de los extremos cortados del elemento CE , figura 10-16b, se requiere

$$0 = \Delta_{CE} + F_{CE}f_{CECE} \quad (1)$$

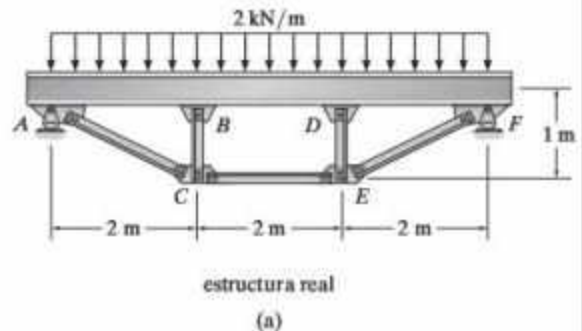
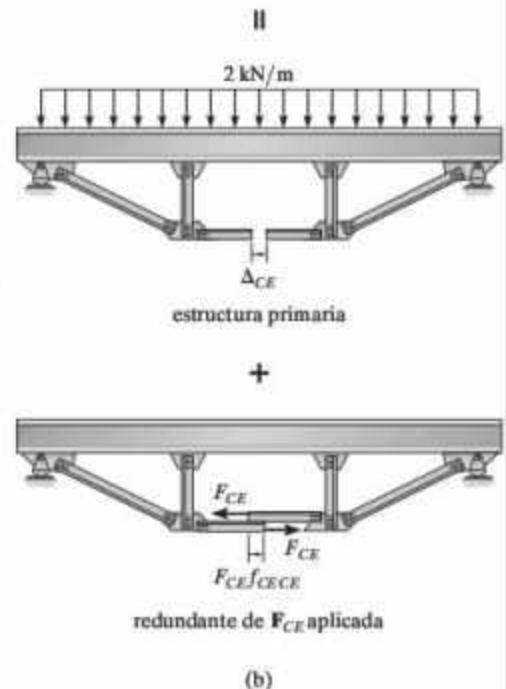
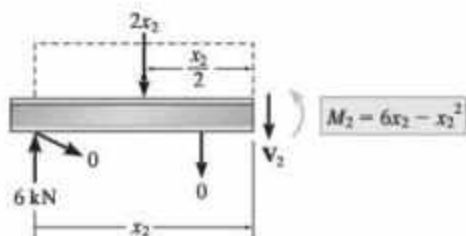
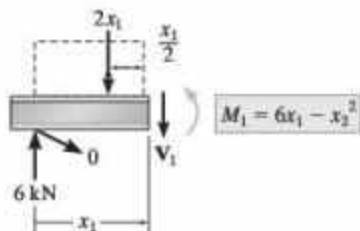
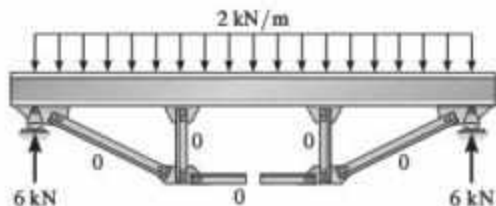


Figura 10-16

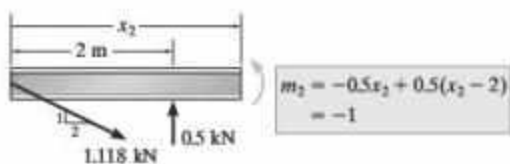
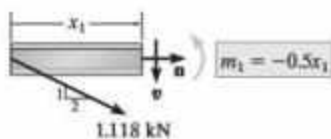
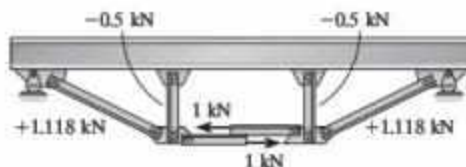


EJEMPLO 10.9 (Continuación)

Se usará el método del trabajo virtual para encontrar Δ_{CE} y $f_{CE/CE}$. El análisis de fuerzas necesario se muestra en las figuras 10-16c y 10-16d.



(c)



(d)

Para Δ_{CE} se requiere la aplicación de las cargas reales, figura 10-16c, y una carga unitaria virtual aplicada a los extremos cortados del elemento CE , figura 10-16d. Aquí se usará la simetría *tanto* de la carga *como* de la geometría, y sólo se tendrá en cuenta la energía de deformación en la viga y, por supuesto, la energía de deformación axial en los elementos de la armadura. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta_{CE} &= \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx + \sum \frac{nNL}{AE} = 2 \int_0^2 \frac{(6x_1 - x_1^2)(-0.5x_1)dx_1}{EI} \\ &\quad + 2 \int_2^3 \frac{(6x_2 - x_2^2)(-1)dx_2}{EI} + 2 \left(\frac{(1.118)(0)(\sqrt{5})}{AE} \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{(-0.5)(0)(1)}{AE} \right) + \left(\frac{(1)(0)(2)}{AE} \right) \\ &= -\frac{12}{EI} - \frac{17.33}{EI} + 0 + 0 + 0 \\ &= \frac{-29.33(10^3)}{200(10^9)(20)(10^{-6})} = -7.333(10^{-3}) \text{ m}\end{aligned}$$

Para f_{CECE} se requiere la aplicación de una carga unitaria real y una carga unitaria virtual en los extremos cortados del elemento CE , figura 10-16d. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}f_{CECE} &= \int_0^L \frac{m^2 dx}{EI} + \sum \frac{n^2 L}{AE} = 2 \int_0^2 \frac{(-0.5x_1)^2 dx_1}{EI} + 2 \int_2^3 \frac{(-1)^2 dx_2}{EI} \\ &\quad + 2 \left(\frac{(1.118)^2 (\sqrt{5})}{AE} \right) + 2 \left(\frac{(-0.5)^2 (1)}{AE} \right) + \left(\frac{(1)^2 (2)}{AE} \right) \\ &= \frac{1.3333}{EI} + \frac{2}{EI} + \frac{5.590}{AE} + \frac{0.5}{AE} + \frac{2}{AE} \\ &= \frac{3.333(10^3)}{200(10^9)(20)(10^{-6})} + \frac{8.090(10^3)}{400(10^{-6})(200(10^9))} \\ &= 0.9345(10^{-3}) \text{ m/kN}\end{aligned}$$

Sustituyendo los datos en la ecuación (1) se tiene

$$\begin{aligned}0 &= -7.333(10^{-3}) \text{ m} + F_{CE}(0.9345(10^{-3}) \text{ m/kN}) \\ F_{CE} &= 7.85 \text{ kN} \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

10.8 Comentarios adicionales sobre el método de análisis de la fuerza

Ahora que ya se han desarrollado las ideas básicas sobre el método de la fuerza, se procederá a generalizar su aplicación y analizar su utilidad.

Cuando se calculan los coeficientes de flexibilidad, f_{ij} (o α_{ij}), para la estructura, puede observarse que sólo dependen de los materiales y de las propiedades geométricas de los elementos y *no* de la carga de la estructura primaria. Por lo tanto, una vez determinados, estos valores pueden usarse para calcular las reacciones para cualquier carga.

Para una estructura que tiene n reacciones redundantes, R_n , se pueden escribir n ecuaciones de compatibilidad, a saber:

$$\begin{aligned}\Delta_1 + f_{11}R_1 + f_{12}R_2 + \cdots + f_{1n}R_n &= 0 \\ \Delta_2 + f_{21}R_1 + f_{22}R_2 + \cdots + f_{2n}R_n &= 0 \\ &\vdots \\ \Delta_n + f_{n1}R_1 + f_{n2}R_2 + \cdots + f_{nn}R_n &= 0\end{aligned}$$

Aquí los desplazamientos, $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, son causadas *tanto* por las *cargas reales* sobre la estructura primaria *como* por el *asentamiento de los soportes* o los *cambios dimensionales* debidos a las diferencias de temperatura o a los errores de fabricación en los elementos. Para simplificar el cálculo de estructuras que tienen un alto grado de indeterminación, las ecuaciones anteriores pueden replantearse en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ & & \ddots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \\ R_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} \quad (10-2)$$

o simplemente

$$\mathbf{fR} = -\Delta$$

En particular, observe que $f_{ij} = f_{ji}$ ($f_{12} = f_{21}$, etcétera), una consecuencia del teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos (o ley de Betti). Por lo tanto, la *matriz de flexibilidad* será *simétrica*, y esta característica es beneficiosa en la solución de grandes conjuntos de ecuaciones lineales, como en el caso de una estructura altamente indeterminada.

A lo largo de este capítulo se han determinado los coeficientes de flexibilidad usando el método del trabajo virtual que se aplica a *toda la estructura*. Sin embargo, es posible obtener estos coeficientes para *cada elemento* de la estructura, para después, usando las ecuaciones de transformación, obtener sus valores de toda la estructura. Este enfoque se analiza en los libros dedicados al análisis matricial de estructuras y no se incluye en este texto.*

*Vea, por ejemplo, H. C. Martin, *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill, Nueva York.

Aunque los detalles para la aplicación del método de análisis de la fuerza mediante métodos informáticos también se omite aquí, es posible hacer algunos comentarios y observaciones generales que se aplican al utilizar este método para resolver problemas que son altamente indeterminados y que, por consiguiente, implican grandes conjuntos de ecuaciones. A este respecto, la precisión numérica de la solución mejora si los coeficientes de flexibilidad situados cerca de la diagonal principal de la matriz f son mayores que los situados fuera de la diagonal. Para lograr este objetivo, debe dedicarse alguna reflexión a la selección de la estructura primaria. Para facilitar el cálculo de f_{ij} , también es conveniente elegir la estructura primaria de modo que sea algo simétrica. Esto tenderá a producir algunos coeficientes de flexibilidad similares o iguales a cero. Por último, la forma alterada de la estructura primaria debe ser *similar* a la de la estructura real. Si esto ocurre, entonces las redundantes inducirán sólo *pequeñas* correcciones a la estructura primaria, lo que resulta en una solución más precisa de la ecuación 10-2.

10.9 Estructuras simétricas

Un análisis estructural de cualquier estructura altamente indeterminada o, para ese caso, incluso una estructura estáticamente determinada, se puede simplificar siempre que el diseñador o el analista puedan reconocer aquellas estructuras que son simétricas y que soportan cargas simétricas o antisimétricas. En un sentido general, una estructura puede ser clasificada como *simétrica* siempre que la mitad de ésta desarrolle la misma carga interna y deflexiones que las de su imagen reflejada en el espejo respecto a su eje central. Normalmente la simetría requiere que la composición del material, la geometría, los soportes y la carga sean iguales en cada lado de la estructura. Sin embargo, esto no siempre tiene que ser así. Tenga en cuenta que para la estabilidad horizontal se requiere un pasador para soportar la viga y la armadura en las figuras 10-17a y 10-17b. Aquí, la reacción horizontal en el pasador es igual a cero y, por lo tanto, ambas estructuras se deforman y producen la misma carga interna que su contraparte reflejada. Como resultado, pueden clasificarse como simétricas. Observe que esto no sería así para el marco de la figura 10-17c, si el soporte fijo en A se sustituyera por un pasador, puesto que entonces la forma alterada y las cargas internas no serían iguales en sus lados izquierdo y derecho.

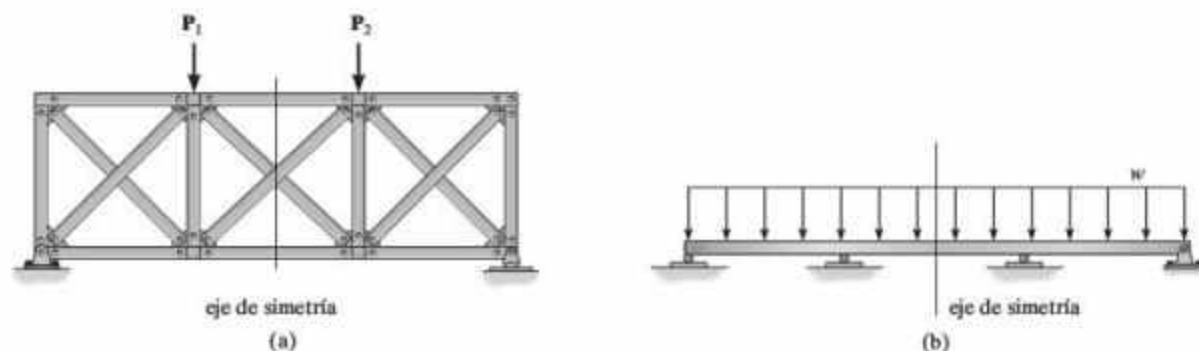


Figura 10-17

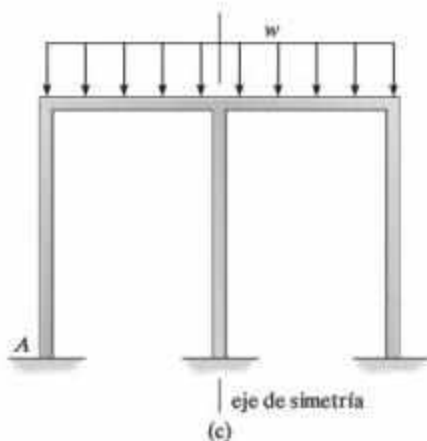


Figura 10-17

En ocasiones, una estructura simétrica soporta una carga antisimétrica, es decir, la carga de su lado reflejado tiene la dirección opuesta, como lo muestran los dos ejemplos de la figura 10-18. Siempre que la estructura sea simétrica y su carga sea simétrica o antisimétrica, un análisis estructural sólo tendrá que llevarse a cabo en la mitad de los elementos de la estructura, puesto que en la otra mitad se producirán resultados iguales (simétrica) u opuestos (antisimétrica). Si una estructura es simétrica y su carga aplicada es antisimétrica, entonces es posible transformar esa carga en componentes simétricos y antisimétricos. Para ello, *primero la carga se divide en dos, luego se refleja hacia el otro lado de la estructura y se producen los componentes tanto simétricos como antisimétricos*. Por ejemplo, la carga sobre la viga de la figura 10-19a se divide en dos y se refleja sobre el eje de simetría de la viga. A partir de esto, se producen los componentes simétricos y antisimétricos de la carga como se muestra en la figura 10-19b. Cuando estos componentes se suman se produce la carga original. Ahora puede realizarse un análisis estructural por separado empleando los componentes de carga simétrica y antisimétrica, para después superponer los resultados y así obtener el comportamiento real de la estructura.

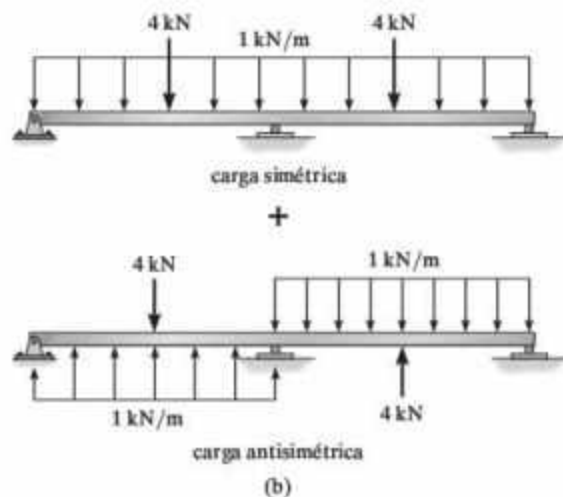
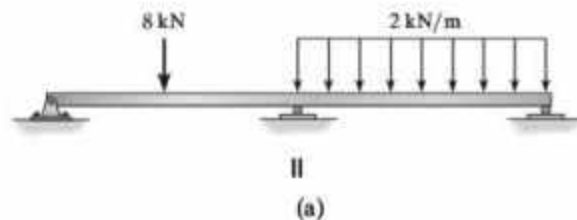


Figura 10-19

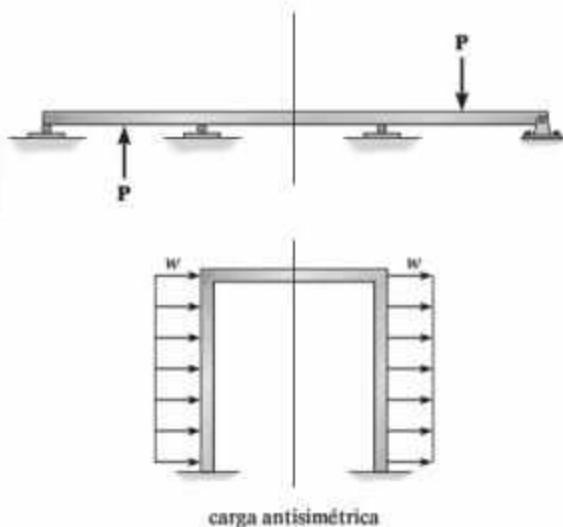
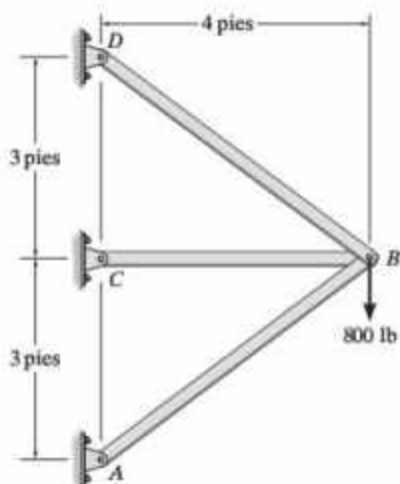


Figura 10-18

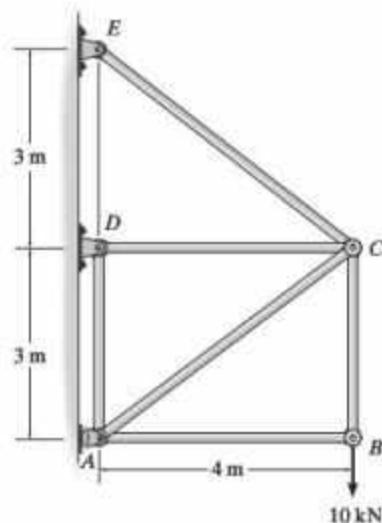
PROBLEMAS

10-25. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. AE es constante.



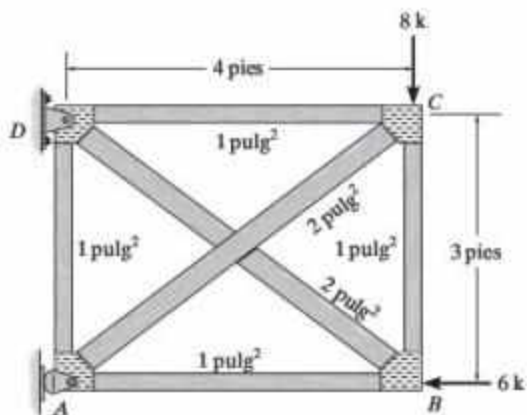
Prob. 10-25

10-27. Determine la fuerza en el elemento AC de la armadura. AE es constante.



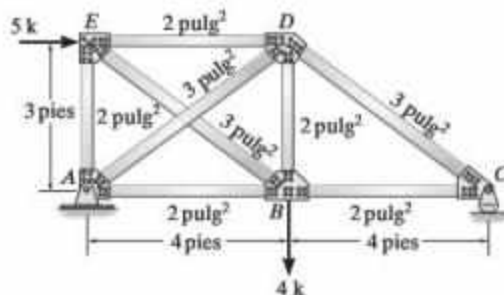
Prob. 10-27

10-26. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. El área de la sección transversal de cada elemento se indica en la figura. $E = 29(10^3)$ ksi. Suponga que los elementos están articulados en sus extremos.



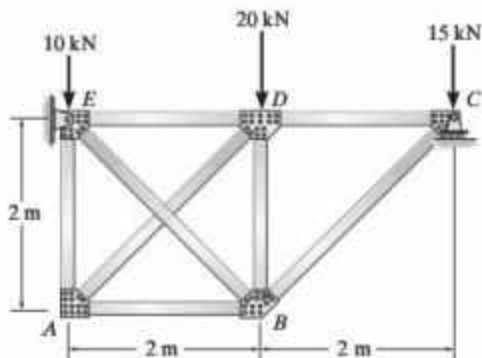
Prob. 10-26

***10-28.** Determine la fuerza en el elemento AD de la armadura. El área de la sección transversal de cada elemento se muestra en la figura. Suponga que los elementos están articulados en sus extremos. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi.



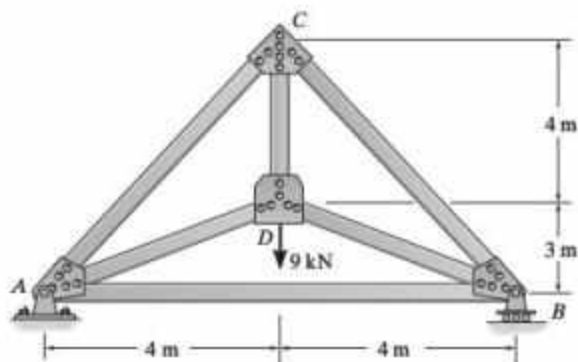
Prob. 10-28

10-29. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. Suponga que los elementos están articulados en sus extremos. AE es constante.



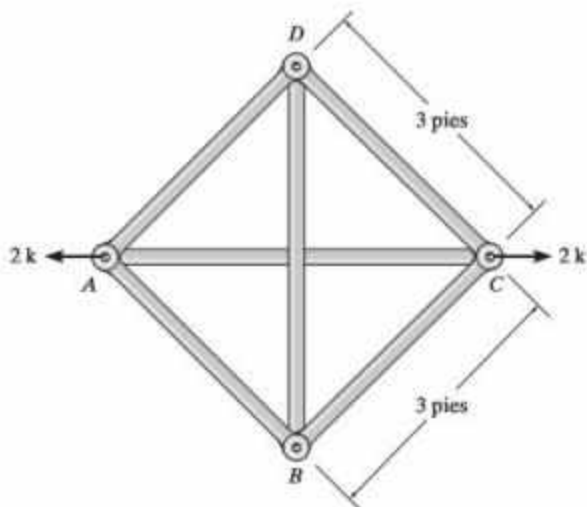
Prob. 10-29

10-31. Determine la fuerza en el elemento CD de la armadura. AE es constante.



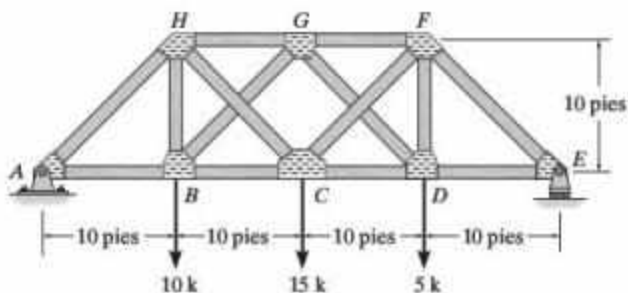
Prob. 10-31

10-30. Determine la fuerza en cada elementos de la armadura articulada. AE es constante.



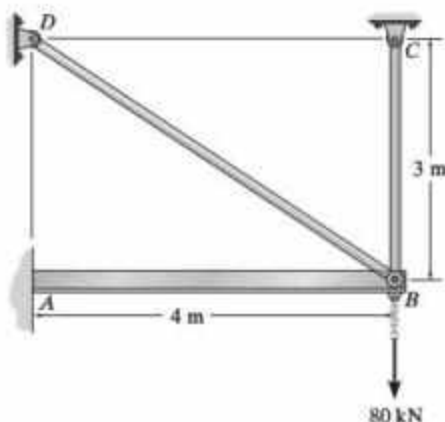
Prob. 10-30

***10-32.** Determine la fuerza en el elemento GB de la armadura. AE es constante.



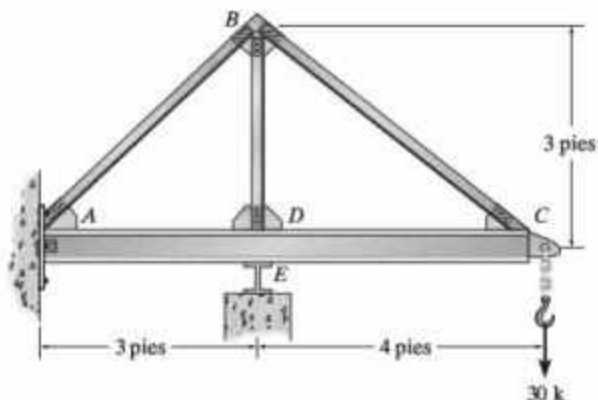
Prob. 10-32

10-33. La viga en voladizo AB recibe soporte adicional mediante dos tirantes. Determine la fuerza en cada una de estas barras. Pase por alto la compresión axial y la fuerza cortante en la viga. Para la viga, $I_b = 200(10^6) \text{ mm}^4$ y para cada tirante, $A = 100 \text{ mm}$. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$.



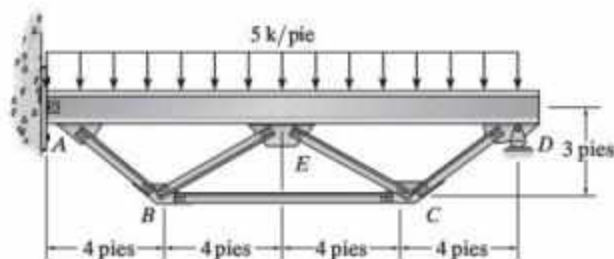
Prob. 10-33

10-34. Determine la fuerza en los elementos AB , BC y BD que se utilizan junto con la viga para soportar la carga de 30 k. La viga tiene un momento de inercia de $I = 600 \text{ pulg}^4$, los elementos AB y BC tienen una sección transversal de 2 pulg^2 y BD tiene una sección transversal de 4 pulg^2 . Considere que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$. Ignore el espesor de la viga y su compresión axial, asimismo suponga que todos los elementos están articulados. Asuma también que el soporte en A es un pasador y en E es un rodillo.



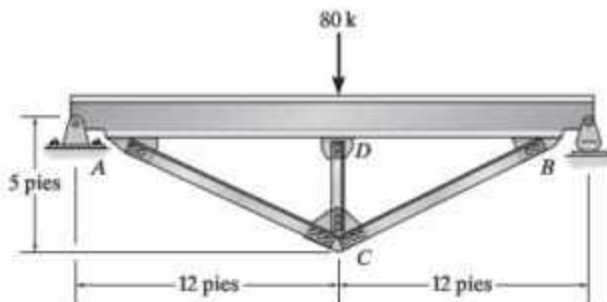
Prob. 10-34

10-35. La viga armada soporta la carga uniformemente distribuida. Si todos los elementos de la armadura tienen un área en su sección transversal de 1.25 pulg^2 determine la fuerza en el elemento BC . Pase por alto la profundidad y la compresión axial en la viga. Considere que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$ para todos los elementos. Además, para la viga, $I_{AD} = 750 \text{ pulg}^4$. Suponga que A es un pasador y D es un oscilador.



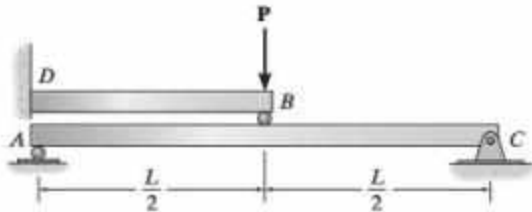
Prob. 10-35

***10-36.** La viga armada soporta una fuerza concentrada de 80k en su centro. Determine la fuerza en cada uno de los tres puntales y dibuje el diagrama de momento flexionante para la viga. Los puntales tienen un área en su sección transversal de 2 pulg^2 . Supongamos que están articulados en sus extremos. No tome en cuenta la profundidad de la viga ni el efecto de la compresión axial en ésta. Considere que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$ para la viga y los puntales. Además, para la viga, $I = 400 \text{ pulg}^4$.



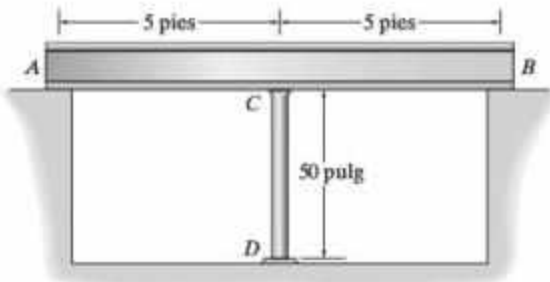
Prob. 10-36

10-37. Determine las reacciones en el soporte C , EI es constante para ambas vigas.



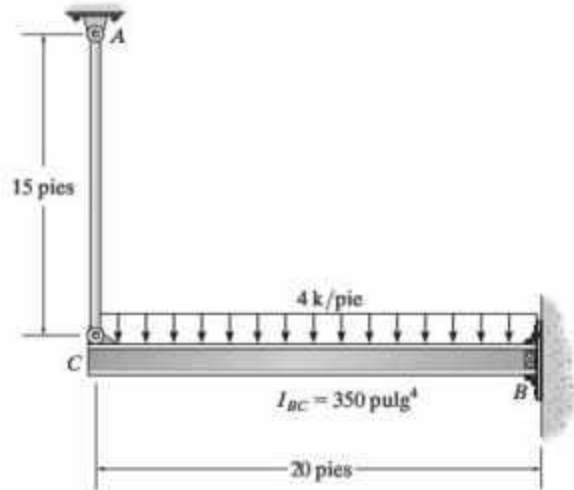
Prob. 10-37

10-38. La viga AB tiene un momento de inercia $I = 475 \text{ pulg}^4$ y yace sobre los soportes lisos en sus extremos. Una varilla CD de 0.75 pulgadas de diámetro está soldada al centro de la viga y al soporte fijo en D . Si la temperatura de la varilla se reduce en 150°F , determine la fuerza desarrollada en la barra. Tanto la viga como la barra están hechas de un acero para el cual $E = 200 \text{ GPa}$ y $\alpha = 6.5(10^{-6})/^\circ\text{F}$.



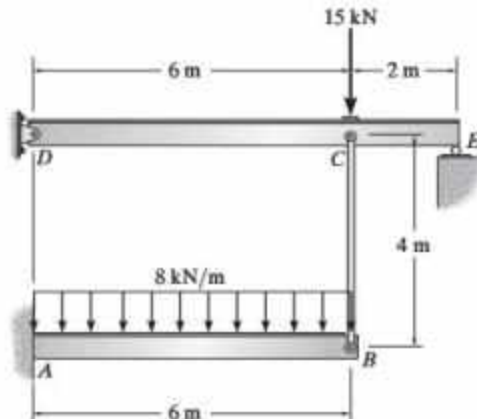
Prob. 10-38

10-39. La viga en voladizo se sostiene en un extremo mediante una barra de suspensión AC de $\frac{1}{2}$ pulgadas de diámetro y está fija en el otro extremo B . Determine la fuerza en la barra debido a una carga uniforme de 4 k/pie . $E = 29(10^3) \text{ ksi}$, tanto para la viga como para la barra.



Prob. 10-39

***10-40.** El ensamble estructural soporta las cargas indicadas. Dibuje los diagramas de momento para cada una de las vigas. Considere que $I = 100(10^6) \text{ mm}^4$ para las vigas y $A = 200 \text{ mm}^2$ para el tirante. Todos los elementos están hechos de acero para el cual $E = 200 \text{ GPa}$.



Prob. 10-40

10.10 Líneas de influencia para vigas estáticamente indeterminadas

En la sección 6-3 se analizó el uso del principio de Müller-Breslau con el fin de dibujar la línea de influencia para la reacción, la cortante y el momento en un punto de una viga estáticamente determinada. En esta sección se extenderá este método y se aplicará a vigas estáticamente indeterminadas.

Recuerde que, para una viga, el principio de Müller-Breslau establece que *la línea de influencia para una función (reacción, fuerza cortante o momento) está a la misma escala que la forma alterada de la viga cuando la viga se ve afectada por la función*. Para dibujar la forma alterada correctamente, debe *eliminarse* la capacidad de la viga para resistir la función aplicada a fin de que la viga pueda deformarse cuando se aplica la función. Para las *vigas estáticamente determinadas*, las formas alteradas (o las líneas de influencia) serán una serie de *segmentos de línea recta*. Para las *vigas estáticamente indeterminadas*, resultarán *curvas*. Se analizará la construcción de cada uno de los tres tipos de líneas de influencia (de reacción, de fuerza cortante y de momento) para una viga estáticamente indeterminada. En cada caso, se ilustrará la validez del principio de Müller-Breslau usando el teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos.

Reacción en A. Para determinar la línea de influencia para la reacción en A en la figura 10-20a, se coloca una carga unitaria sobre la viga en puntos sucesivos, y en cada punto debe determinarse la reacción en A. Una gráfica de estos resultados genera la línea de influencia. Por ejemplo, cuando la carga está en el punto D, figura 10-20a, la reacción en A, que representa la ordenada de la línea de influencia en D, puede determinarse mediante el método de la fuerza. Para ello, se aplica el principio de superposición, como se muestra en las figuras 10-20a a 10-20c. Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad para el punto A es $0 = f_{AD} + A_y f_{AA}$ o bien $A_y = -f_{AD}/f_{AA}$; sin embargo, por el teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos $f_{AD} = -f_{DA}$, figura 10-20d, por lo que también es posible calcular A_y (o la ordenada de la línea de influencia en D) usando la ecuación

$$A_y = \left(\frac{1}{f_{AA}} \right) f_{DA}$$

Por comparación, el principio de Müller-Breslau requiere eliminar el soporte en A y aplicar una carga unitaria vertical. La curva de deflexión resultante, figura 10-20d, es a cierta escala la forma de la línea de influencia para A_y . Sin embargo, en la ecuación anterior se observa que el factor de escala es $1/f_{AA}$.

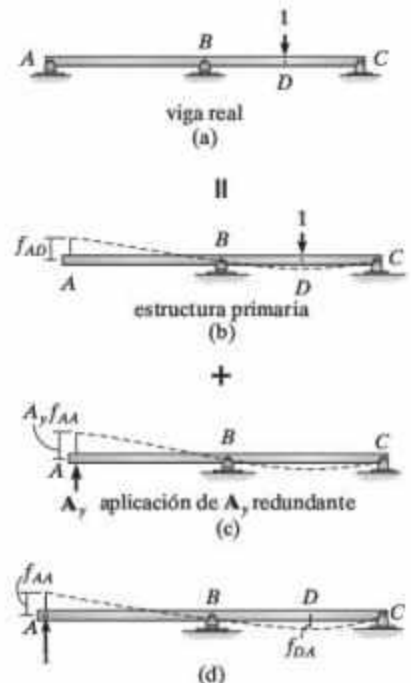


Figura 10-20

Cortante en E . Si debe determinarse la línea de influencia para la fuerza cortante en el punto E de la viga que se muestra en la figura 10-21a, entonces, por el principio de Müller-Breslau, la viga se imagina cortada en este punto y se inserta un *dispositivo de deslizamiento* en E , figura 10-21b. Este dispositivo transmitirá un momento y una fuerza normal, pero ninguna fuerza cortante. Cuando la viga se flexiona debido a las cargas cortantes unitarias positivas que actúan en E , la pendiente de cada lado de la guía sigue siendo la misma, y la curva de deflexión representa a cierta escala la línea de influencia para la fuerza cortante en E , figura 10-21c. Si se aplica el método básico para establecer la línea de influencia de la fuerza cortante en E , entonces sería necesario aplicar una carga unitaria en cada punto D y calcular la fuerza cortante en E , figura 10-21a. Este valor, V_E , representaría la ordenada de la línea de influencia en D . Como en el caso anterior, usando el método de la fuerza y el teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos, puede demostrarse que

$$V_E = \left(\frac{1}{f_{EE}} \right) f_{DE}$$

De nuevo, esto establece la validez del principio de Müller-Breslau, es decir, una carga unitaria cortante positiva aplicada a la viga en E , figura 10-21c, hará que la viga se altere con la *forma* de la línea de influencia para la fuerza cortante en E . Aquí el factor de escala es $(1/f_{EE})$.

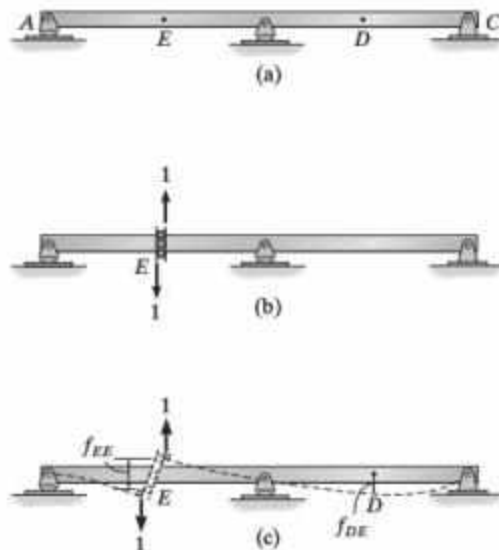


Figura 10-21

Momento en E. La línea de influencia para el momento en E de la figura 10-22a puede determinarse al colocar un *pasador* o *bisagra* en E , puesto que esta conexión transmite fuerzas normales y cortantes, pero no puede resistir un momento, figura 10-22b. Al aplicar un momento de par unitario positivo, la viga se deforma a la posición marcada con trazos discontinuos en la figura 10-22c, lo que genera a cierta escala la línea de influencia, de nuevo una consecuencia del principio de Müller-Breslau. Si se emplea el método de la fuerza y el teorema de la reciprocidad de Maxwell, se puede demostrar que

$$M_E = \left(\frac{1}{\alpha_{EE}} \right) f_{DE}$$

El factor de escala aquí es $(1/\alpha_{EE})$.

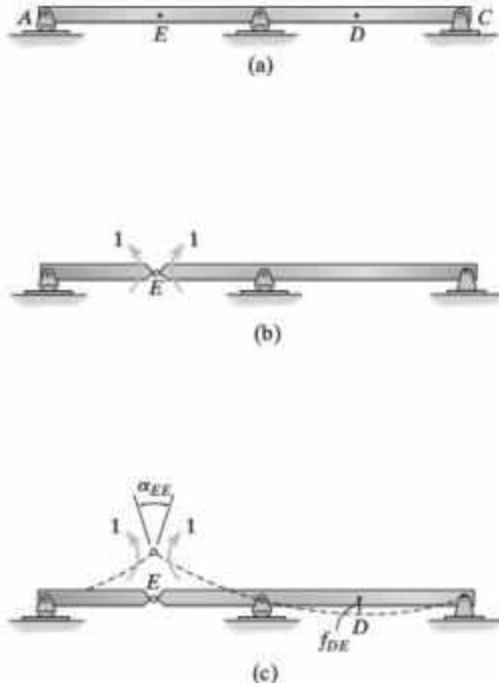


Figura 10-22

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método para establecer la línea de influencia de la reacción, la fuerza cortante o el momento en un punto de una viga, mediante la técnica de Müller-Breslau.

Línea de influencia cualitativa

En el punto de la viga para el cual debe determinarse la línea de influencia, coloque una conexión que elimine la capacidad de la viga para soportar la función de la línea de influencia. Si la función es una *reacción* vertical, use una *guía de rodillos* vertical; si la función es *cortante*, utilice un *dispositivo de deslizamiento*; o si la función es un *momento*, use un *pasador* o una *bisagra*. Coloque una carga unitaria en la conexión que actúe sobre la viga en la "dirección positiva" de la función. Dibuje la curva de deflexión de la viga. Esta curva representa a cierta escala la forma de la línea de influencia para la viga.

Línea de influencia cuantitativa

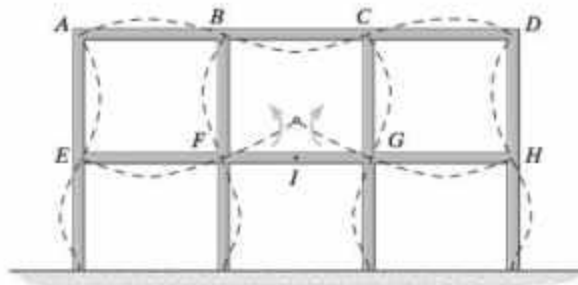
Si deben determinarse los valores numéricos de la línea de influencia, calcule el *desplazamiento* de puntos sucesivos a lo largo de la viga cuando la viga está sometida a la carga unitaria colocada en la conexión mencionada anteriormente. Divida cada valor de desplazamiento entre el desplazamiento determinado en el punto donde actúa la carga unitaria. Al aplicar este factor de escala, los valores resultantes son las ordenadas de la línea de influencia.



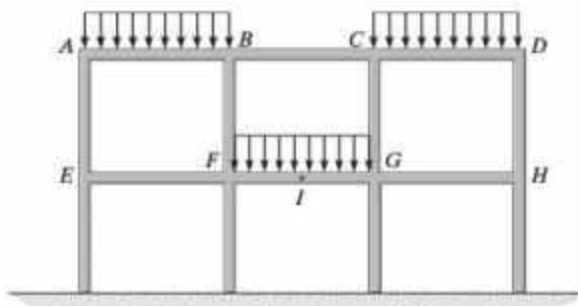
Para este viaducto se construyeron las líneas de influencia de la trabe continua para diseñarla adecuadamente.

10.11 Líneas de influencia cualitativas para marcos

El principio de Müller-Breslau proporciona un método rápido y tiene un gran valor para establecer la forma general de la línea de influencia en la construcción de marcos. Una vez que se conoce la *forma* de la línea de influencia, es posible especificar de inmediato la *ubicación* de las cargas vivas de modo que creen la mayor influencia de la función (reacción, fuerza cortante o momento) en el marco. Por ejemplo, la forma de la línea de influencia para el momento *positivo* en el centro *I* de la trabe *FG* del marco de la figura 10-23a se muestra mediante líneas discontinuas. Entonces, las cargas uniformes se colocarían sólo sobre las vigas *AB*, *CD* y *FG* con el fin de crear el mayor momento positivo en *I*. Con el marco cargado de esta manera, figura 10-23b, entonces podría realizarse un análisis indeterminado del marco para encontrar el momento crítico en *I*.



(a)

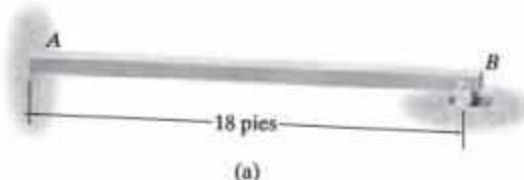


(b)

Figura 10-23

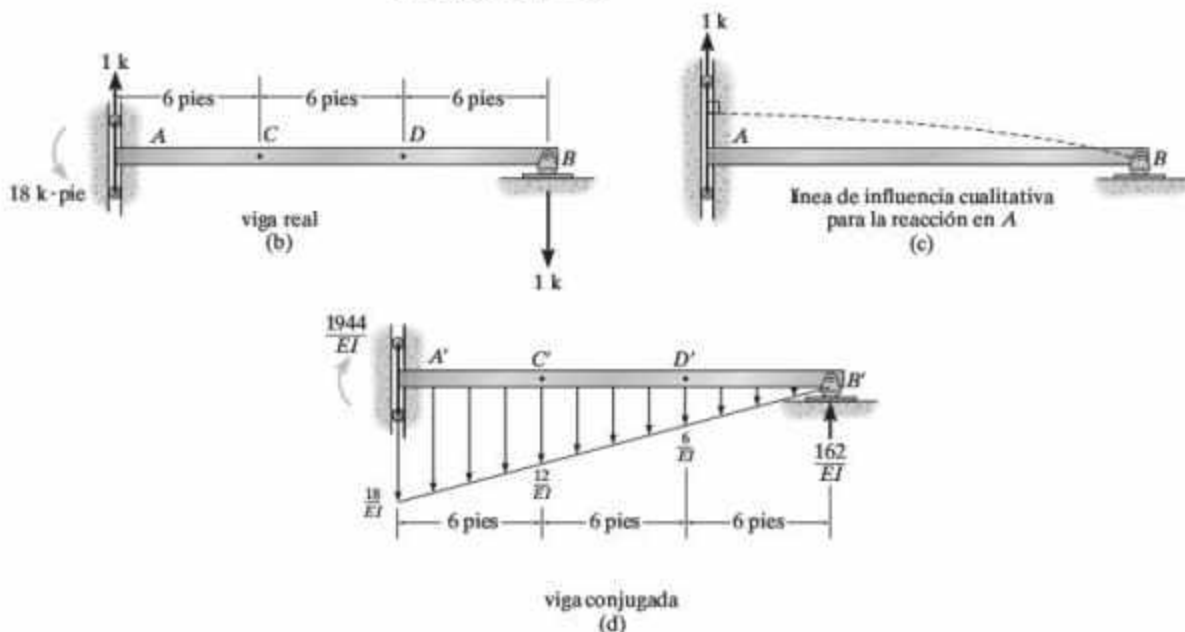
EJEMPLO 10.10

Dibuje la línea de influencia de la reacción vertical en A para la viga que se muestra en la figura 10-24a. EI es constante. Grafique los valores numéricos cada 6 pies.

**SOLUCIÓN**

Se retira la capacidad de la viga para resistir la reacción A_y . Esto se hace usando un dispositivo de rodillos verticales el cual se muestra en la figura 10-24b. Al aplicar una carga unitaria vertical en A se obtiene la forma de la línea de influencia de la figura 10-24c.

Con el fin de determinar las ordenadas de la línea de influencia, se usará el método de la viga conjugada. Las reacciones en A y B sobre la "viga real", cuando se somete a la carga unitaria en A , se muestran en la figura 10-24b. La viga conjugada correspondiente se muestra en la figura 10-24d. Observe que el soporte en A' sigue siendo el mismo que el de A en la figura 10-24b. Esto se debe a que un dispositivo de rodillos verticales en la viga conjugada soporta un momento, pero no una fuerza cortante, lo que corresponde a un desplazamiento pero no a una pendiente en el punto A de la viga real, figura 10-24c. Las reacciones en los soportes de la viga conjugada se han calculado y se muestran en la figura 10-24d. Ahora se calcularán los desplazamientos de los puntos en la viga real, figura 10-24b.

**Figura 10-24**

Para B' , puesto que no existe un momento sobre la viga conjugada en B' , figura 10-24d, entonces

$$\Delta_B = M_{B'} = 0$$

Para D' , figura 10-24e:

$$\Sigma M_{D'} = 0; \quad \Delta_D = M_{D'} = \frac{162}{EI}(6) - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{EI}\right)(6)(2) = \frac{936}{EI}$$

Para C' , figura 10-24f:

$$\Sigma M_{C'} = 0; \quad \Delta_C = M_{C'} = \frac{162}{EI}(12) - \frac{1}{2}\left(\frac{12}{EI}\right)(12)(4) = \frac{1656}{EI}$$

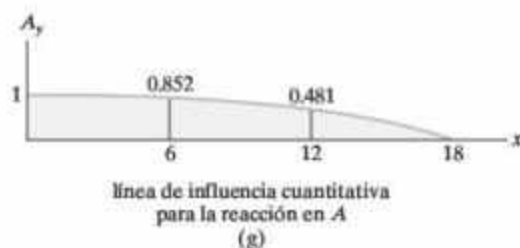
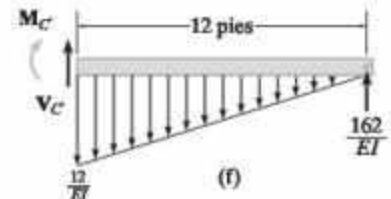
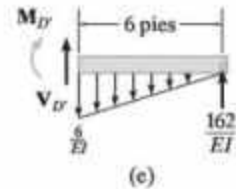
Para A' , figura 10-24d:

$$\Delta_A = M_{A'} = \frac{1944}{EI}$$

Puesto que una carga vertical de 1 k que actúa en A sobre la viga de la figura 10-24a causará una reacción vertical en A de 1 k, el desplazamiento en A , $\Delta_A = 1944/EI$, debe corresponder a un valor numérico de 1 para la ordenada de la línea de influencia en A . Por lo tanto, al dividir los otros desplazamientos calculados entre este factor, se obtiene

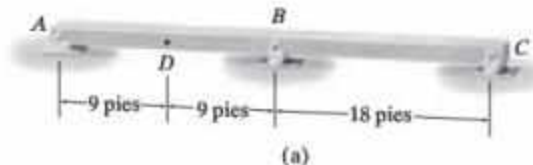
x	A_y
A	1
C	0.852
D	0.481
B	0

Una gráfica de estos valores genera la línea de influencia que se muestra en la figura 10-24g.



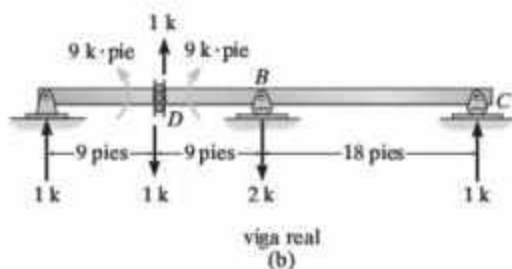
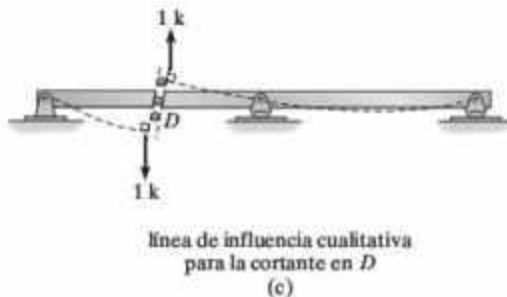
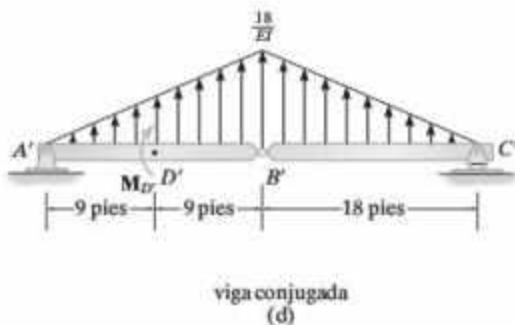
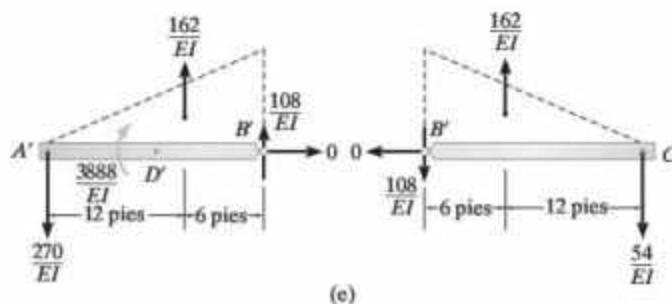
EJEMPLO 10.11

Dibuje la línea de influencia de la fuerza cortante en D para la viga que se muestra en la figura 10-25a. EI es constante. Grafique los valores numéricos cada 9 pies.

**Figura 10-25****SOLUCIÓN**

Se elimina la capacidad de la viga para resistir una fuerza cortante en D . Esto se hace mediante el dispositivo de rodillo que se muestra en la figura 10-25b. Al aplicar una fuerza cortante unitaria positiva en D se obtiene la forma de la línea de influencia de la figura 10-25c.

En la figura 10-25b se muestran las reacciones en los soportes A , B y C sobre la "viga real", cuando ésta se somete a la fuerza cortante unitaria en D . La viga conjugada correspondiente se muestra en la figura 10-25d. Aquí debe aplicarse un momento de par externo M_D en D' a fin de provocar un *momento interno* diferente justo a la izquierda y justo a la derecha de D' . Estos momentos internos corresponden a los desplazamientos justo a la izquierda y justo a la derecha en de sobre la viga real, figura 10-25c. Las reacciones en los soportes A' , B' , C' y el momento externo M_D sobre la viga conjugada se han calculado y se muestran en la figura 10-25e. Como ejercicio, verifique los cálculos.

viga real
(b)línea de influencia cualitativa
para la cortante en D
(c)viga conjugada
(d)

(e)

Dado que existe una *discontinuidad* del momento en D' , se calculará el momento interno justo a la izquierda y justo a la derecha de D' . Justo a la izquierda de D' , figura 10-25f, se tiene

$$\Sigma M_{D'_L} = 0; \quad \Delta_{D_L} = M_{D'_L} = \frac{40.5}{EI}(3) - \frac{270}{EI}(9) = -\frac{2308.5}{EI}$$

Justo a la derecha de D' , figura 10-25g, resulta

$$\Sigma M_{D'_R} = 0; \quad \Delta_{D_R} = M_{D'_R} = \frac{40.5}{EI}(3) - \frac{270}{EI}(9) + \frac{3888}{EI} = \frac{1579.5}{EI}$$

De la figura 10-25e,

$$\Delta_A = M_{A'} = 0 \quad \Delta_B = M_{B'} = 0 \quad \Delta_C = M_{C'} = 0$$

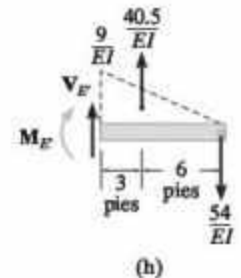
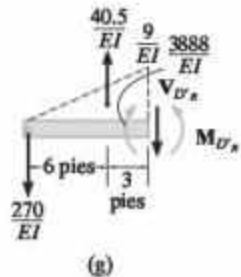
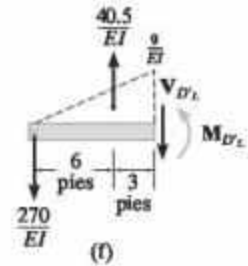
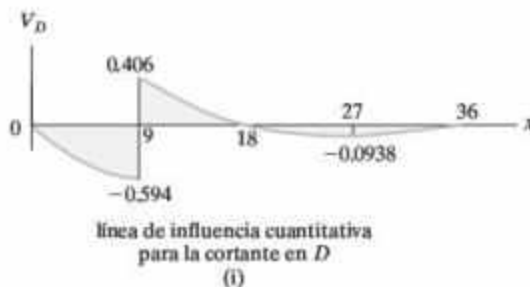
Para el punto E , figura 10-25b, si se usa el método de las secciones en el punto E' correspondiente sobre la viga conjugada, figura 10-25h, se tiene

$$\Sigma M_{E'} = 0; \quad \Delta_E = M_{E'} = \frac{40.5}{EI}(3) - \frac{54}{EI}(9) = -\frac{364.5}{EI}$$

Las ordenadas de la línea de influencia se obtienen al dividir cada uno de los valores anteriores entre el factor de escala $M_{D'} = 3888/EI$. Entonces,

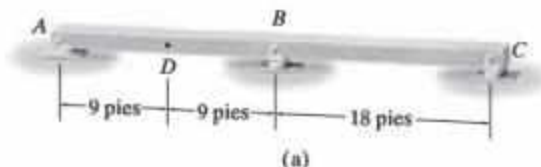
x	V_D
A	0
D_L	-0.594
D_R	0.406
B	0
E	-0.0938
C	0

Al graficar estos valores se obtiene la línea de influencia que se muestra en la figura 10-25i.



EJEMPLO 10.12

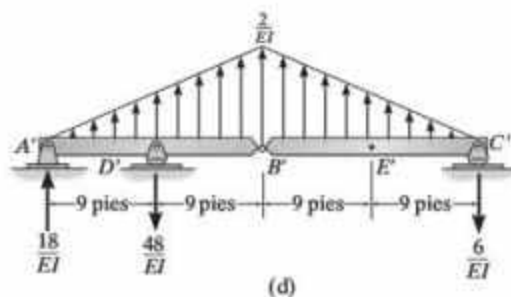
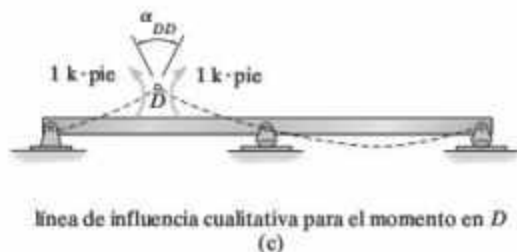
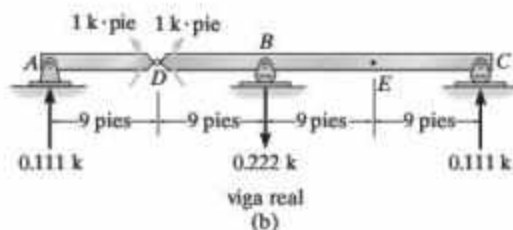
Dibuje la línea de influencia del momento en D para la viga que se muestra en la figura 10-26a. EI es constante. Grafique los valores numéricos cada 9 pies.

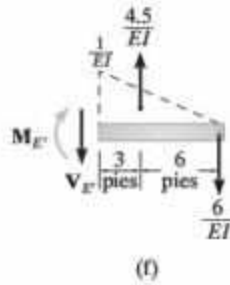
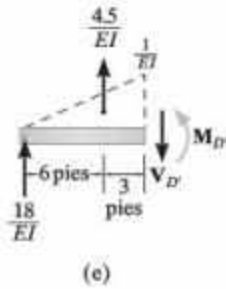
**Figura 10-26****SOLUCIÓN**

Se inserta una bisagra en D con el fin de eliminar la capacidad de la viga para resistir un momento en ese punto, figura 10-26b. Al aplicar momentos par unitarios positivos en D , se obtiene la línea de influencia de la figura 10-26c.

En la figura 10-26b se muestran las reacciones en A , B y C sobre la “viga real”, cuando ésta se somete a los momentos de par unitarios en D . La viga conjugada correspondiente y sus reacciones se muestran en la figura 10-26d. Se sugiere verificar las reacciones en ambos casos. A partir de la figura 10-26d, observe que

$$\Delta_A = M_A = 0 \quad \Delta_B = M_B = 0 \quad \Delta_C = M_C = 0$$





Para el punto D' , figura 10-26e:

$$\Sigma M_{D'} = 0; \quad \Delta_D = M_{D'} = \frac{4.5}{EI}(3) + \frac{18}{EI}(9) = \frac{175.5}{EI}$$

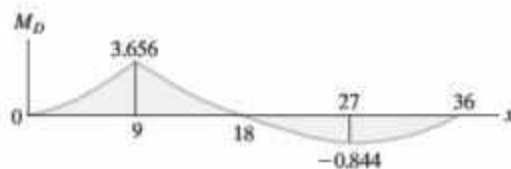
Para el punto E' , figura 10-26f:

$$\Sigma M_{E'} = 0; \quad \Delta_E = M_{E'} = \frac{4.5}{EI}(3) - \frac{6}{EI}(9) = -\frac{40.5}{EI}$$

El desplazamiento angular α_{DD} en D de la “viga real” que se muestra en la figura 10-26c se define por la reacción en D' sobre la viga conjugada. Este factor, $D'_y = 48/EI$, se divide entre los valores anteriores para obtener las coordenadas de la línea de influencia, es decir,

x	M_D
A	0
D	3.656
B	0
E	-0.844
C	0

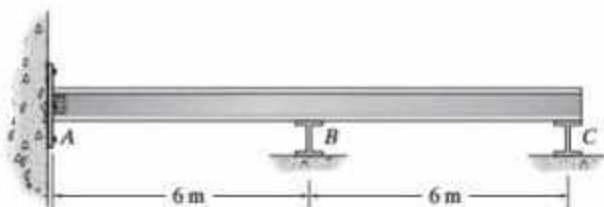
Al graficar estos valores se obtiene la línea de influencia que se muestra en la figura 10-26g.



Línea de influencia cuantitativa
para el momento en D
(g)

PROBLEMAS

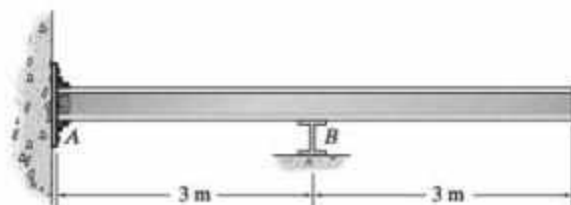
10-41. Dibuje la línea de influencia para la reacción en C . Grafique los valores numéricos en los picos. Suponga que A es un pasador y que B y C son rodillos. EI es constante.



Prob. 10-41

10-42. Dibuje la línea de influencia para el momento en A . Grafique los valores numéricos en los picos. Suponga que A está fijo y que el soporte en B es un rodillo. EI es constante.

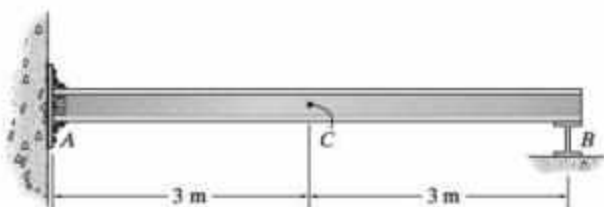
10-43. Dibuje la línea de influencia para la reacción vertical en B . Grafique los valores numéricos en los picos. Suponga que A está fijo y que el soporte en B es un rodillo. EI es constante.



Probs. 10-42/10-43

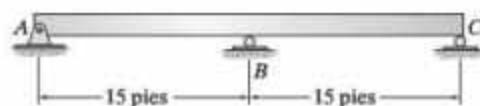
10

***10-44.** Dibuje la línea de influencia para la fuerza cortante en C . Grafique los valores numéricos cada 1.5 m. Suponga que A está fijo y que el soporte en B es un rodillo. EI es constante.



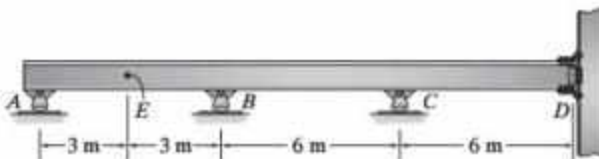
Prob. 10-44

10-45. Dibuje la línea de influencia para la reacción en C . Grafique los valores numéricos cada 5 pies. EI es constante.



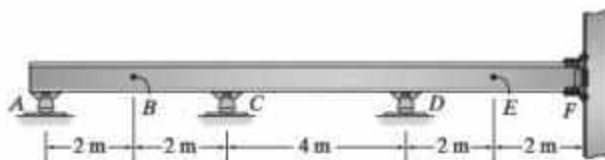
Prob. 10-45

10-46. Bosqueje la línea de influencia para (a) el momento en E ; (b) la reacción en C y (c) la fuerza cortante en E . En cada caso, indique en un dibujo de la viga, dónde debe colocarse una carga viva uniformemente distribuida de modo que produzca un valor positivo máximo de estas funciones. Suponga que la viga está fija en D .



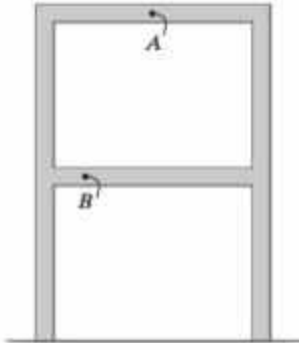
Prob. 10-46

10-47. Bosqueje la línea de influencia para (a) la reacción vertical en C ; (b) el momento en B y (c) la fuerza cortante en E . En cada caso, indique en un dibujo de la viga, dónde debe colocarse una carga viva uniformemente distribuida de modo que produzca un valor positivo máximo de estas funciones. Suponga que la viga está fija en F .



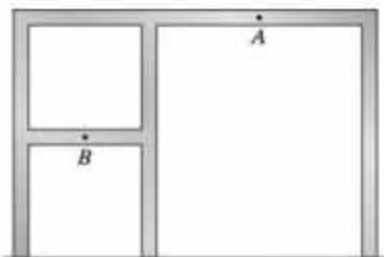
Prob. 10-47

***10-48.** Use el principio de Müller-Breslau para bosquejar la forma general de la línea de influencia para (a) el momento en A y (b) la fuerza cortante en B .



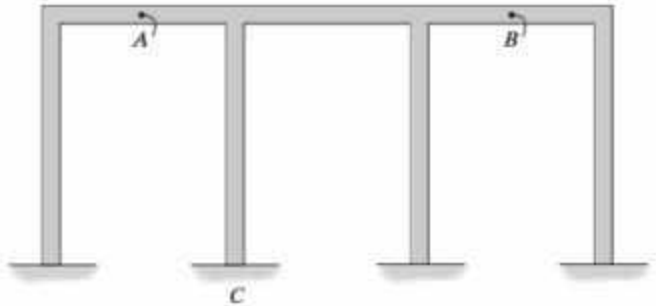
Prob. 10-48

10-49. Use el principio de Müller-Breslau para bosquejar la forma general de la línea de influencia para (a) el momento en A y (b) la fuerza cortante en B .



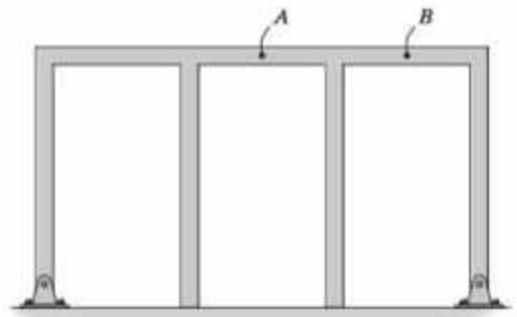
Prob. 10-49

10-50. Use el principio de Müller-Breslau para bosquejar la forma general de la línea de influencia para (a) el momento en A y (b) la fuerza cortante en B .



Prob. 10-50

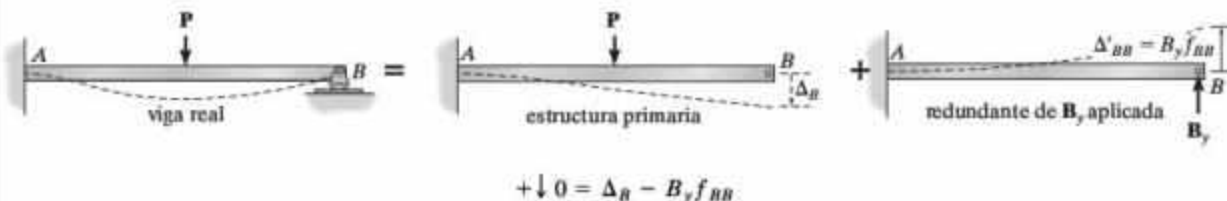
10-51. Use el principio de Müller-Breslau para bosquejar la forma general de la línea de influencia para (a) el momento en A y (b) la fuerza cortante en B .



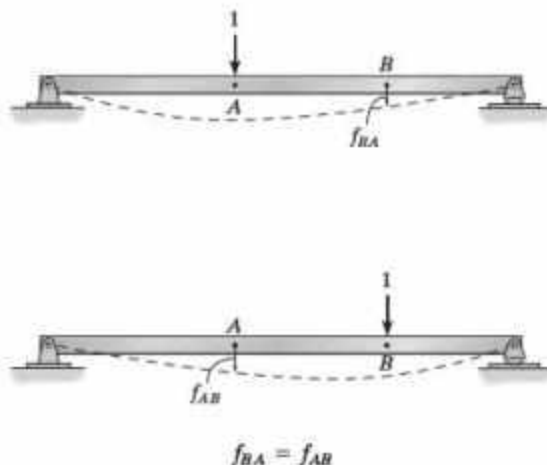
Prob. 10-51

REPASO DEL CAPÍTULO

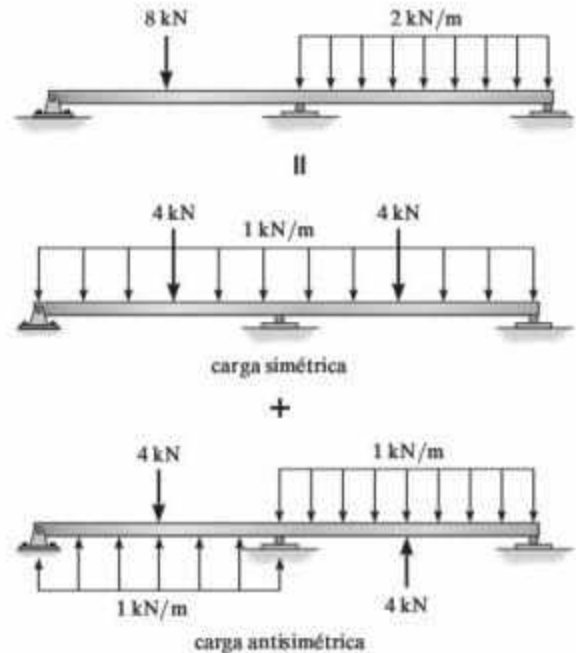
El análisis de una estructura estáticamente indeterminada requiere que se satisfagan el equilibrio, la compatibilidad y las relaciones de fuerza-desplazamiento para la estructura. Un método de análisis de la fuerza consiste en escribir las ecuaciones que satisfacen los requisitos de compatibilidad y de fuerza-desplazamiento, lo que proporciona una solución directa para las reacciones redundantes. Una vez obtenido esto, las reacciones restantes se encuentran con base en las ecuaciones de equilibrio.



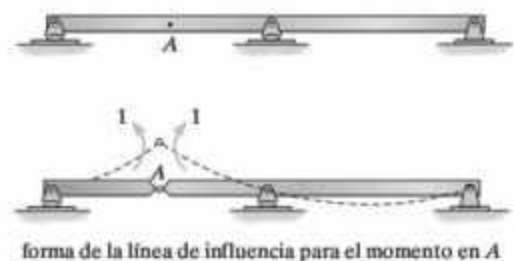
El método de la fuerza puede simplificarse mediante el teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos, el cual establece que el desplazamiento de un punto B sobre una estructura debido a una carga unitaria que actúa en el punto A , f_{BA} , es igual al desplazamiento del punto A cuando la carga actúa en B , f_{AB} .



El análisis de una estructura estáticamente indeterminada puede simplificarse si la estructura tiene una simetría del material, la geometría y la carga respecto a su eje central. En particular, las estructuras que tienen una carga asimétrica pueden sustituirse por la superposición de una carga simétrica y antisimétrica.



Las líneas de influencia para estructuras estáticamente indeterminadas consistirán en *líneas curvas*. Se pueden bosquejar usando el principio de Müller-Breslau, el cual establece que la forma de la línea de influencia, ya sea para una reacción, una fuerza cortante o un momento esté a la misma escala que la forma alterada de la estructura cuando se vea afectada por la reacción, la fuerza cortante o el momento, respectivamente. Si se emplea el teorema de Maxwell de las deflexiones recíprocas, es posible obtener los valores específicos de las ordenadas de cualquier línea de influencia.





Los elementos de este marco están conectados fijamente, por lo que el marco es estáticamente indeterminado.

Método de análisis del desplazamiento: Ecuaciones de pendiente-deflexión

En este capítulo se describen brevemente las ideas básicas para analizar estructuras utilizando el método de análisis del desplazamiento. Una vez que se hayan presentado estos conceptos, se desarrollarán las ecuaciones generales de pendiente-deflexión, y después se usarán para analizar vigas y marcos estáticamente indeterminados.

11.1 Método de análisis del desplazamiento: Procedimientos generales

Todas las estructuras deben satisfacer los requisitos de equilibrio, desplazamiento de carga y compatibilidad de los desplazamientos a fin de garantizar su seguridad. En la sección 10-1 se estableció que hay dos formas diferentes de satisfacer estos requisitos cuando se analiza una estructura estáticamente indeterminada. El método de análisis de la fuerza, que se estudió en el capítulo anterior, se basa en la identificación de las fuerzas redundantes desconocidas, para después satisfacer las ecuaciones de compatibilidad de la estructura. Esto se hace al expresar los desplazamientos en términos de las cargas usando las relaciones de carga-desplazamiento. Al resolver las ecuaciones resultantes se obtienen las reacciones redundantes, y después se utilizan las ecuaciones de equilibrio para determinar las reacciones restantes de la estructura.

El *método del desplazamiento* funciona de manera inversa. Requiere en primer lugar satisfacer las ecuaciones de equilibrio para la estructura. Para ello se escriben los desplazamientos desconocidos en términos de la carga usando las relaciones de carga-desplazamiento, luego se resuelven estas ecuaciones para obtener los desplazamientos. Una vez que se conocen los desplazamientos, se determinan las cargas desconocidas a partir de las ecuaciones de compatibilidad empleando las relaciones de carga-desplazamiento. Todos los métodos de desplazamiento siguen este pro-

cedimiento general. En este capítulo se generalizará el procedimiento para producir las ecuaciones de pendiente-deflexión. En el capítulo 12 se desarrollará el método de distribución de momentos, el cual deja de lado el cálculo de los desplazamientos y en su lugar hace posible aplicar una serie de correcciones de convergencia que permiten calcular directamente los momentos extremos. Por último, en los capítulos 14, 15 y 16 se ilustrará la manera de aplicar este método mediante un análisis matricial, lo que lo hace adecuado para su uso en computadoras.

En el análisis siguiente se mostrará la forma de identificar los desplazamientos desconocidos en una estructura y se desarrollarán algunas de las relaciones de carga-desplazamiento más importantes para los elementos de vigas y marcos. Los resultados se usarán en la próxima sección y en los capítulos posteriores como base para aplicar el método de análisis del desplazamiento.

Grados de libertad. Cuando una estructura está cargada, los puntos especificados sobre ella, llamados *nodos*, experimentarán desplazamientos desconocidos. A estos desplazamientos se les conoce como *grados de libertad* para la estructura, y en el método de análisis del desplazamiento resulta importante especificar estos grados de libertad puesto que se convierten en las incógnitas al aplicar el método. El número de estas incógnitas se conoce como el grado en que la estructura es cinemáticamente indeterminada.

Para conocer la indeterminación cinemática se puede considerar que la estructura consiste en una serie de elementos conectados a los nodos, los cuales se encuentran usualmente en las *juntas*, *soportes* o *extremos* de un elemento, o cuando éste experimenta un *cambio* repentino en su *sección transversal*. En tres dimensiones, cada nodo en un marco o una viga puede tener un máximo de tres desplazamientos lineales y tres desplazamientos de rotación; y en dos dimensiones, cada nodo puede tener a lo sumo dos desplazamientos lineales y un desplazamiento de rotación. Además, los desplazamientos nodales pueden restringirse mediante los soportes, o debido a los supuestos basados en el comportamiento de la estructura. Por ejemplo, si la estructura es una viga y sólo se considera la deformación debida a la flexión, entonces no puede haber un desplazamiento lineal a lo largo del eje de la viga puesto que este desplazamiento lo causa la deformación proveniente de una fuerza axial.

Estos conceptos se aclaran si se consideran algunos ejemplos, comenzando con la viga de la figura 11-1a. Aquí cualquier carga P aplicada a la viga hará que el nodo A sólo gire (si se ignora la deformación axial), en tanto que el movimiento del nodo B está totalmente restringido. En consecuencia, la viga tiene sólo un grado de libertad desconocido, θ_A , y por lo tanto es cinemáticamente indeterminada de primer grado. La viga de la figura 11-1b tiene nodos en A , B , y C y, por lo tanto, tiene cuatro grados de libertad, designados por los desplazamientos de rotación θ_A , θ_B , θ_C y el desplazamiento vertical Δ_C ; es cinemáticamente indeterminada de cuarto grado. Considere ahora el marco de la figura 11-1c. Una vez más, si se pasa por alto la deformación axial de los elementos, una carga P arbitraria aplicada al marco puede hacer que los nodos B y C giren y se puedan desplazar horizontalmente una cantidad *igual*. En consecuencia, el marco tiene tres grados de libertad, θ_B , θ_C , Δ_B , y por lo tanto es cinemáticamente indeterminado de tercer grado.

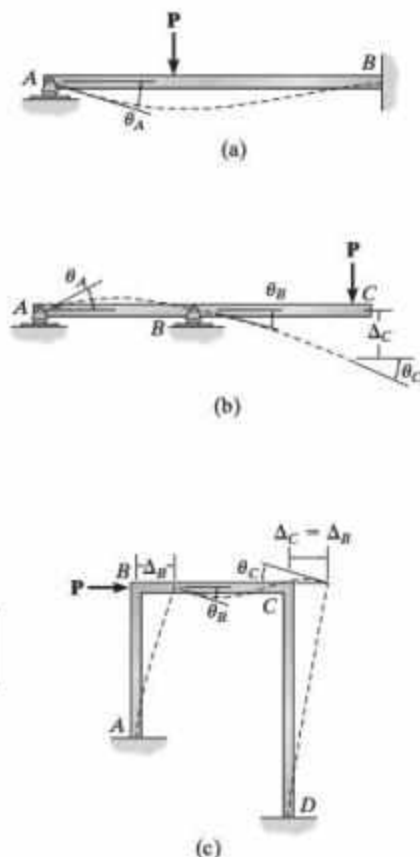


Figura 11-1

En resumen, la especificación de la indeterminación cinemática o la cantidad de grados de libertad no restringidos para la estructura, es un primer paso necesario cuando se aplica el método de análisis del desplazamiento. Con esto se identifica el número de incógnitas en el problema, con base en los supuestos sobre el comportamiento de la deformación de la estructura. Además, una vez que se conocen estos desplazamientos nodales, es posible especificar completamente la deformación de los elementos estructurales, y obtener las cargas dentro de los elementos.

11.2 Ecuaciones de pendiente-deflexión

Como se indicó anteriormente, el método de los desplazamientos consistentes que se estudió en el capítulo 10 es un método de análisis de la fuerza, puesto que requiere escribir las ecuaciones que relacionan las fuerzas o momentos desconocidos en una estructura. Por desgracia, su uso está limitado a estructuras que *no* son muy indeterminadas. Esto se debe a que se requiere mucho trabajo para establecer las ecuaciones de compatibilidad y, además, cada ecuación escrita involucra a *todas las incógnitas*, lo que hace difícil resolver el sistema de ecuaciones resultante a menos que se cuente con una computadora. En comparación, el método de la pendiente-deflexión no es tan complicado. Como se verá más adelante, se requiere menos trabajo tanto al escribir las ecuaciones necesarias para obtener la solución del problema como al resolver estas ecuaciones y encontrar los desplazamientos y cargas internas desconocidas. Además, el método puede programarse fácilmente en una computadora y emplearse para analizar una amplia gama de estructuras indeterminadas.

El método de la pendiente-deflexión fue desarrollado originalmente por Heinrich Manderla y Otto Mohr con el propósito de estudiar los esfuerzos secundarios en las armaduras. Después, en 1915, G.A. Maney desarrolló una versión mejorada de esta técnica y la aplicó al análisis de vigas indeterminadas y estructuras armadas.

Caso general. El método de la pendiente-deflexión se llama así porque relaciona las pendientes y las deflexiones desconocidas con la carga aplicada sobre una estructura. Con el fin de desarrollar la forma general de las ecuaciones de pendiente-deflexión, se considerará un claro típico AB de una viga continua, como el que se muestra en la figura 11-2, el cual se somete a una carga arbitraria y tiene una EI constante. Se desea relacionar los momentos internos en los extremos de la viga M_{AB} y M_{BA} en términos de sus tres grados de libertad, es decir, sus desplazamientos angulares θ_A y θ_B y el desplazamiento lineal Δ , que puede ser causado por un asentamiento relativo entre los soportes. Como se desarrollará una fórmula, los *momentos y desplazamientos angulares* se considerarán *positivos* cuando actúen en *sentido horario* sobre el claro, como se muestra en la figura 11-2. Además, el *desplazamiento lineal* Δ se considera *positivo*, de la manera que se muestra, puesto que este desplazamiento hace que la cuerda del claro y el ángulo de la cuerda del claro ψ giren en *sentido horario*.

Las ecuaciones de pendiente-deflexión pueden obtenerse empleando el principio de superposición al considerar en forma *separada* los momentos desarrollados en cada soporte debido a cada uno de los desplazamientos θ_A , θ_B y Δ , y después las cargas.

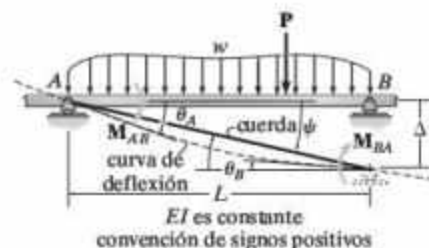


Figura 11-2

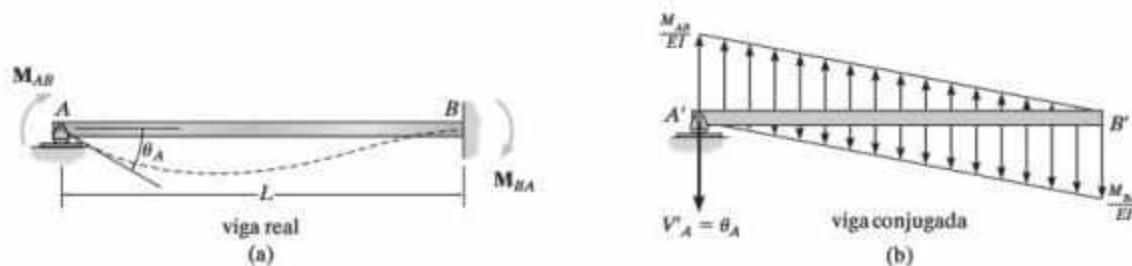


Figura 11-3

Desplazamiento angular en A, θ_A . Considere que el nodo A del elemento que se muestra en la figura 11-3a gira θ_A , en tanto que el nodo B en su extremo lejano se *mantiene fijo*. Para determinar el momento M_{AB} necesario para causar este desplazamiento se usará el método de la viga conjugada. Para este caso, la viga conjugada se muestra en la figura 11-3b. Observe que la fuerza cortante en el extremo A' actúa hacia abajo sobre la viga, puesto que θ_A tiene sentido horario. La deflexión de la "viga real" en la figura 11-3a debe ser cero en A y B, y por lo tanto la sumatoria correspondiente de los *momentos* en cada extremo A' y B' de la viga conjugada también debe ser igual a cero. De esto resulta

$$\downarrow + \Sigma M_{A'} = 0; \quad \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{AB}}{EI} \right) L \right] \frac{L}{3} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{BA}}{EI} \right) L \right] \frac{2L}{3} = 0$$

$$\downarrow + \Sigma M_{B'} = 0; \quad \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{BA}}{EI} \right) L \right] \frac{L}{3} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{AB}}{EI} \right) L \right] \frac{2L}{3} + \theta_A L = 0$$

de lo cual se obtienen las siguientes relaciones de carga-desplazamiento.

$$M_{AB} = \frac{4EI}{L} \theta_A \quad (11-1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L} \theta_A \quad (11-2)$$

Desplazamiento angular en B, θ_B . De manera similar, si el extremo B de la viga gira hasta su posición final θ_B , mientras el extremo A se *mantiene fijo*, figura 4.11, es posible relacionar el momento aplicado M_{BA} con el desplazamiento angular θ_B y el momento de reacción M_{AB} en la pared. Los resultados son

$$M_{BA} = \frac{4EI}{L} \theta_B \quad (11-3)$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} \theta_B \quad (11-4)$$

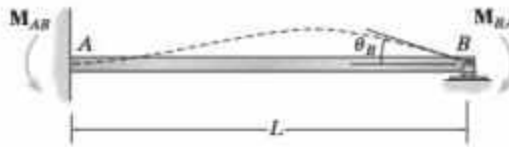


Figura 11-4

Desplazamiento lineal relativo, Δ . Si el nodo lejano B del elemento se desplaza con respecto a A , de modo que la cuerda del elemento gira en sentido horario (desplazamiento positivo) pero los dos extremos no giran, entonces en el elemento se desarrollan momentos y reacciones cortantes iguales pero opuestos, figura 11-5a. Como antes, el momento M puede relacionarse con el desplazamiento Δ usando el método de la viga conjugada. En este caso, la viga conjugada, figura 11-5b, está libre en ambos extremos, puesto que la viga real (elemento) está fijamente soportada. Sin embargo, debido al *desplazamiento* de la viga real en B , el momento en el extremo B' de la viga conjugada debe tener una magnitud de Δ , como se indica.* Al sumar momentos respecto a B' , se tiene

$$\sum M_{B'} = 0; \quad \left[\frac{1}{2} \frac{M}{EI} (L) \left(\frac{2}{3} L \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \frac{M}{EI} (L) \left(\frac{1}{3} L \right) \right] - \Delta = 0$$

$$M_{AB} = M_{BA} = M = -\frac{6EI}{L^2} \Delta$$

(11-5)

Por la convención de signos adoptada, este momento inducido es negativo debido a que, para lograr el equilibrio, debe actuar en sentido antihorario sobre el elemento.

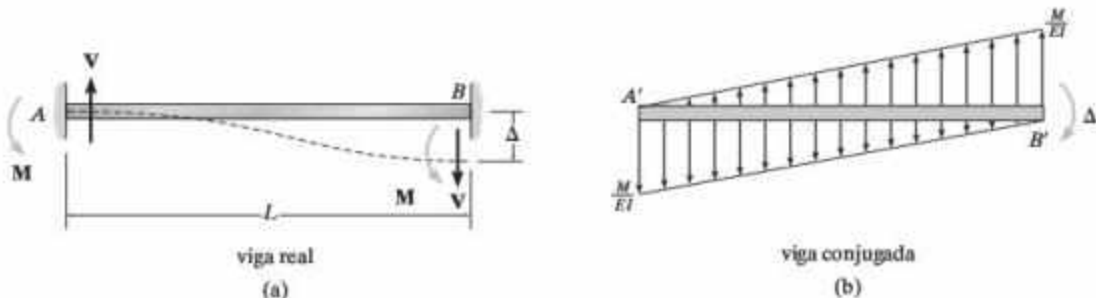


Figura 11-5

*Los diagramas de momento que se muestran sobre la viga conjugada se determinaron mediante el método de superposición para una viga simplemente apoyada, según se explicó en la sección 4-5.

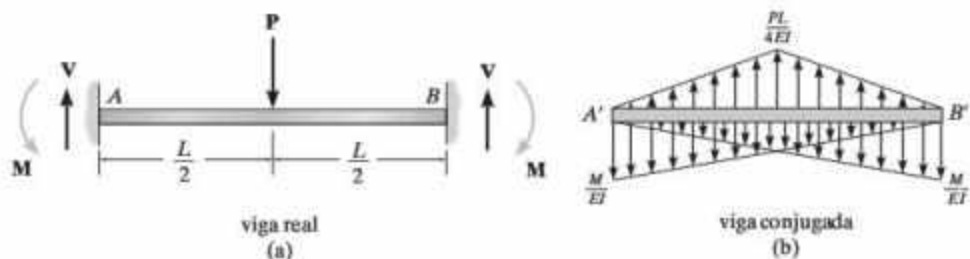


Figura 11-6

Momentos en extremos fijos. En los casos anteriores se han considerado las relaciones entre los desplazamientos y los momentos necesarios M_{AB} y M_{BA} que actúan en los nodos A y B , respectivamente. Sin embargo, por lo general los desplazamientos lineales o angulares de los nodos son causados por las *cargas* que actúan sobre el claro de los elementos, no por los momentos que actúan en sus nodos. Para desarrollar las ecuaciones de pendiente-deflexión es necesario transformar estas *cargas sobre el claro* en momentos equivalentes que actúen en los nodos, y después usar las relaciones carga-desplazamiento que se acaban de obtener. Esto se logra simplemente al encontrar el momento de reacción que cada carga desarrolla en los nodos. Por ejemplo, considere el elemento fijamente apoyado que se muestra en la figura 11-6a, el cual está sometido a una carga concentrada P en su centro. La viga conjugada para este caso se muestra en la figura 11-6b. Como se requiere que la pendiente en cada extremo sea igual a cero,

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{PL}{4EI} \right) L \right] - 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) L \right] &= 0 \\
 M &= \frac{PL}{8}
 \end{aligned}$$

Este momento se denomina *momento de extremo fijo* (FEM). Observe que de acuerdo con la convención de signos adoptada, es negativo en el nodo A (sentido antihorario) y positivo en el nodo B (sentido horario). Por comodidad en la resolución de problemas, los momentos de extremo fijo se han calculado para otras cargas y se muestran tabulados en el interior de la contraportada del libro. Si se supone que estos FEM se han determinado para un problema específico (figura 11-7), se tiene que

$$M_{AB} = (\text{FEM})_{AB} \qquad M_{BA} = (\text{FEM})_{BA} \qquad (11-6)$$

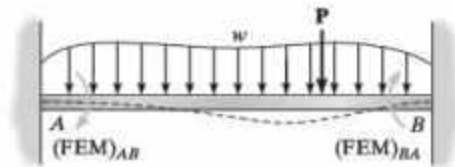


Figura 11-7

Ecuación de pendiente-deflexión. Si los momentos en los extremos debidos a cada desplazamiento (ecuaciones 11-1 a 11-5) y la carga (ecuación 11-6) se suman, los momentos resultantes en los extremos pueden escribirse como

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 2E\left(\frac{I}{L}\right)\left[2\theta_A + \theta_B - 3\left(\frac{\Delta}{L}\right)\right] + (\text{FEM})_{AB} \\ M_{BA} &= 2E\left(\frac{I}{L}\right)\left[2\theta_B + \theta_A - 3\left(\frac{\Delta}{L}\right)\right] + (\text{FEM})_{BA} \end{aligned} \quad (11-7)$$

Debido a que estas dos ecuaciones son similares, el resultado puede expresarse como una sola ecuación. Si se refiere a uno de los extremos del claro como el extremo cercano (N) y al otro extremo como el extremo lejano (F), y se representa la rigidez del elemento como $k = I/L$, y la rotación de la cuerda del claro como ψ (psi) = Δ/L , se puede escribir

$$\begin{aligned} M_N &= 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N \\ \text{Para el claro interno o el claro final} \\ \text{con el extremo lejano fijo} \end{aligned} \quad (11-8)$$

donde

M_N = momento interno en el extremo cercano del claro; este momento es *positivo en sentido horario* cuando actúa sobre el claro.

E, k = módulo de elasticidad del material y rigidez del claro
 $k = I/L$.

θ_N, θ_F = pendientes de los extremos cercano y lejano o desplazamientos angulares del claro en los soportes; los ángulos se miden en *radianes* y son *positivos en sentido horario*.

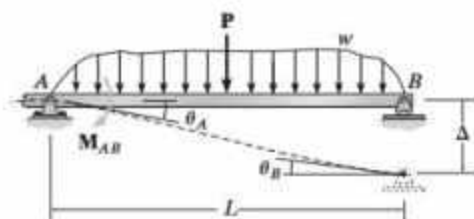
ψ = rotación de la cuerda del claro debida a un desplazamiento lineal, es decir, $\psi = \Delta/L$; este ángulo se mide en *radianes* y es *positivo en sentido horario*.

$(\text{FEM})_N$ = momento del extremo fijo en el soporte del extremo cercano; el momento es *positivo en sentido horario* cuando actúa sobre el claro; consulte la tabla en el interior de la contraportada para ver distintas condiciones de carga.

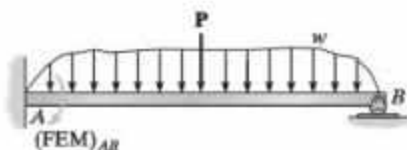
A partir de la deducción anterior, la ecuación 11-8 es a la vez una relación de compatibilidad y de carga-desplazamiento, que se encontró considerando sólo los efectos de la flexión e ignorando las deformaciones axiales y cortantes. Se conoce como la *ecuación general de pendiente-deflexión*. Cuando se utiliza para la solución de problemas, esta ecuación se aplica *dos veces* para cada elemento del claro (AB); es decir, se aplica desde A hasta B y desde B hasta A para el claro AB que se muestra en la figura 11-2.



Este puente peatonal tiene una cubierta de concreto reforzado. Como se extiende sobre todos sus soportes, es indeterminada de segundo grado. Las ecuaciones de pendiente-deflexión proporcionan un método conveniente para encontrar los momentos internos en cada claro.



(a)



(b)

Figura 11-8

Claro final articulado. En ocasiones, un claro final de una viga o un marco está soportado mediante un pasador o un rodillo en su *extremo lejano*, figura 11-8a. Cuando esto ocurre, el momento en el rodillo o pasador debe ser cero; y siempre que el desplazamiento angular θ_B en este soporte no deba determinarse, es posible modificar las condiciones generales de la ecuación de pendiente-deflexión a fin de aplicarla *sólo una vez* al claro, en vez de dos veces. Para esto se aplicará la ecuación 11-8 o las ecuaciones 11-7 a cada extremo de la viga que se muestra en la figura 11-8. Esto resulta en las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} M_N &= 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N \\ 0 &= 2Ek(2\theta_F + \theta_N - 3\psi) + 0 \end{aligned} \quad (11-9)$$

Aquí el $(FEM)_F$ es igual a cero, puesto que el otro extremo está fijo, figura 11-8b. Por otro lado, el $(FEM)_N$ puede obtenerse, por ejemplo, mediante la tabla en la columna derecha del interior de la contraportada de este libro. Al multiplicar la primera ecuación por 2 y restar la segunda ecuación de ésta, se *elimina* la incógnita θ_F y se obtiene

$$M_N = 3Ek(\theta_N - \psi) + (FEM)_N$$

Sólo para un claro final con el extremo lejano articulado o soportado por un rodillo

(11-10)

Como el momento en el extremo lejano es igual a cero, sólo se necesita *una* aplicación de esta ecuación para el claro final. Esto simplifica el análisis porque la ecuación general 11-8, requeriría *dos* aplicaciones para este claro y por lo tanto involucra al desplazamiento angular (adicional) desconocido θ_B (o θ_F) en el soporte del extremo.

Para resumir la aplicación de las ecuaciones de pendiente-deflexión, se considera la viga continua de la figura 11-9, la cual tiene cuatro grados de libertad. Aquí la ecuación 11-8 puede aplicarse dos veces para cada uno de los tres claros, es decir, de A a B, de B a A, de B a C, de C a B, de C a D y de D a C. Estas ecuaciones involucran a las cuatro rotaciones desconocidas, $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D$. Sin embargo, como los momentos extremos en A y D son iguales a cero, no es necesario θ_A y θ_D . Se produce una solución más corta al aplicar la ecuación 11-10 de B a A y de C a D, para después aplicar la ecuación 11-8 de B a C y de C a B. Estas cuatro ecuaciones involucran sólo a las rotaciones desconocidas θ_B y θ_C .

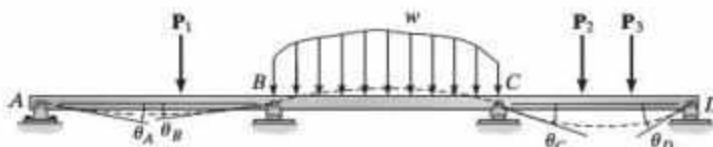


Figura 11-9

11.3 Análisis de vigas

Procedimiento de análisis

Grados de libertad

Marque todos los soportes y articulaciones (nodos) con el fin de identificar los claros de la viga o del marco entre los nodos. Al dibujar la forma alterada de la estructura será posible identificar el número de grados de libertad. Es posible que cada nodo tenga un desplazamiento angular y un desplazamiento lineal. La *compatibilidad* en los nodos se mantiene siempre que los elementos que están conectados fijamente a un nodo experimenten los mismos desplazamientos que el nodo. Si estos desplazamientos no se conocen, y en general así será, entonces por comodidad *suponga* que actúan en *dirección positiva* de modo que causan una rotación en *sentido horario* de un elemento o junta, figura 11-2.

Ecuaciones de pendiente-deflexión

Estas ecuaciones relacionan los momentos desconocidos que se aplican a los nodos a fin de causar su desplazamiento en cualquier claro de la estructura. Si existe una carga en el claro, calcule los FEM usando la tabla que se encuentra en el interior de la contraportada. Además, si un nodo tiene un desplazamiento lineal, Δ , calcule $\psi = \Delta/L$ para los claros adyacentes. Aplique la ecuación 11-8 a cada extremo del claro, generando así *dos* ecuaciones de pendiente-deflexión para cada claro. Sin embargo, si un claro en el *extremo* de una viga o un marco continuo está articulado, aplique la ecuación 11-10 sólo al extremo restringido, lo que genera *una* ecuación de pendiente-deflexión para el claro.

Ecuaciones de equilibrio

Escriba una ecuación de equilibrio para cada grado de libertad desconocido de la estructura. Cada una de estas ecuaciones debe expresarse en términos de los momentos internos desconocidos según se especifica en las ecuaciones de pendiente-deflexión. Para las vigas y los marcos escriba la ecuación de equilibrio de momentos en cada soporte, y para los marcos también escriba las ecuaciones de equilibrio de momentos en cada junta. Si el marco se ladea o se deforma en sentido horizontal, deben relacionarse las fuerzas cortantes de la columna con los momentos en los extremos de ésta. Lo anterior se analiza en la sección 11.5.

Sustituya las ecuaciones de pendiente-deflexión en las ecuaciones de equilibrio y resuelva los desplazamientos desconocidos de las juntas. Estos resultados se sustituyen en las ecuaciones de pendiente-deflexión a fin de determinar los momentos internos en los extremos de cada elemento. Si algunos de los resultados son *negativos*, indican giro en *sentido antihorario*, en tanto que los momentos y los desplazamientos *positivos* se aplican en *sentido horario*.

EJEMPLO 11.1

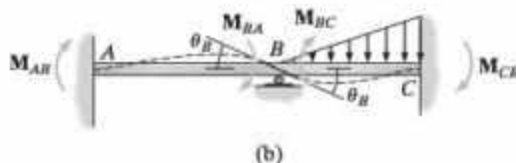
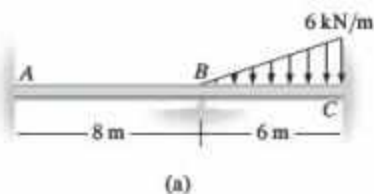


Figura 11-10

SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. En este problema deben considerarse dos claros. Puesto que *no* hay un claro que tenga el extremo lejano articulado o soportado por rodillos, se aplica la ecuación 11-8 para obtener la solución. Si se emplean las fórmulas de los FEM tabuladas para la carga triangular que se muestran en el interior de la contraportada, se tiene

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{30} = -\frac{6(6)^2}{30} = -7.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{20} = \frac{6(6)^2}{20} = 10.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Observe que $(FEM)_{BC}$ es negativo porque actúa en sentido antihorario *sobre la viga* en B. Además, $(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = 0$ puesto que no hay carga en el claro AB.

A fin de identificar las incógnitas, en la figura 11-10b se muestra la curva elástica de la viga. Como se indica, hay cuatro momentos internos desconocidos. Sólo la pendiente en B, θ_B , es desconocida. Como A y C son soportes fijos, $\theta_A = \theta_C = 0$. Además, dado que los soportes no se asientan, ni se desplazan hacia arriba o hacia abajo, $\psi_{AB} = \psi_{BC} = 0$. Para el claro AB, si se considera que A es el extremo cercano y B es el extremo lejano, se tiene

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 0 = \frac{EI}{4}\theta_B \quad (1)$$

Ahora, tomando a B como el extremo cercano y a A como el extremo lejano, resulta

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 0 = \frac{EI}{2}\theta_B \quad (2)$$

De manera similar, para el claro BC se tiene

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] - 7.2 = \frac{2EI}{3}\theta_B - 7.2 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 10.8 = \frac{EI}{3}\theta_B + 10.8 \quad (4)$$

Ecuaciones de equilibrio. Las cuatro ecuaciones anteriores contienen cinco incógnitas. La quinta ecuación necesaria proviene de la condición del equilibrio de momentos en el soporte B . En la figura 11-10c se muestra el diagrama de cuerpo libre de un segmento de la viga en B . Aquí se supone que M_{BA} y M_{BC} actúan en dirección positiva para ser consistentes con las ecuaciones de pendiente-deflexión.* Las cortantes en la viga contribuyen con un momento insignificante alrededor de B puesto que el segmento tiene una longitud diferencial. Por lo tanto,

$$\sum M_B = 0; \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (5)$$

Para resolver, sustituya las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (5), de donde se obtiene

$$\theta_B = \frac{6.17}{EI}$$

Si se sustituye de nuevo este valor en las ecuaciones (1)-(4) resulta

$$M_{AB} = 1.54 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

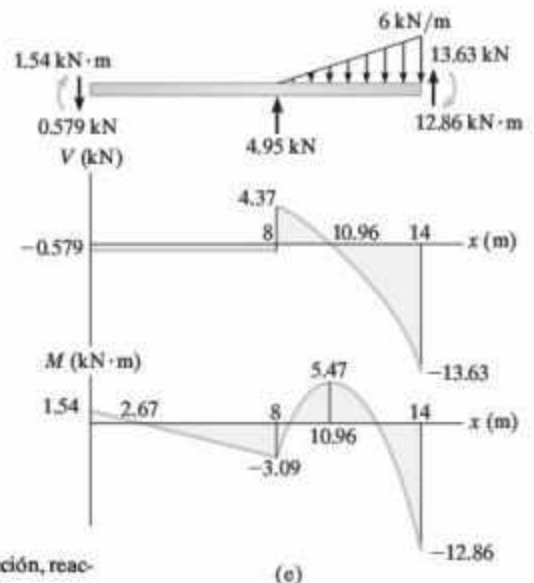
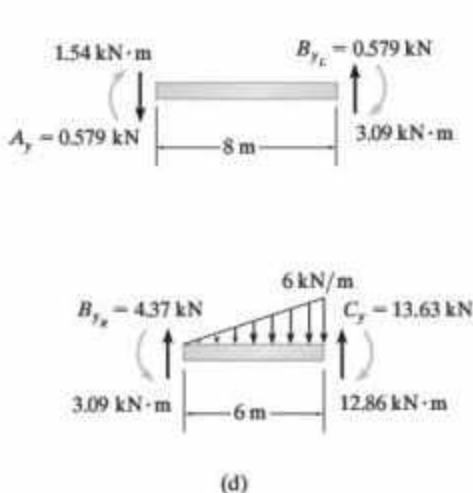
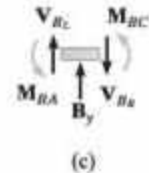
$$M_{BA} = 3.09 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = -3.09 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = 12.86 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El valor negativo para M_{BC} indica que este momento actúa en sentido antihorario sobre la viga, no en sentido horario como se mostró en la figura 11-10b.

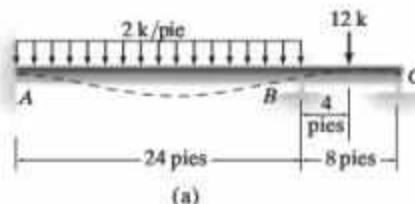
Con base en estos resultados, las fuerzas cortantes en los claros extremos se determinan a partir de las ecuaciones de equilibrio, figura 11-10d. El diagrama de cuerpo libre de toda la viga y los diagramas de fuerza cortante y de momento se muestran en la figura 11-10e.



*En sentido horario sobre el segmento de la viga, pero (por el principio de acción, reacción igual pero opuesta) en sentido antihorario sobre el soporte.

EJEMPLO 11.2

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga que se muestra en la figura 11-1a. EI es constante.

**Figura 11-11****SOLUCIÓN**

Ecuaciones de pendiente-deflexión. En este problema deben considerarse dos claros. La ecuación 11-8 se aplica al claro AB. Se puede usar la ecuación 11-10 para el claro BC porque el extremo C está sobre un rodillo. Si se usan las fórmulas para los FEM tabuladas que se encuentran en el interior de la contraportada, se tiene

$$(FEM)_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{1}{12}(2)(24)^2 = -96 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{1}{12}(2)(24)^2 = 96 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{3PL}{16} = -\frac{3(12)(8)}{16} = -18 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Observe que $(FEM)_{AB}$ y $(FEM)_{BC}$ son negativos, puesto que actúan en sentido antihorario sobre la viga en A y B, respectivamente. Además, como los apoyos no se asientan, $\psi_{AB} = \psi_{BC} = 0$. Al aplicar la ecuación 11-8 para el claro AB y tomar en cuenta que $\theta_A = 0$, se tiene

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{24}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] - 96$$

$$M_{AB} = 0.08333EI\theta_B - 96 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{24}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 96$$

$$M_{BA} = 0.1667EI\theta_B + 96 \quad (2)$$

Si se aplica la ecuación 11-10 con B como el extremo cercano y C como el extremo lejano, resulta

$$M_N = 3E\left(\frac{I}{L}\right)(\theta_N - \psi) + (FEM)_N$$

$$M_{BC} = 3E\left(\frac{I}{8}\right)(\theta_B - 0) - 18$$

$$M_{BC} = 0.375EI\theta_B - 18 \quad (3)$$

Recuerde que la ecuación 11-10 no se aplica de C (extremo cercano) a B (extremo lejano).

Ecuaciones de equilibrio. Las tres ecuaciones anteriores contienen cuatro incógnitas. La cuarta ecuación necesaria proviene de las condiciones de equilibrio en el soporte B . En la figura 11-11b se muestra el diagrama de cuerpo libre. Se tiene

$$\sum M_B = 0; \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (4)$$

Para resolver, sustituya las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (4), de donde resulta

$$\theta_B = -\frac{144.0}{EI}$$

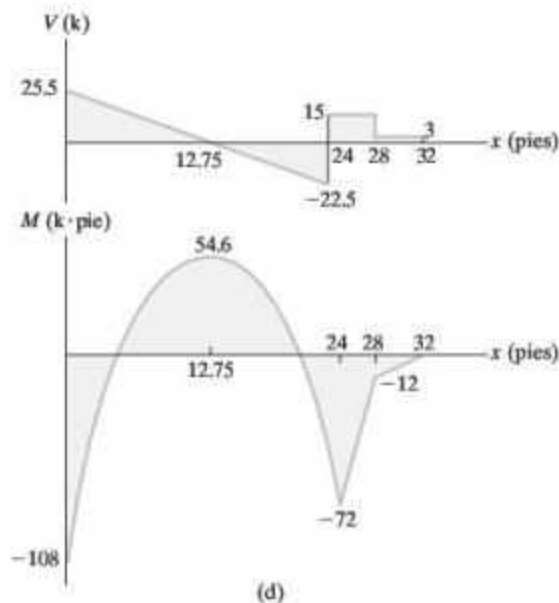
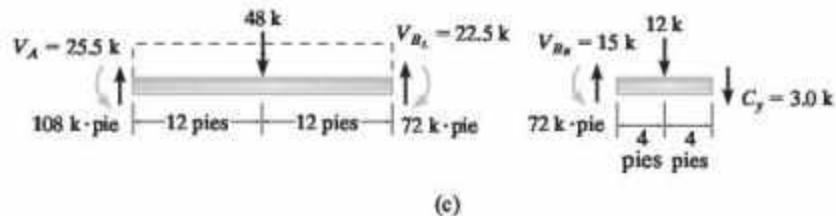
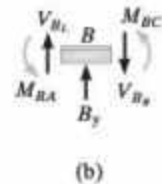
Como θ_B es negativo (sentido antihorario), la curva elástica para la viga se dibujó correctamente en la figura 11-11a. Al sustituir θ_B en las ecuaciones (1)-(3), se obtiene

$$M_{AB} = -108.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BA} = 72.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BC} = -72.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Con base en estos datos para los momentos, se han determinado las reacciones cortantes en los extremos de los claros de la viga, según se muestra en la figura 11-11c. Los diagramas de fuerza cortante y de momento se grafican en la figura 11-11d.



EJEMPLO 11.3

Determine el momento en A y B para la viga que se muestra en la figura 11-12a. El soporte en B se desplaza (asienta) 80 mm. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 5(10^6) \text{ mm}^4$.



(a)

Figura 11-12

SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. En este problema sólo debe considerarse un claro (AB) puesto que el momento en M_{BC} debido a la saliente puede calcularse a partir de la estática. Como no hay carga en el claro AB , los FEM son iguales a cero. Como se muestra en la figura 11-12a, el desplazamiento hacia abajo (asentamiento) de B hace que la cuerda del claro AB gire en sentido horario. Por lo tanto,

$$\psi_{AB} = \psi_{BA} = \frac{0.08 \text{ m}}{4} = 0.02 \text{ rad}$$

La rigidez para AB es

$$k = \frac{I}{L} = \frac{5(10^6) \text{ mm}^4 (10^{-12}) \text{ m}^4/\text{mm}^4}{4 \text{ m}} = 1.25(10^{-6}) \text{ m}^3$$

Al aplicar la ecuación de pendiente-deflexión (ecuación 11-8) al claro AB con $\theta_A = 0$, se tiene

$$M_N = 2E \left(\frac{I}{L} \right) (2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{AB} = 2(200(10^9) \text{ N/m}^2)[1.25(10^{-6}) \text{ m}^3][2(0) + \theta_B - 3(0.02)] + 0 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2(200(10^9) \text{ N/m}^2)[1.25(10^{-6}) \text{ m}^3][2\theta_B + 0 - 3(0.02)] + 0 \quad (2)$$

Ecuaciones de equilibrio. El diagrama de cuerpo libre de la viga en el soporte B se muestra en la figura 11-12c. El equilibrio de momentos requiere que

$$\sum M_B = 0; \quad M_{BA} - 8000 \text{ N}(3 \text{ m}) = 0$$

Si se sustituye la ecuación (2) en esta ecuación resulta

$$1(10^6)\theta_B - 30(10^3) = 24(10^3)$$

$$\theta_B = 0.054 \text{ rad}$$

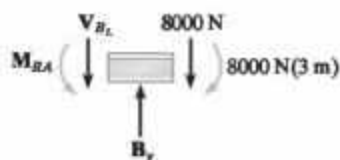
Por lo tanto, a partir de las ecuaciones (1) y (2)

$$M_{AB} = -3.00 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA} = 24.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



(b)



(c)

EJEMPLO 11.4

Determine los momentos internos en los soportes de la viga que se muestra en la figura 11-13a. El soporte de rodillo en C es empujado hacia abajo 0.1 pies por la fuerza P . Considere que $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 1500$ pulg⁴.

**Figura 11-13****SOLUCIÓN**

Ecuaciones de pendiente-deflexión. En este problema deben considerarse tres claros. Se aplica la ecuación 11-8 porque los soportes en los extremos A y D están fijos. Además, sólo el claro AB tiene FEM.

$$(FEM)_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{1}{12}(1.5)(24)^2 = -72.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{1}{12}(1.5)(24)^2 = 72.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Como se muestra en la figura 11-13b, el desplazamiento (o asentamiento) del soporte C ocasiona que ψ_{BC} sea positivo, puesto que la cuerda del claro BC gira en sentido horario, y ψ_{CD} sea negativo, porque la cuerda del claro CD gira en sentido antihorario. Por lo tanto,

$$\psi_{BC} = \frac{0.1 \text{ pie}}{20 \text{ pies}} = 0.005 \text{ rad} \quad \psi_{CD} = -\frac{0.1 \text{ pie}}{15 \text{ pies}} = -0.00667 \text{ rad}$$

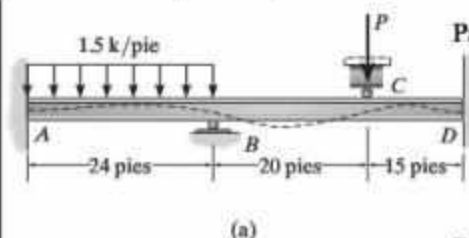
Asimismo, al expresar las unidades de la rigidez en pies, se tiene

$$k_{AB} = \frac{1500}{24(12)^4} = 0.003014 \text{ pies}^3 \quad k_{BC} = \frac{1500}{20(12)^4} = 0.003617 \text{ pies}^3$$

$$k_{CD} = \frac{1500}{15(12)^4} = 0.004823 \text{ pies}^3$$

Si se observa que $\theta_A = \theta_D = 0$ puesto que A y D son soportes fijos, y se aplica la ecuación pendiente-deflexión (ecuación 11-8) dos veces a cada claro, resulta

EJEMPLO 11.4 (Continuación)



Para el claro AB:

$$M_{AB} = 2[29(10^3)(12)^2](0.003014)[2(0) + \theta_B - 3(0)] - 72$$

$$M_{AB} = 25\,173.6\theta_B - 72 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2[29(10^3)(12)^2](0.003014)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 72$$

$$M_{BA} = 50\,347.2\theta_B + 72 \quad (2)$$

Para el claro BC:

$$M_{BC} = 2[29(10^3)(12)^2](0.003617)[\theta_B + \theta_C - 3(0.005)] + 0$$

$$M_{BC} = 60\,416.7\theta_B + 30\,208.3\theta_C - 453.1 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2[29(10^3)(12)^2](0.003617)[2\theta_C + \theta_B - 3(0.005)] + 0$$

$$M_{CB} = 60\,416.7\theta_C + 30\,208.3\theta_B - 453.1 \quad (4)$$

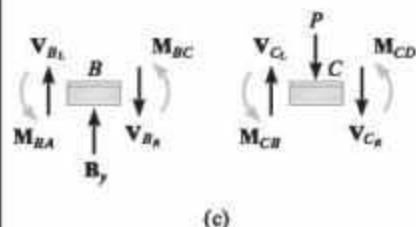
Para el claro CD:

$$M_{CD} = 2[29(10^3)(12)^2](0.004823)[2\theta_C + 0 - 3(-0.00667)] + 0$$

$$M_{CD} = 80\,555.6\theta_C + 0 + 805.6 \quad (5)$$

$$M_{DC} = 2[29(10^3)(12)^2](0.004823)[2(0) + \theta_C - 3(-0.00667)] + 0$$

$$M_{DC} = 40\,277.8\theta_C + 805.6 \quad (6)$$



Ecuaciones de equilibrio. Estas seis ecuaciones contienen ocho incógnitas. Si se escriben las ecuaciones de equilibrio de momentos para los soportes en B y C, figura 10-13c, se tiene

$$\downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$

Para encontrar la solución se sustituyen las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7), y las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (8). De esto resulta,

$$\theta_C + 3.667\theta_B = 0.01262$$

$$-\theta_C - 0.214\theta_B = 0.00250$$

Por lo tanto,

$$\theta_B = 0.00438 \text{ rad} \quad \theta_C = -0.00344 \text{ rad}$$

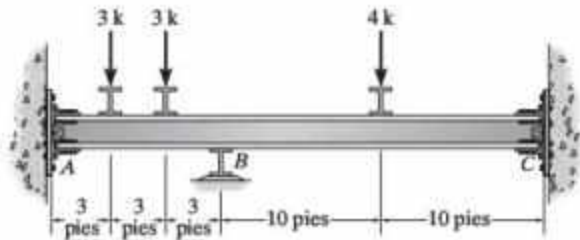
El valor negativo de θ_C indica un giro en sentido inverso de la tangente en C, figura 11-13a. Al sustituir estos valores en las ecuaciones (1)-(6) se obtiene

$M_{AB} = 38.2 \text{ k} \cdot \text{pie}$	Resp.
$M_{BA} = 292 \text{ k} \cdot \text{pie}$	Resp.
$M_{BC} = -292 \text{ k} \cdot \text{pie}$	Resp.
$M_{CB} = -529 \text{ k} \cdot \text{pie}$	Resp.
$M_{CD} = 529 \text{ k} \cdot \text{pie}$	Resp.
$M_{DC} = 667 \text{ k} \cdot \text{pie}$	Resp.

Aplice estos momentos en los extremos a los claros BC y CD y demuestre que $V_{CL} = 41.05 \text{ k}$, $V_{CR} = -79.73 \text{ k}$ y que la fuerza sobre el rodillo es $P = 121 \text{ k}$.

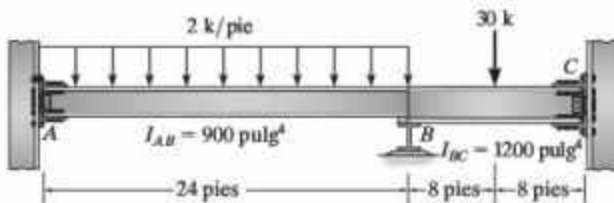
PROBLEMAS

11-1. Determine los momentos en A , B y C , y después dibuje el diagrama de momento. EI es constante. Suponga que el soporte en B es un rodillo y que A y C están fijos.



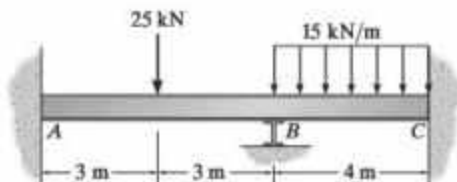
Prob. 11-1

11-2. Determine los momentos en A , B y C , y después dibuje el diagrama de momento para la viga. El momento de inercia de cada claro se indica en la figura. Suponga que el soporte en B es un rodillo y que A y C están fijos. $E = 29(10^3)$ ksi.



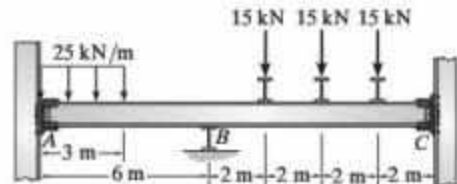
Prob. 11-2

11-3. Determine los momentos en los soportes A y C , y después dibuje el diagrama de momento. Suponga que la junta B es un rodillo. EI es constante.



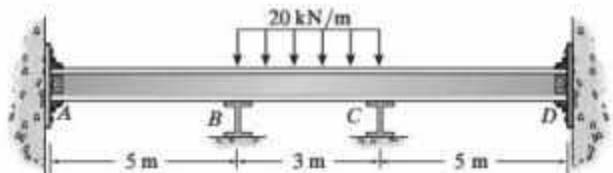
Prob. 11-3

***11-4.** Determine los momentos en los soportes, y después dibuje el diagrama de momento. Suponga que B es un rodillo y que A y C están fijos. EI es constante.



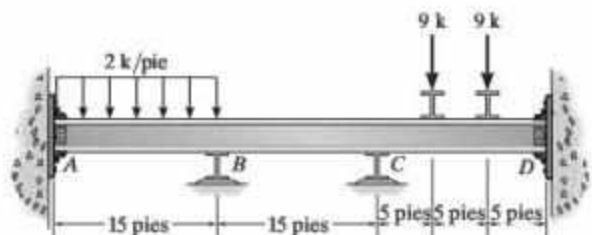
Prob. 11-4

11-5. Determine el momento en A , B , C y D , y después dibuje el diagrama de momento para la viga. Suponga que los soportes en A y D están fijos y que B y C son rodillos. EI es constante.



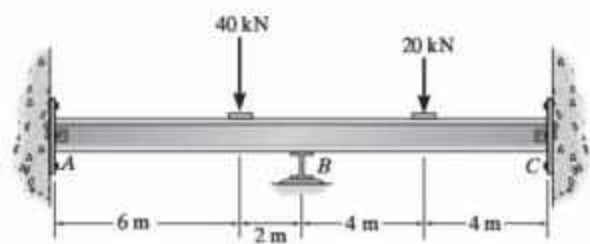
Prob. 11-5

11-6. Determine los momentos en A , B , C y D , y después dibuje el diagrama de momento para la viga. Suponga que los soportes en A y D están fijos y que B y C son rodillos. EI es constante.



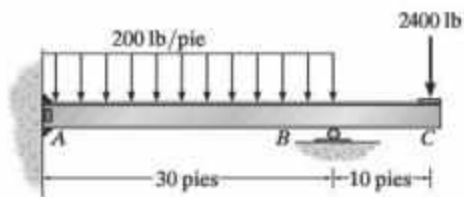
Prob. 11-6

11-7. Determine el momento en *B*, y después dibuje el diagrama de momento para la viga. Suponga que los soportes en *A* y *C* están articulados y que *B* es un rodillo. *EI* es constante.



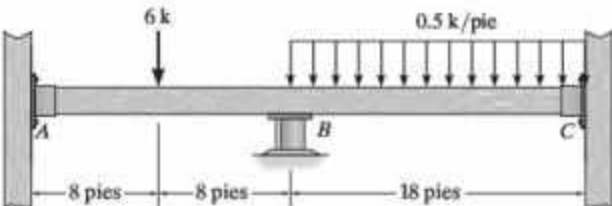
Prob. 11-7

11-10. Determine los momentos en *A* y *B*, y después dibuje el diagrama de momento para la viga. *EI* es constante.



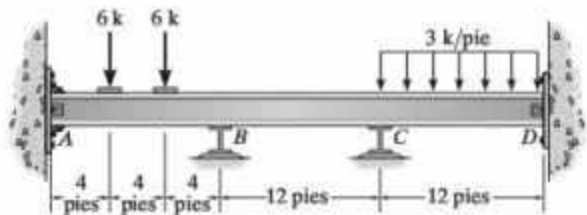
Prob. 11-10

***11-8.** Determine los momentos en *A*, *B* y *C*, y después dibuje el diagrama de momento. *EI* es constante. Suponga que el soporte en *B* es un rodillo y que *A* y *C* están fijos.



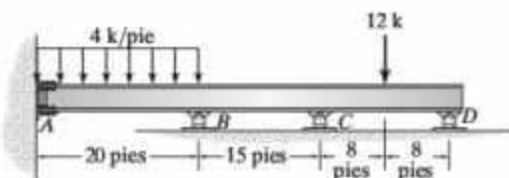
Prob. 11-8

11-11. Determine los momentos en *A*, *B* y *C*, y después dibuje el diagrama de momento para la viga. Suponga que el soporte en *A* está fijo, que *B* y *C* son rodillos, y que *D* está articulado. *EI* es constante.



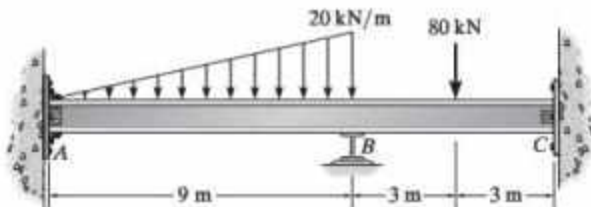
Prob. 11-11

11-9. Determine los momentos en cada soporte, y después dibuje el diagrama de momento. Suponga que *A* está fijo. *EI* es constante.



Prob. 11-9

***11-12.** Determine los momentos que actúan en *A* y *B*. Suponga que *A* está fijamente apoyado, que *B* es un rodillo y que *C* está articulado. *EI* es constante.



Prob. 11-12

11.4 Análisis de marcos: Sin lado

Un marco no se ladeará, o no se desplazará a la izquierda o a la derecha, siempre y cuando esté debidamente restringido. En la figura 11-14 se muestran algunos ejemplos. Además, no se producirá un desplazamiento lateral en un marco no restringido, siempre que sea simétrico con respecto a la carga y a la geometría, como se muestra en la figura 11-15. Para ambos casos, el término y en las ecuaciones de pendiente-deflexión es igual a cero, puesto que la flexión no hace que las juntas tengan un desplazamiento lineal.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de las ecuaciones de pendiente-deflexión usando el procedimiento de análisis que se describió en la sección 11-3 para este tipo de marcos.

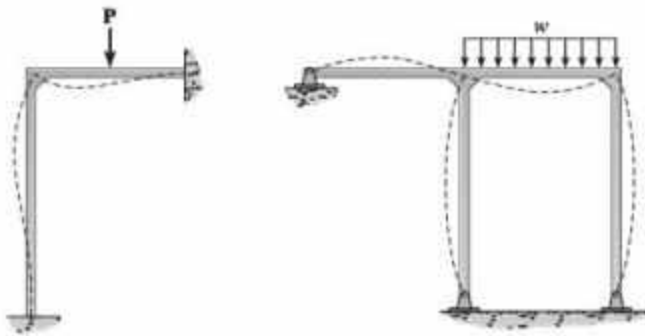


Figura 11-14

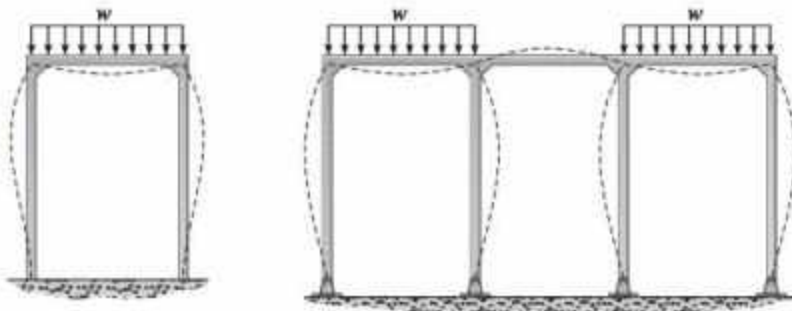
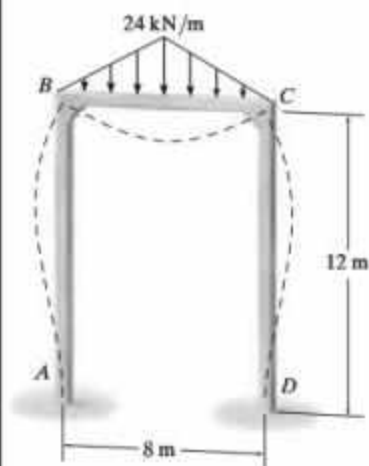


Figura 11-15

EJEMPLO 11.5

(a)

Figura 11-16

Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 11-16a, EI es constante.

SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. En este problema deben considerarse tres claros: AB , BC y CD . Como los claros están fijamente apoyados en A y D , se aplica la ecuación 11-8 para encontrar la solución.

A partir de la tabla que se encuentra en el interior de la contraportada, los FEM para BC son

$$(FEM)_{BC} = -\frac{5wL^2}{96} = -\frac{5(24)(8)^2}{96} = -80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{5wL^2}{96} = \frac{5(24)(8)^2}{96} = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Observe que $\theta_A = \theta_D = 0$ y que $\psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = 0$, puesto que no se producirá un desplazamiento lateral.

Al aplicar la ecuación 11-8, se tiene

$$M_N = 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 0$$

$$M_{AB} = 0.1667EI\theta_B \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 0$$

$$M_{BA} = 0.333EI\theta_B \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3(0)] - 80$$

$$M_{BC} = 0.5EI\theta_B + 0.25EI\theta_C - 80 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3(0)] + 80$$

$$M_{CB} = 0.5EI\theta_C + 0.25EI\theta_B + 80 \quad (4)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_C + 0 - 3(0)] + 0$$

$$M_{CD} = 0.333EI\theta_C \quad (5)$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2(0) + \theta_C - 3(0)] + 0$$

$$M_{DC} = 0.1667EI\theta_C \quad (6)$$

Ecuaciones de equilibrio. Las seis ecuaciones anteriores contienen ocho incógnitas. Las dos ecuaciones de equilibrio restantes provienen del equilibrio de momentos en las juntas B y C , figura 11-16b. Se tiene

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$

Para resolver estas ocho ecuaciones se sustituyen las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7), y se reemplazan las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (8). Resulta

$$0.833EI\theta_B + 0.25EI\theta_C = 80$$

$$0.833EI\theta_C + 0.25EI\theta_B = -80$$

Al resolver simultáneamente se obtiene

$$\theta_B = -\theta_C = \frac{137.1}{EI}$$

la cual concuerda con la manera en que se deforma el marco, como se muestra en la figura 11-16a. Si se sustituye en las ecuaciones (1)-(6), se tiene

$$M_{AB} = 22.9 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BA} = 45.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

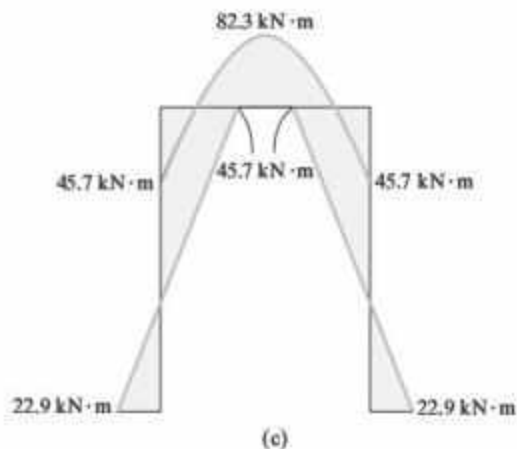
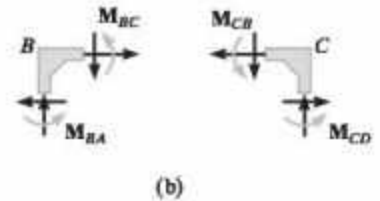
$$M_{BC} = -45.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CB} = 45.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CD} = -45.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{DC} = -22.9 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Con base en estos resultados pueden determinarse las reacciones en los extremos de cada elemento a partir de las ecuaciones de equilibrio y es posible dibujar el diagrama de momento para el marco, figura 11-16c.



EJEMPLO 11.6

Determine los momentos internos en cada junta de la estructura que se muestra en la figura 11-17a. El momento de inercia para cada elemento se da en la figura. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi.

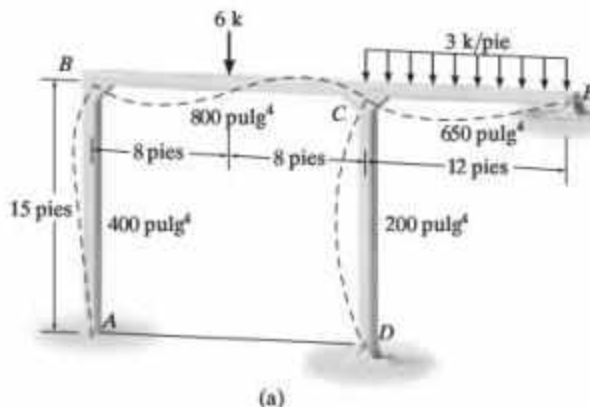


Figura 11-17

SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. En este problema deben considerarse cuatro claros. Se aplica la ecuación 11-8 a los claros AB y BC , y la ecuación 11-10 a CD y CE , porque los extremos en D y E están articulados.

Si se calculan las rigideces de los elementos, se tiene

$$k_{AB} = \frac{400}{15(12)^4} = 0.001286 \text{ pies}^3 \quad k_{CD} = \frac{200}{15(12)^4} = 0.000643 \text{ pies}^3$$

$$k_{BC} = \frac{800}{16(12)^4} = 0.002411 \text{ pies}^3 \quad k_{CE} = \frac{650}{12(12)^4} = 0.002612 \text{ pies}^3$$

Los FEM debidos a las cargas son

$$(FEM)_{BC} = -\frac{PL}{8} = -\frac{6(16)}{8} = -12 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{PL}{8} = \frac{6(16)}{8} = 12 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{CE} = -\frac{wL^2}{8} = -\frac{3(12)^2}{8} = -54 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Al aplicar las ecuaciones 11-8 y 11-10 a la estructura y tomar en cuenta que $\theta_A = 0$, $\psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = \psi_{CE} = 0$ dado que no se produce desplazamiento lateral, se tiene

$$M_N = 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = 2[29(10^3)(12)^2](0.001286)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 0$$

$$M_{AB} = 10740.7\theta_B \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2[29(10^3)(12)^2](0.001286)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 0$$

$$M_{BA} = 21\,481.5\theta_B \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2[29(10^3)(12)^2](0.002411)[2\theta_B + \theta_C - 3(0)] - 12$$

$$M_{BC} = 40\,277.8\theta_B + 20\,138.9\theta_C - 12 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2[29(10^3)(12)^2](0.002411)[2\theta_C + \theta_B - 3(0)] + 12$$

$$M_{CB} = 20\,138.9\theta_B + 40\,277.8\theta_C + 12 \quad (4)$$

$$M_N = 3Ek(\theta_N - \psi) + (FEM)_N$$

$$M_{CD} = 3[29(10^3)(12)^2](0.000643)[\theta_C - 0] + 0 \quad (5)$$

$$M_{CD} = 8055.6\theta_C$$

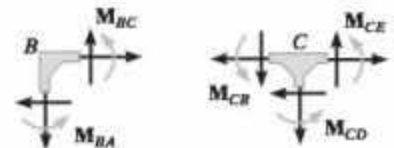
$$M_{CE} = 3[29(10^3)(12)^2](0.002612)[\theta_C - 0] - 54$$

$$M_{CE} = 32\,725.7\theta_C - 54 \quad (6)$$

Ecuaciones de equilibrio. Estas seis ecuaciones contienen ocho incógnitas. Es posible escribir dos ecuaciones de equilibrio de momentos para las juntas *B* y *C*, figura 11-17*b*. Se obtiene

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$

$$M_{CB} + M_{CD} + M_{CE} = 0 \quad (8)$$



(b)

A fin de encontrar la solución, se sustituyen las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7), y las ecuaciones (4)-(6) en la ecuación (8). De esto resulta

$$61\,759.3\theta_B + 20\,138.9\theta_C = 12$$

$$20\,138.9\theta_B + 81\,059.0\theta_C = 42$$

Al resolver estas ecuaciones simultáneamente se obtiene

$$\theta_B = 2.758(10^{-5}) \text{ rad} \quad \theta_C = 5.113(10^{-4}) \text{ rad}$$

Al tener un sentido horario, estos valores tienden a distorsionar la estructura como se muestra en la figura 11-17*a*. Si se sustituyen estos valores en las ecuaciones (1)-(6) y se resuelve, resulta

$$M_{AB} = 0.296 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BA} = 0.592 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BC} = -0.592 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CB} = 33.1 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CD} = 4.12 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CE} = -37.3 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

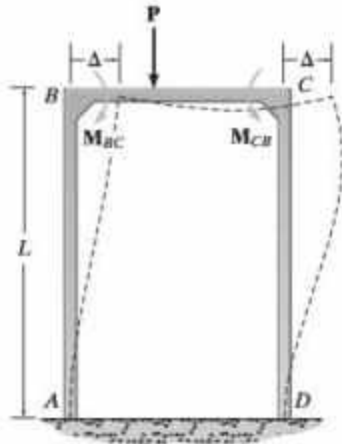


Figura 11-18

11.5 Análisis de marcos: Con ladeo

Un marco se ladea, o se desplaza lateralmente, cuando la carga que actúa sobre él no es simétrica. Para ilustrar este efecto, considere el marco de la figura 11-18. Aquí, la carga P provoca momentos *desiguales* M_{BC} y M_{CB} en las juntas B y C , respectivamente. M_{BC} tiende a desplazar la junta B hacia la derecha, mientras que M_{CB} tiende a desplazar la junta C hacia la izquierda. Puesto que M_{BC} es mayor que M_{CB} , el resultado neto es un desplazamiento lateral Δ de las dos juntas B y C hacia la derecha, como se muestra en la figura.* Por lo tanto, al aplicar la ecuación de pendiente-deflexión a cada columna de este marco debe considerarse la rotación de la columna ψ (puesto que $\psi = \Delta/L$) como incógnita en la ecuación. En consecuencia, debe incluirse una ecuación de equilibrio adicional para obtener la solución. En las secciones anteriores se demostró que los *desplazamientos angulares* desconocidos θ se relacionan mediante las *ecuaciones de equilibrio de momentos* en las juntas. De una manera similar, cuando se producen *desplazamientos lineales* desconocidos Δ en las juntas (o rotaciones ψ del claro), se requiere escribir las *ecuaciones de equilibrio de fuerzas* para obtener la solución completa. Sin embargo, las incógnitas en estas ecuaciones sólo deben incluir los *momentos* internos que actúan en los extremos de las columnas, puesto que las ecuaciones de pendiente-deflexión involucran a estos momentos. La técnica para resolver los problemas de marcos con desplazamiento lateral se ilustra de mejor manera mediante ejemplos.

EJEMPLO 11.7

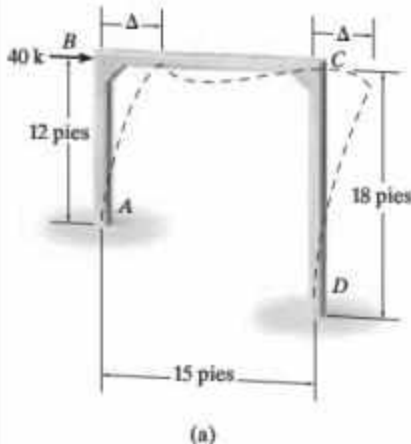


Figura 11-19

Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 11-19a. EI es constante.

SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. Como los extremos en A y D están fijos, se aplica la ecuación 11-8 a los tres claros de la estructura. Aquí se produce desplazamiento lateral porque ni la carga aplicada ni la geometría de la estructura son simétricas. En este caso, la carga se aplica directamente a la junta B y, por lo tanto, ningún FEM actúa en las juntas. Como se muestra en la figura 11-19a, se supone que ambas juntas B y C se desplazan una *cantidad igual* Δ . En consecuencia, $\psi_{AB} = \Delta/12$ y $\psi_{DC} = \Delta/18$. Ambos términos son positivos porque la cuerda de los elementos AB y CD “giran” en sentido horario. Si se relaciona ψ_{AB} con ψ_{DC} , se tiene $\psi_{AB} = (18/12)\psi_{DC}$. Al aplicar la ecuación 11-8 al marco, resulta

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)\left[2(0) + \theta_B - 3\left(\frac{18}{12}\psi_{DC}\right)\right] + 0 = EI(0.1667\theta_B - 0.75\psi_{DC}) \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)\left[2\theta_B + 0 - 3\left(\frac{18}{12}\psi_{DC}\right)\right] + 0 = EI(0.333\theta_B - 0.75\psi_{DC}) \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3(0)] + 0 = EI(0.267\theta_B + 0.133\theta_C) \quad (3)$$

*Recuerde que la deformación de los tres elementos debida a la fuerza cortante axial es insignificante.

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{15}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3(0)] + 0 = EI(0.267\theta_C + 0.133\theta_B) \quad (4)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{18}\right)[2\theta_C + 0 - 3\psi_{DC}] + 0 = EI(0.222\theta_C - 0.333\psi_{DC}) \quad (5)$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{18}\right)[2(0) + \theta_C - 3\psi_{DC}] + 0 = EI(0.111\theta_C - 0.333\psi_{DC}) \quad (6)$$

Ecuaciones de equilibrio. Las seis ecuaciones contienen nueve incógnitas. Es posible escribir dos ecuaciones de equilibrio de momentos para las juntas B y C , figura 11-19b, a saber,

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (8)$$

Como se presenta un desplazamiento horizontal Δ , se considerará la sumatoria de las fuerzas sobre *todo el marco* en la dirección x . De esto resulta

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 40 - V_A - V_D = 0$$

Las reacciones horizontales o fuerzas cortantes de columna V_A y V_D pueden relacionarse con los momentos internos al considerar el diagrama de cuerpo libre de cada columna por separado, figura 11-19c. Se tiene

$$\Sigma M_B = 0; \quad V_A = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{12}$$

$$\Sigma M_C = 0; \quad V_D = -\frac{M_{DC} + M_{CD}}{18}$$

Por lo tanto,

$$40 + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{12} + \frac{M_{DC} + M_{CD}}{18} = 0 \quad (9)$$

A fin de resolver, se sustituyen las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7), las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (8), y las ecuaciones (1), (2), (5) y (6) en la ecuación (9). De aquí se obtiene

$$0.6\theta_B + 0.133\theta_C - 0.75\psi_{DC} = 0$$

$$0.133\theta_B + 0.489\theta_C - 0.333\psi_{DC} = 0$$

$$0.5\theta_B + 0.222\theta_C - 1.944\psi_{DC} = -\frac{480}{EI}$$

Al resolver simultáneamente, se tiene

$$EI\theta_B = 438.81 \quad EI\theta_C = 136.18 \quad EI\psi_{DC} = 375.26$$

Por último, con base en estos resultados y resolviendo las ecuaciones (1)-(6) se obtiene

$$M_{AB} = -208 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

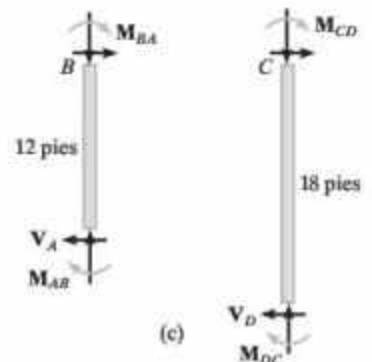
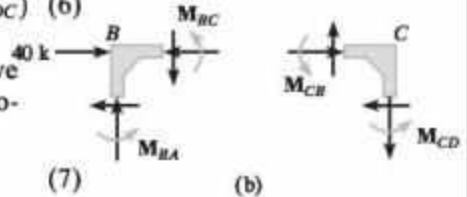
$$M_{BA} = -135 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BC} = 135 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CB} = 94.8 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CD} = -94.8 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

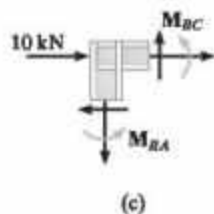
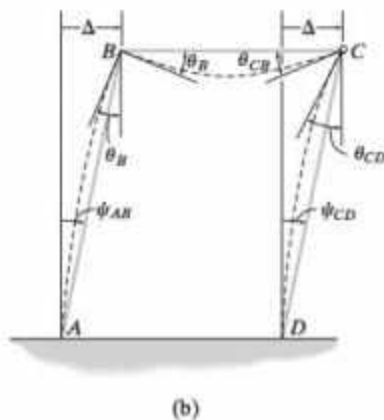
$$M_{DC} = -110 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$



EJEMPLO 11.8



Figura 11-20



Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 11-20a. Los soportes en A y D están fijos y se supone que la junta C está articulada. EI es constante para cada elemento.

SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. Se aplicará la ecuación 11-8 al elemento AB puesto que está conectado fijamente en ambos extremos. La ecuación 11-10 puede aplicarse de B a C y de D a C porque el pasador en C soporta un momento cero. Como se muestra en el diagrama de deflexión, figura 11-20b, hay un desplazamiento lineal desconocido de la estructura y un desplazamiento angular desconocido θ_B en la junta B.* Debido a Δ , los elementos de la cuerda AB y CD giran en sentido horario, $\psi = \psi_{AB} = \psi_{DC} = \Delta/4$. Si se toma en cuenta que $\theta_A = \theta_D = 0$, y que no hay FEM para los elementos, se tiene

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{4}\right)[2(0) + \theta_B - 3\psi] + 0 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{4}\right)(2\theta_B + 0 - 3\psi) + 0 \quad (2)$$

$$M_N = 3E\left(\frac{I}{L}\right)(\theta_N - \psi) + (FEM)_N$$

$$M_{BC} = 3E\left(\frac{I}{3}\right)(\theta_B - 0) + 0 \quad (3)$$

$$M_{DC} = 3E\left(\frac{I}{4}\right)(0 - \psi) + 0 \quad (4)$$

Ecuaciones de equilibrio. El equilibrio de momentos en la junta B, figura 11-20c, requiere que

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (5)$$

Si las fuerzas se suman para *todo el marco* en la dirección horizontal, resulta

$$\sum F_x = 0; \quad 10 - V_A - V_D = 0 \quad (6)$$

Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de cada columna, figura 11-20d, se tiene

$$\sum M_B = 0; \quad V_A = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{4}$$

$$\sum M_C = 0; \quad V_D = -\frac{M_{DC}}{4}$$

*Los desplazamientos angulares θ_{CB} y θ_{CD} en la junta C (articulada) no están incluidos en el análisis debido a que se debe usar la ecuación 11-10.

Entonces, a partir de la ecuación (6),

$$10 + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{4} + \frac{M_{DC}}{4} = 0 \quad (7)$$

Al sustituir las ecuaciones de pendiente-deflexión en las ecuaciones (5) y (7) y al simplificar se obtiene

$$\theta_B = \frac{3}{4}\psi$$

$$10 + \frac{EI}{4} \left(\frac{3}{2}\theta_B - \frac{15}{4}\psi \right) = 0$$

Por lo tanto,

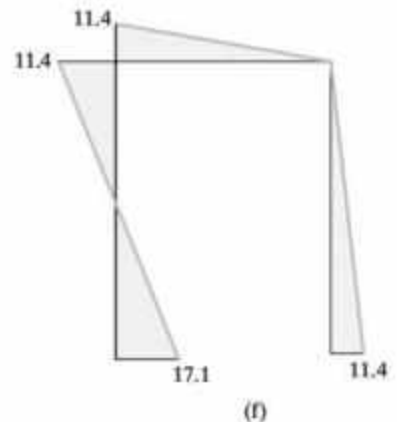
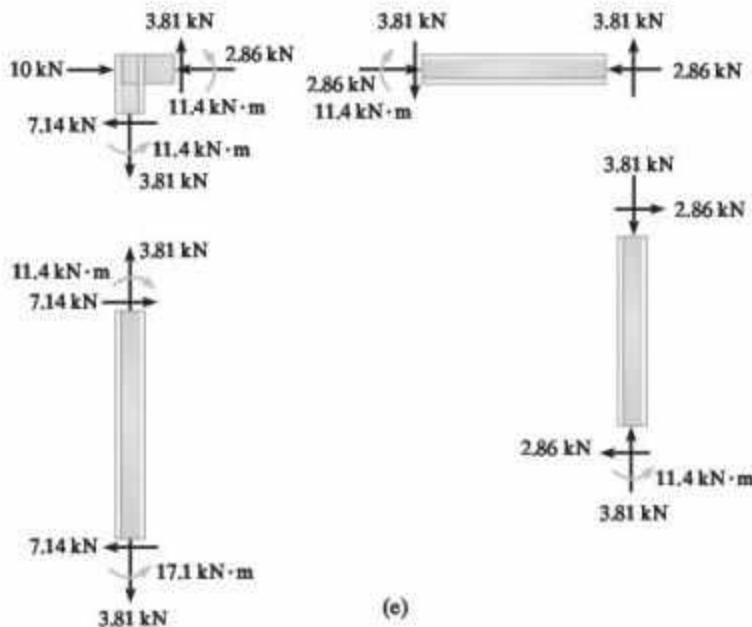
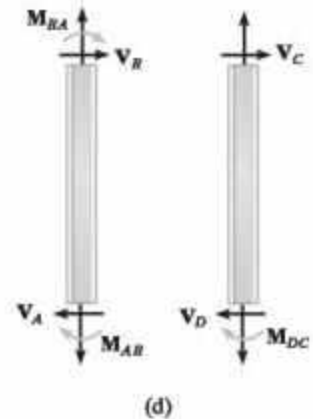
$$\theta_B = \frac{240}{21EI} \quad \psi = \frac{320}{21EI}$$

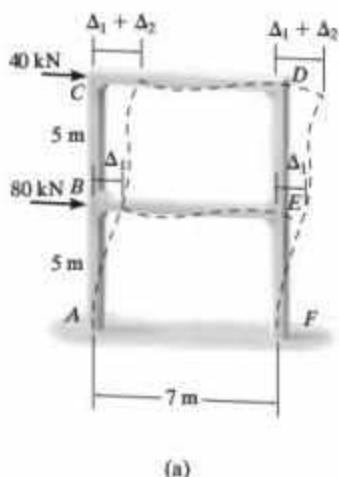
Si se sustituyen estos valores en las ecuaciones (1)-(4), se tiene

$$M_{AB} = -17.1 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_{BA} = -11.4 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BC} = 11.4 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_{DC} = -11.4 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Con base en estos resultados, es posible determinar las reacciones en los extremos de cada elemento a partir de las ecuaciones de equilibrio, figura 11-20e. El diagrama de momentos para el marco se muestra en la figura 11-20f.



EJEMPLO 11.9**Figura 11-21**

Explique cómo se determinan los momentos en cada junta de la estructura de dos niveles que se muestra en la figura 11-21a. EI es constante.

SOLUCIÓN

Ecuación de pendiente-deflexión. Como los soportes en A y F están fijos, la ecuación 11-8 se aplica para los seis claros de la estructura. No es necesario calcular ningún FEM porque la carga aplicada actúa en las juntas. Aquí, la carga desplaza a las juntas B y E una cantidad Δ_1 , y a C y D una cantidad $\Delta_1 + \Delta_2$. El resultado es que los elementos AB y FE experimentan rotaciones de $\psi_1 = \Delta_1/5$, y BC y ED se someten a rotaciones de $\psi_2 = \Delta_2/5$.

Al aplicar la ecuación 11-8 al marco se obtiene

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2(0) + \theta_B - 3\psi_1] + 0 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_B + 0 - 3\psi_1] + 0 \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3\psi_2] + 0 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3\psi_2] + 0 \quad (4)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{7}\right)[2\theta_C + \theta_D - 3(0)] + 0 \quad (5)$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{7}\right)[2\theta_D + \theta_C - 3(0)] + 0 \quad (6)$$

$$M_{BE} = 2E\left(\frac{I}{7}\right)[2\theta_B + \theta_E - 3(0)] + 0 \quad (7)$$

$$M_{EB} = 2E\left(\frac{I}{7}\right)[2\theta_E + \theta_B - 3(0)] + 0 \quad (8)$$

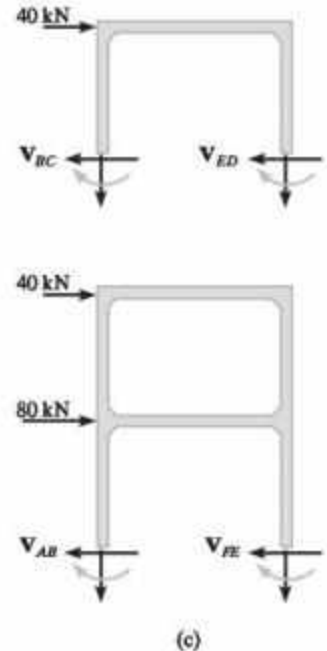
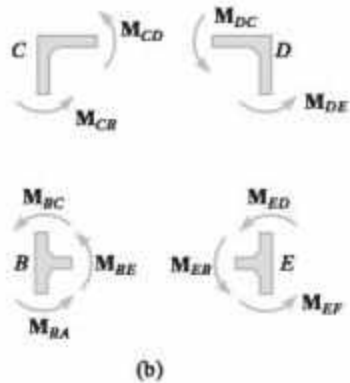
$$M_{ED} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_E + \theta_D - 3\psi_2] + 0 \quad (9)$$

$$M_{DE} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_D + \theta_E - 3\psi_2] + 0 \quad (10)$$

$$M_{FE} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2(0) + \theta_E - 3\psi_1] + 0 \quad (11)$$

$$M_{EF} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_E + 0 - 3\psi_1] + 0 \quad (12)$$

Estas 12 ecuaciones contienen 18 incógnitas.



Ecuaciones de equilibrio. El equilibrio de momentos en las juntas B , C , D y E , figura 11-21b, requiere que

$$M_{BA} + M_{BE} + M_{BC} = 0 \quad (13)$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (14)$$

$$M_{DC} + M_{DE} = 0 \quad (15)$$

$$M_{EF} + M_{EB} + M_{ED} = 0 \quad (16)$$

Como en los ejemplos anteriores, la fuerza cortante en la base de todas las columnas de cualquier nivel debe equilibrar las cargas horizontales aplicadas, figura 11-21c. De aquí resulta

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 40 - V_{BC} - V_{ED} = 0$$

$$40 + \frac{M_{BC} + M_{CB}}{5} + \frac{M_{ED} + M_{DE}}{5} = 0 \quad (17)$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 40 + 80 - V_{AB} - V_{FE} = 0$$

$$120 + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{5} + \frac{M_{EF} + M_{FE}}{5} = 0 \quad (18)$$

La solución requiere sustituir las ecuaciones (1)-(12) en las ecuaciones (13)-(18), de donde resultan seis ecuaciones con seis incógnitas, ψ_1 , ψ_2 , θ_B , θ_C , θ_D y θ_E . Estas ecuaciones pueden resolverse de manera simultánea. Los resultados se sustituyen de nuevo en las ecuaciones (1)-(12), de donde se obtienen los momentos en las juntas.

EJEMPLO 11.10

Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 11-22a. EI es constante para cada elemento.

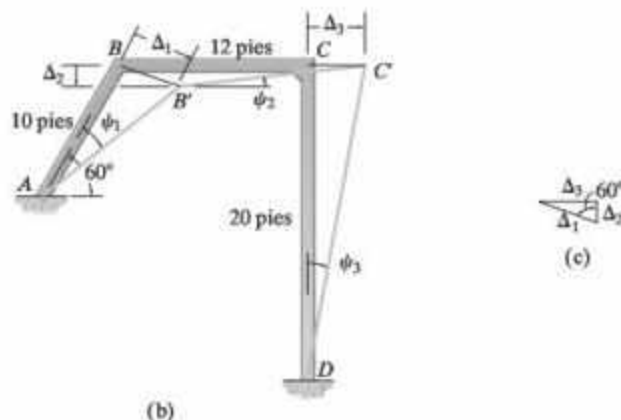
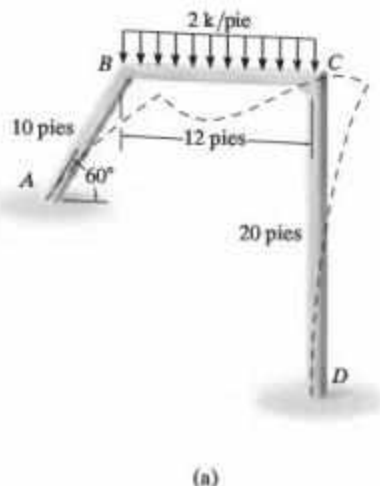


Figura 11-22

SOLUCIÓN

Ecuaciones de pendiente-deflexión. La ecuación 11-8 se aplica a cada uno de los tres claros. Los FEM son

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{2(12)^2}{12} = -24 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2(12)^2}{12} = 24 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

El elemento inclinado AB ocasiona que el marco se ladee hacia la derecha, según se muestra en la figura 11-22a. Como resultado, las juntas B y C experimentan desplazamientos, tanto de rotación como lineales. Los desplazamientos lineales se muestran en la figura 11-22b, donde B se mueve Δ_1 hacia B' y C se mueve Δ_3 hacia C' . Estos desplazamientos hacen que las cuerdas de los elementos giren ψ_1 , ψ_3 (sentido horario) y $-\psi_2$ (sentido antihorario), como se muestra en la figura.* Por lo tanto,

$$\psi_1 = \frac{\Delta_1}{10} \quad \psi_2 = -\frac{\Delta_2}{12} \quad \psi_3 = \frac{\Delta_3}{20}$$

Como se muestra en la figura 11-22c, los tres desplazamientos pueden relacionarse. Por ejemplo, $\Delta_2 = 0.5\Delta_1$ y $\Delta_3 = 0.866\Delta_1$. Por lo tanto, a partir de las ecuaciones anteriores se tiene

$$\psi_2 = -0.417\psi_1 \quad \psi_3 = 0.433\psi_1$$

Con base en estos resultados, las ecuaciones de pendiente-deflexión de la estructura son

*Recuerde que las distorsiones debidas a las fuerzas axiales se pasan por alto y que los desplazamientos arqueados BB' y CC' pueden considerarse como líneas rectas, puesto que ψ_1 y ψ_3 son en realidad muy pequeños.

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{10}\right)[2(0) + \theta_B - 3\psi_1] + 0 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{10}\right)[2\theta_B + 0 - 3\psi_1] + 0 \quad (2)$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3(-0.417\psi_1)] - 24 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3(-0.417\psi_1)] + 24 \quad (4)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{20}\right)[2\theta_C + 0 - 3(0.433\psi_1)] + 0 \quad (5)$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{20}\right)[2(0) + \theta_C - 3(0.433\psi_1)] + 0 \quad (6)$$

Estas seis ecuaciones contienen nueve incógnitas.

Ecuaciones de equilibrio. Del equilibrio de momentos en las juntas B y C se obtiene

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$

$$M_{CD} + M_{CB} = 0 \quad (8)$$

La tercera ecuación de equilibrio necesaria puede obtenerse al sumar momentos respecto al punto O sobre todo el marco, figura 11-22d. Esto elimina las fuerzas desconocidas normales N_A y N_D y, por lo tanto

$$\uparrow + \Sigma M_O = 0;$$

$$M_{AB} + M_{DC} - \left(\frac{M_{AB} + M_{BA}}{10}\right)(34) - \left(\frac{M_{DC} + M_{CD}}{20}\right)(40.78) - 24(6) = 0$$

$$-2.4M_{AB} - 3.4M_{BA} - 2.04M_{CD} - 1.04M_{DC} - 144 = 0 \quad (9)$$

Al sustituir las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (7), las ecuaciones (4) y (5) en la ecuación (8), y las ecuaciones (1), (2), (5) y (6) en la ecuación (9) resulta

$$\begin{aligned} 0.733\theta_B + 0.167\theta_C - 0.392\psi_1 &= \frac{24}{EI} \\ 0.167\theta_B + 0.533\theta_C + 0.0784\psi_1 &= -\frac{24}{EI} \\ -1.840\theta_B - 0.512\theta_C + 3.880\psi_1 &= \frac{144}{EI} \end{aligned}$$

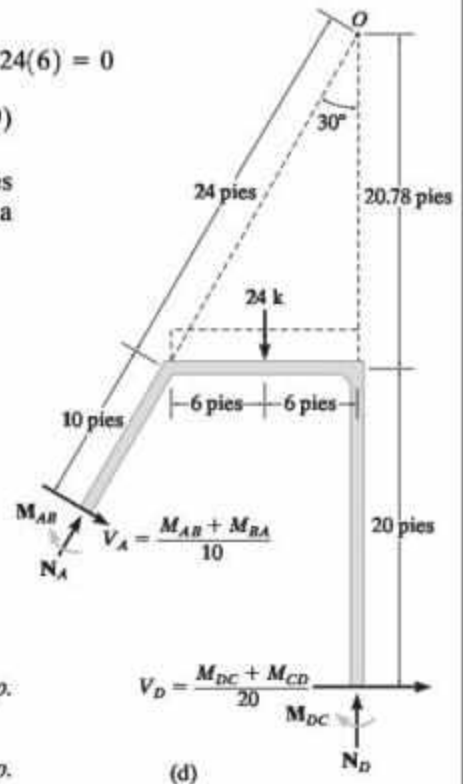
Al resolver estas ecuaciones simultáneamente se obtiene

$$EI\theta_B = 87.67 \quad EI\theta_C = -82.3 \quad EI\psi_1 = 67.83$$

Si se sustituyen estos valores en las ecuaciones (1)-(6), se tiene

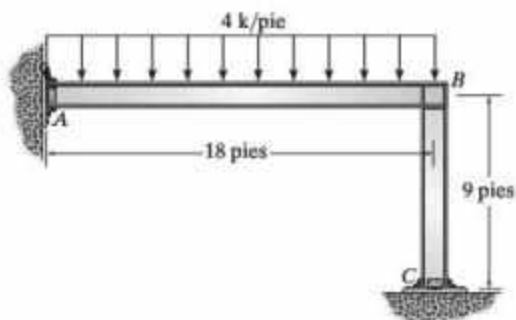
$$M_{AB} = -23.2 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad M_{BC} = 5.63 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad M_{CD} = -25.3 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BA} = -5.63 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad M_{CB} = 25.3 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad M_{DC} = -17.0 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$



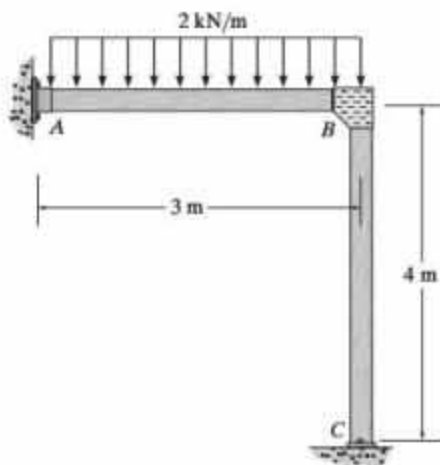
PROBLEMAS

11-13. Determine los momentos en A , B y C , y después dibuje el diagrama de momento para cada elemento. Suponga que todas las juntas están conectadas fijamente. EI es constante.



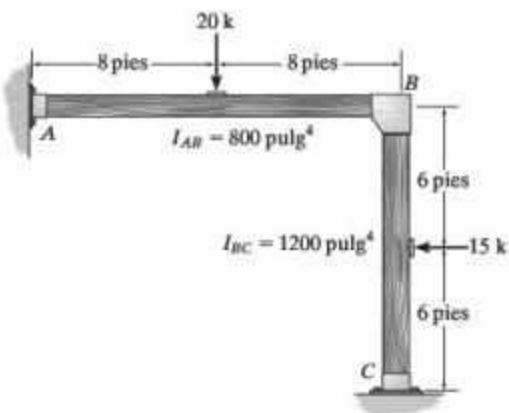
Prob. 11-13

11-15. Determine el momento en B , y después dibuje el diagrama de momento para cada elemento del marco. Suponga que el soporte en A está fijo y que C está articulado. EI es constante.



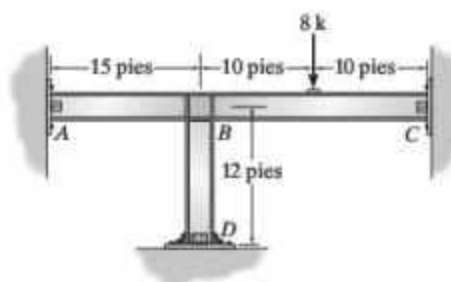
Prob. 11-15

11-14. Determine los momentos en los soportes, y después dibuje el diagrama de momento. Los elementos están conectados fijamente en los soportes y en la junta B . El momento de inercia de cada elemento se proporciona en la figura. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi.



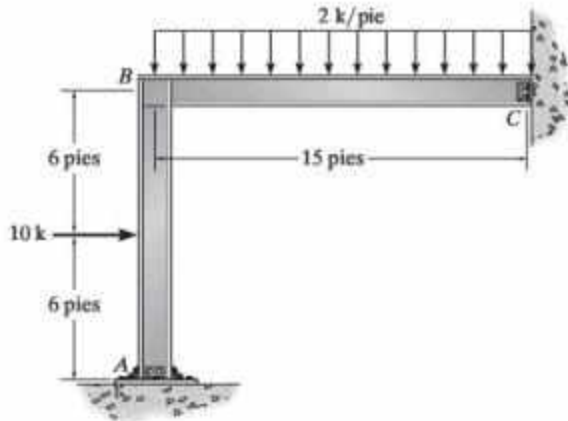
Prob. 11-14

***11-16.** Determine los momentos en B y D , y después dibuje el diagrama de momentos. Suponga que A y C están articulados y que B y D están conectados fijamente. EI es constante.



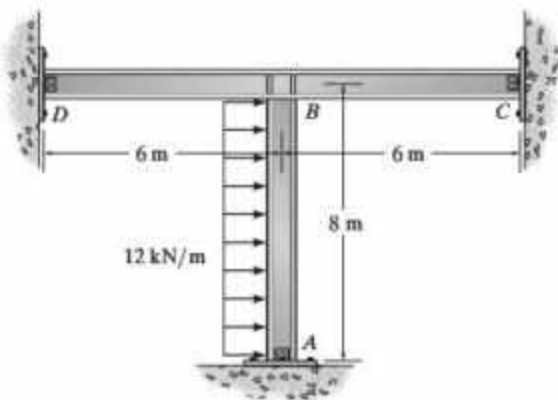
Prob. 11-16

11-17. Determine el momento que ejerce cada elemento sobre la junta en B , y después dibuje el diagrama de momento para cada elemento del marco. Suponga que el soporte en A es fijo y en C está articulado. EI es constante.



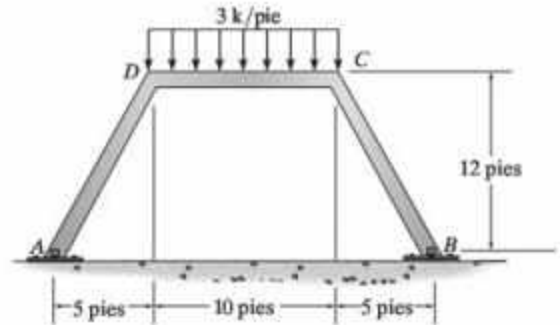
Prob. 11-17

11-18. Determine el momento que ejerce cada elemento sobre la junta en B , y después dibuje el diagrama de momento para cada elemento del marco. Suponga que los soportes en A , C y D están articulados. EI es constante.



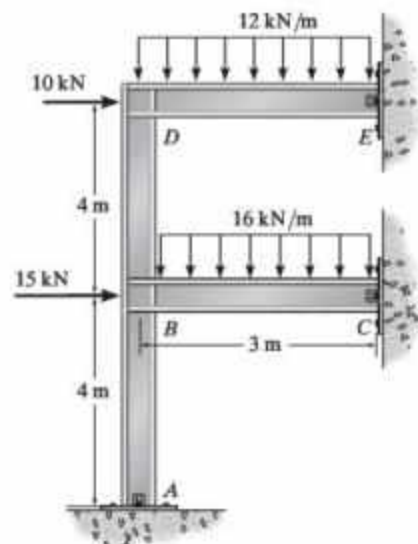
Prob. 11-18

11-19. Determine el momento en las juntas D y C , y después dibuje el diagrama de momento para cada elemento del marco. Suponga que los soportes en A y B están articulados. EI es constante.



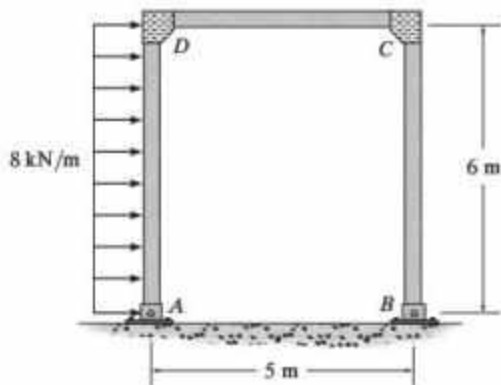
Prob. 11-19

***11-20.** Determine el momento que ejerce cada elemento sobre las juntas en B y D , y después dibuje el diagrama de momento para cada elemento del marco. Suponga que los soportes en A , C y E están articulados. EI es constante.



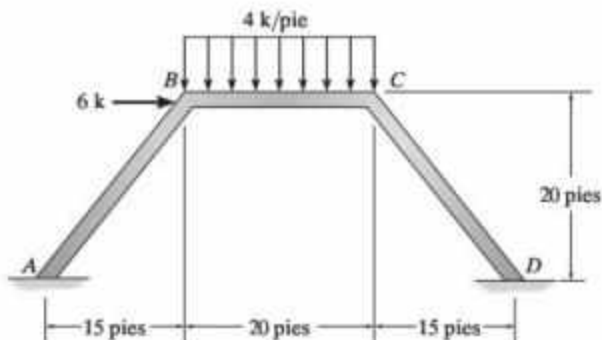
Prob. 11-20

11-21. Determine el momento en las juntas C y D , y después dibuje el diagrama de momento para cada elemento del marco. Suponga que los soportes en A y B están articulados. EI es constante.



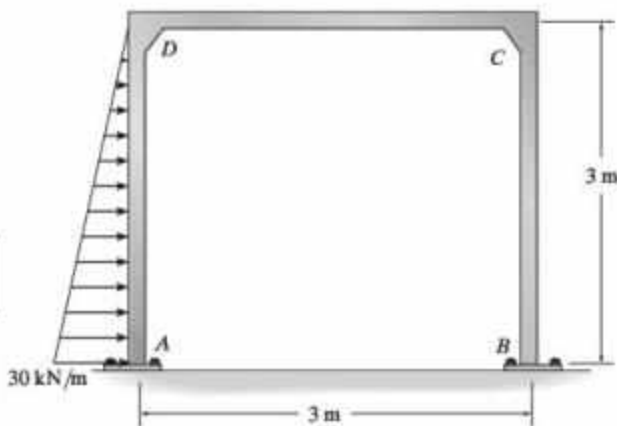
Prob. 11-21

11-23. Determine los momentos que actúan en los soportes A y D del marco de columnas inclinadas. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 600$ pulg⁴.



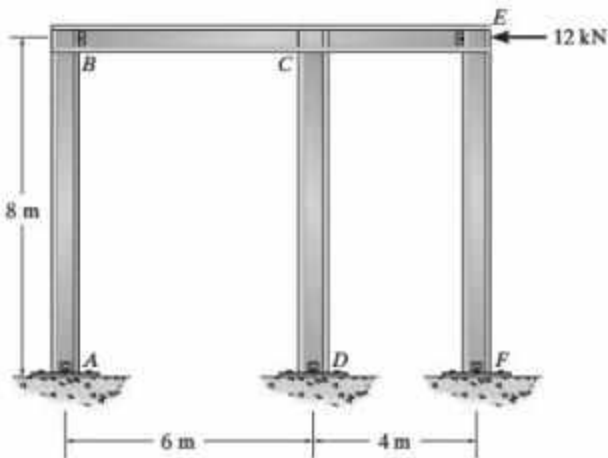
Prob. 11-23

11-22. Determine el momento en las juntas A , B , C y D , y después dibuje el diagrama de momento para cada elemento del marco. Suponga que los soportes en A y B están fijos. EI es constante.



Prob. 11-22

***11-24.** Las cargas del viento se transmiten al marco en la junta E . Si A , B , E , D y F están articuladas y C está conectada fijamente, determine los momentos en la junta C y dibuje los diagramas de momento flexionante para la trabe BCE . EI es constante.

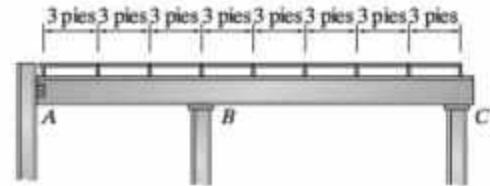


Prob. 11-24

PROBLEMA DE PROYECTO

11-1P. El techo se sostiene mediante largueros que se apoyan en dos traveses. Cada larguero puede considerarse simplemente apoyado, y la trabe frontal puede considerarse unida a las tres columnas mediante un pasador en *A* y rodillos en *B* y *C*. Suponga que el techo se hará de concreto de cemento con 3 pulgadas de espesor y que cada larguero

tiene un peso de 550 lb. De acuerdo con el código, el techo estará sometido a una carga de nieve de 25 lb por pie cuadrado. Los largueros tienen una longitud de 25 pies. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la trabe. Suponga que las columnas de soporte son rígidas.



Problema de proyecto 11-1P

REPASO DEL CAPÍTULO

A los desplazamientos desconocidos de una estructura se les conoce como los grados de libertad para la estructura. Consisten en desplazamientos o rotaciones de juntas.

Las ecuaciones de pendiente-deflexión relacionan los momentos desconocidos en cada junta de un elemento estructural con las rotaciones desconocidas que se producen ahí. La siguiente ecuación se aplica dos veces a cada elemento o claro, considerando a cada lado como el extremo "cercano" y a su contraparte como el extremo lejano.

$$M_N = 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

Para el claro interno o el claro final con el extremo lejano fijo

Esta ecuación se aplica sólo una vez, donde el extremo "lejano" está en el soporte de pasador o de rodillo.

$$M_N = 3Ek(\theta_N - \psi) + (FEM)_N$$

Sólo para el claro final con el extremo lejano articulado o soportado por rodillos

Una vez que se escriben las ecuaciones de pendiente-deflexión, se sustituyen en las ecuaciones de equilibrio de momentos en cada junta y después se resuelve para encontrar los desplazamientos desconocidos. Si la estructura (marco) tiene un desplazamiento lateral, entonces ocurrirá un desplazamiento horizontal desconocido en cada nivel de piso, y las fuerzas cortantes de columna desconocidas deben relacionarse con los momentos en las juntas, empleando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momentos. Una vez obtenidos los desplazamientos desconocidos, las reacciones desconocidas se encuentran a partir de las relaciones de carga-desplazamiento.



Todas las trabes en este edificio de concreto están fijamente conectadas, por lo que el análisis estáticamente indeterminado de la estructura puede hacerse utilizando el método de la distribución de momentos.

Método de análisis del desplazamiento: distribución de momentos

El método de distribución de momentos es un método de análisis del desplazamiento que es fácil de aplicar una vez determinadas ciertas constantes elásticas. En este capítulo se establecerán en primer lugar las definiciones y conceptos más importantes para la distribución de momentos, y después se aplicará el método para resolver problemas de vigas y marcos estáticamente indeterminados. En la última parte del capítulo se estudia la aplicación del método en marcos con varios niveles.

12.1 Principios generales y definiciones

El método para analizar vigas y marcos mediante la distribución de momentos fue desarrollado por Hardy Cross en 1930. Cuando este método se publicó por primera vez atrajo la atención de inmediato, y ha sido reconocido como uno de los avances más notables en el análisis estructural durante el siglo xx.

Como se explicará en detalle más adelante, la distribución de momentos es un método de aproximaciones sucesivas que pueden realizarse con cualquier grado de precisión deseado. En esencia, el método comienza al suponer que cada junta de una estructura está fija. Después, al liberar y bloquear cada junta de manera sucesiva, los momentos internos en las juntas se “distribuyen” y equilibran hasta que las juntas giran hacia sus posiciones finales o casi finales. Se encontró que este proceso de cálculo es a la vez repetitivo y fácil de aplicar. Sin embargo, antes de explicar las técnicas para la distribución de momentos, deben presentarse algunas definiciones y conceptos.

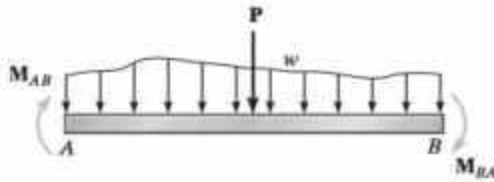


Figura 12-1

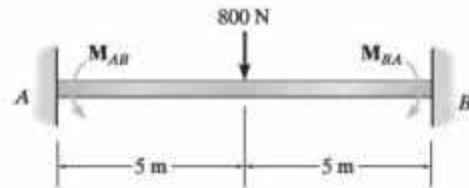


Figura 12-2

Convención de signos. Se establecerá la misma convención de signos que para las ecuaciones de pendiente-deflexión: Los *momentos* que actúan sobre el elemento *con sentido horario* se consideran *positivos*, y los *momentos con sentido antihorario* serán *negativos*, figura 12-1.

Momentos en extremos fijos (FEM). Los momentos en las “paredes” o en las juntas fijas de un elemento cargado se denominan *momentos en extremos fijos*. Estos momentos pueden determinarse con base en la tabla que se encuentra en el interior de la contraportada, dependiendo del tipo de carga sobre el elemento. Por ejemplo, la viga cargada como se muestra en la figura 12-2 tiene momentos en los extremos fijos de $FEM = PL/8 = 800(10)/8 = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$. Si se toma en cuenta la acción de estos momentos *sobre la viga* y se aplica la convención de signos adoptada, se ve que $M_{AB} = -1000 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $M_{BA} = +1000 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Factor de rigidez del elemento. Considere la viga de la figura 12-3, que está articulada en un extremo y fija en el otro. La aplicación del momento M hace que el extremo A gire a través de un ángulo θ_A . En el capítulo 11 se relacionó M con θ_A usando el método de la viga conjugada. De esto resultó la ecuación 11-1, es decir, $M = (4EI/L)\theta_A$. El término entre paréntesis

$$K = \frac{4EI}{L} \quad \text{Extremo lejano fijo} \quad (12-1)$$

se conoce como el *factor de rigidez* en A y puede definirse como la cantidad de momento M necesaria para hacer girar el extremo A de la viga en $\theta_A = 1 \text{ rad}$.



Figura 12-3

Factor de rigidez en la junta. Si varios elementos están conectados fijamente a una junta y cada uno de sus extremos lejanos está fijo, entonces por el principio de superposición, el *factor de rigidez total* en la junta es la suma de los factores de rigidez de los elementos unidos a la junta, es decir, $K_T = \Sigma K$. Por ejemplo, considere la junta A de un marco que se muestra en la figura 12-4a. El valor numérico del factor de rigidez de cada elemento se determina a partir de la ecuación 12-1 y se presenta en la figura. Con estos valores, el factor de rigidez total de la junta A es $K_T = \Sigma K = 4000 + 5000 + 1000 = 10\,000$. Este valor representa la cantidad de momento necesario para girar la junta a través de un ángulo de 1 rad.

Factor de distribución (DF). Si se aplica un momento M a una junta conectada fijamente, cada elemento conectado proporcionará una parte del momento de resistencia necesario para satisfacer el equilibrio de momentos en la junta. Esa fracción del momento de resistencia total suministrada por el elemento se llama *factor de distribución (DF)*. Para obtener su valor, imagine que la junta está fijamente conectada a n elementos. Si un momento M aplicado hace que la junta gire una cantidad θ , entonces cada elemento i gira esta misma cantidad. Si el factor de rigidez del i -ésimo elemento es K_i , entonces el momento aportado por el elemento es $M_i = K_i\theta$. Dado que el equilibrio requiere que $M = M_1 + M_n = K_1\theta + K_n\theta = \theta\Sigma K_i$, entonces el factor de distribución para el i -ésimo elemento es

$$DF_i = \frac{M_i}{M} = \frac{K_i\theta}{\theta\Sigma K_i}$$

Al cancelar el término común θ , se ve que el factor de distribución de un elemento es igual al factor de rigidez del elemento dividido entre el factor de rigidez total de la junta; es decir, en general,

$$DF = \frac{K}{\Sigma K} \quad (12-2)$$

Por ejemplo, los factores de distribución para los elementos AB, AC y AD en la junta A de la figura 12-4a son

$$DF_{AB} = 4000/10\,000 = 0.4$$

$$DF_{AC} = 5000/10\,000 = 0.5$$

$$DF_{AD} = 1000/10\,000 = 0.1$$

Como resultado, si $M = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}$ actúa en la junta A, figura 12-4b, los momentos de equilibrio ejercidos por los elementos sobre la junta, figura 12-4c, son

$$M_{AB} = 0.4(2000) = 800 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{AC} = 0.5(2000) = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{AD} = 0.1(2000) = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

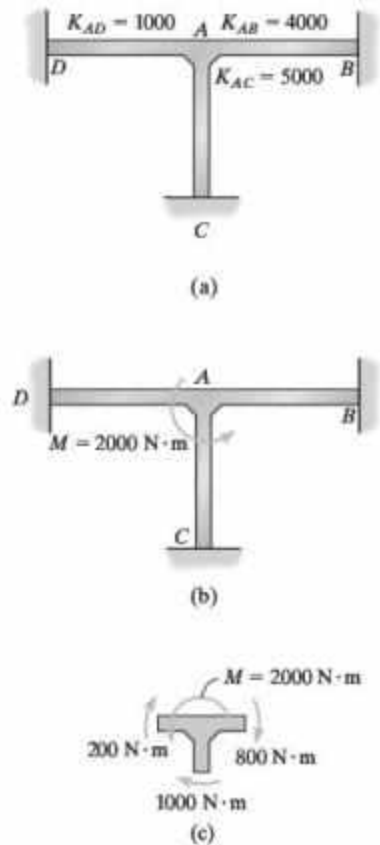


Figura 12-4



Las cargas estáticamente indeterminadas en las traveses del puente, las cuales son continuas sobre sus pilotes, pueden determinarse usando el método de la distribución de momentos.

Factor de rigidez relativa del elemento. Con bastante frecuencia una viga o un marco continuos se harán del mismo material, por lo que su módulo de elasticidad E será *igual* para todos los elementos. Si es así, el factor común $4E$ en la ecuación 12-1 se *cancelará* del numerador y del denominador de la ecuación 12-2, al determinar el factor de distribución para una junta. Por lo tanto, resulta *más fácil* sólo determinar el *factor de rigidez relativa* del elemento

$$K_R = \frac{I}{L} \quad (12-3)$$

Extremo lejano fijo

y usar esto para los cálculos del DF.

Factor de traslado. Considere de nuevo la viga de la figura 12-3. En el capítulo 11 se demostró que $M_{AB} = (4EI/L)\theta_A$ (ecuación 11-1) y $M_{BA} = (2EI/L)\theta_A$ (ecuación 11-2). Si se resuelve para θ_A y se igualan estas ecuaciones resulta $M_{BA} = M_{AB}/2$. En otras palabras, el momento M en el pasador induce un momento de $M' = \frac{1}{2}M$ en la pared. El factor de traslado representa la fracción de M que es “trasladada” del pasador a la pared. Por lo tanto, en el caso de una viga *el extremo lejano fijo*, el factor de traslado es $+\frac{1}{2}$. El signo más indica que ambos momentos actúan en la misma dirección.

12.2 Distribución de momentos para vigas

La distribución de momentos se basa en el principio del sucesivo bloqueo y liberación de las juntas de una estructura a fin de permitir que los momentos en juntas se distribuyan y equilibren. La mejor manera de explicar el método es por medio de ejemplos.

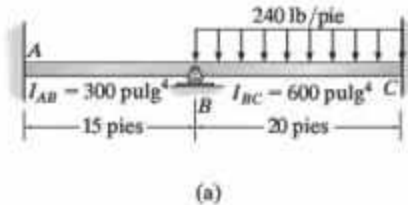


Figura 12-5

Considere una viga que tiene un módulo de elasticidad E constante y las dimensiones y la carga que se muestran en la figura 12-5a. Antes de comenzar, lo primero es determinar los factores de distribución en los dos extremos de cada claro. Con base en la ecuación 12-1, $K = 4EI/L$, los factores de rigidez a ambos lados de B son

$$K_{BA} = \frac{4E(300)}{15} = 4E(20) \text{ pulg}^4/\text{pie} \quad K_{BC} = \frac{4E(600)}{20} = 4E(30) \text{ pulg}^4/\text{pie}$$

Por lo tanto, si se usa la ecuación 12-2, $DF = K/\Sigma K$, para los extremos conectados a la junta B , se tiene

$$DF_{BA} = \frac{4E(20)}{4E(20) + 4E(30)} = 0.4$$

$$DF_{BC} = \frac{4E(30)}{4E(20) + 4E(30)} = 0.6$$

En las paredes, juntas A y C , el factor de distribución depende del factor de rigidez del elemento y del "factor de rigidez" de la pared. Como en teoría se necesitaría un momento de tamaño "infinito" para hacer que la pared girara un radián, el factor de rigidez de la pared es infinito. Por tanto, para las juntas A y C se tiene

$$DF_{AB} = \frac{4E(20)}{\infty + 4E(20)} = 0$$

$$DF_{CB} = \frac{4E(30)}{\infty + 4E(30)} = 0$$

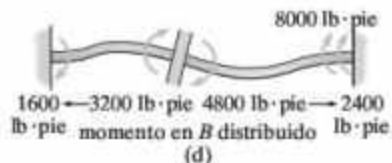
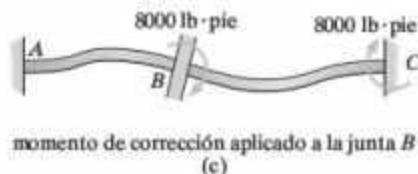
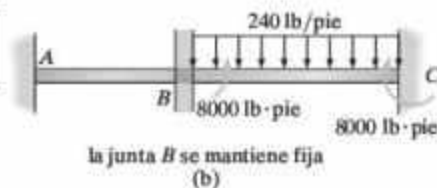
Observe que los resultados anteriores también podrían haberse obtenido si en los cálculos se hubiera usado el factor de rigidez relativa $K_R = I/L$ (ecuación 12-3). Además, siempre que se use un conjunto consistente de unidades para el factor de rigidez, el DF no tendrá unidades, y en una junta, excepto cuando se encuentre en una pared fija, la suma de los DF será siempre igual a 1.

Después de haber calculado los DF , ahora se determinarán los FEM. Sólo el claro BC está cargado y, con base en la tabla ubicada en la parte interior de la contraportada, para una carga uniforme se tiene

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{240(20)^2}{12} = -8000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{240(20)^2}{12} = 8000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

12



Junta	A	B		C
Elemento	AB	BA	BC	CB
DF	0	0.4	0.6	0
FEM			-8000	8000
Dist, TR	1600	-3200	4800	-2400
ΣM	1600	3200	-3200	10 400

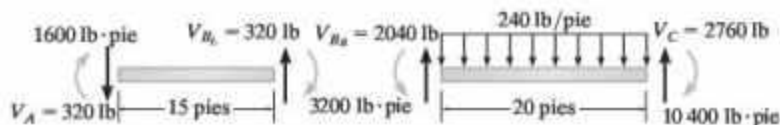
(e)

Se empieza por suponer que la junta B está fija o bloqueada. Entonces el momento de extremo fijo en B contiene el claro BC en esta posición fija o bloqueada, como se muestra en la figura 12-5b. Por supuesto, esto no representa la situación de equilibrio real en B , puesto que los momentos en *cada lado* de esta junta deben ser iguales pero opuestos. Para corregir lo anterior se aplicará un momento igual pero opuesto de $8000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ a la junta y se permitirá que la junta gire libremente, figura 12-5c. Como resultado, las porciones de este momento se distribuyen en los claros BC y BA , de acuerdo con los DF (o la rigidez) de estos claros en la junta. En específico, el momento en BA es de $0.4(8000) = 3200 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ y el momento en BC es de $0.6(8000) = 4800 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. Por último, debido a la rotación libre que ocurre en B , estos momentos deben “trasladarse” puesto que los momentos se desarrollan en los extremos del claro. Si se usa un factor de traslado de $+\frac{1}{2}$, los resultados son como se muestra en la figura 12-5d.

Este ejemplo indica los pasos básicos necesarios en la distribución de momentos en una junta: Determinar el momento no equilibrado que actúa inicialmente en la junta “bloqueada”, desbloquear la junta y aplicar un momento desequilibrado igual pero opuesto para corregir el equilibrio, distribuir el momento entre los claros conectados, y trasladar el momento en cada claro hasta su otro extremo. Por lo general, los pasos se presentan en forma de tabla, como se indica en la figura 12-5e. Aquí la notación Dist, TR indica una fila donde los momentos se distribuyen y después se trasladan. En este caso particular sólo es necesario *un ciclo* de distribución de momentos, puesto que los soportes de pared en A y C “absorben” los momentos y no debe equilibrarse o desbloquearse ninguna junta adicional para satisfacer el equilibrio de la junta. Una vez distribuidos de esta manera, los momentos en cada junta se suman, obteniendo los resultados finales que se muestran en la fila inferior de la tabla de la figura 12-5e. Observe que ahora la junta B se encuentra en equilibrio. Como M_{BC} es negativo, este momento se aplica al claro BC en un sentido antihorario, como se muestra en los diagramas de cuerpo libre de los claros de la viga en la figura 12-5f. Al conocer los momentos en los extremos, se calculan las fuerzas cortantes en los extremos a partir de las ecuaciones de equilibrio aplicadas a cada uno de estos claros.

Considere ahora la misma viga, excepto que el soporte en C es un oscilador, figura 12-6a. En este caso, sólo *un elemento* está en la junta C , por lo que el factor de distribución para los elementos de CB en la junta C es

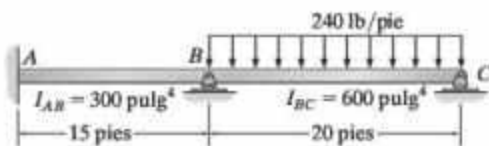
$$DF_{CB} = \frac{4E(30)}{4E(30)} = 1$$



(f)

Figura 12-5

Los otros factores de distribución y los FEM son iguales a los calculados con anterioridad. Se enuncian en las filas 1 y 2 de la tabla en la figura 12-6b. En un inicio se supondrá que las juntas *B* y *C* están bloqueadas. Se comienza por liberar la junta *C* y colocar un momento equilibrante de $-8000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ en la junta. Todo el momento se distribuye en el elemento *CB* puesto que $(1)(-8000) \text{ lb} \cdot \text{pie} = -8000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. La flecha en la fila 3 indica que $\frac{1}{2}(-8000) \text{ lb} \cdot \text{pie} = -4000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ se traslada a la junta *B* puesto que la junta *C* ahora puede girar libremente. La junta *C* se *bloquea de nuevo*. Como el momento total en *C* está *equilibrado*, se coloca una fila debajo del momento de $-8000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. Ahora se considerará el momento desequilibrado de $-12\,000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ en la junta *B*. Aquí, para lograr el equilibrio, se aplica un momento de $+12\,000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ a *B* y esta junta se desbloquea de modo que las partes del momento se distribuyan en *BA* y *BC*; es decir, $(0.4)(12\,000) = 4800 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ y $(0.6)(12\,000) = 7200 \text{ lb} \cdot \text{pie}$, como se muestra en la fila 4. También tenga en cuenta que $+\frac{1}{2}$ de estos momentos debe trasladarse a la pared fija *A* y al rodillo *C* puesto que la junta *B* ha girado. La junta *B* ahora se *bloquea de nuevo*. Una vez más, la junta *C* se libera y el momento desequilibrado en el rodillo se distribuye como se hizo anteriormente. Los resultados se muestran en la fila 5. Si las juntas *B* y *C* se bloquean y desbloquean de manera sucesiva, en esencia se disminuye el tamaño del momento que debe equilibrarse hasta que se vuelve insignificante en comparación con los momentos originales, fila 14. Cada uno de los pasos en las filas 3 y 14 deben entenderse plenamente. Si se suman los momentos, los resultados finales son los que se muestran en la fila 15, donde se ve que los momentos finales ya satisfacen el equilibrio de la junta.



(a)

Figura 12-6

Junta	A		B		C	
Elemento	AB	BA	BC	CB		
DF	0	0.4	0.6	1		1
FEM			-8000	8000		2
			-4000	-8000		3
	2400	-4800	7200	-3600		4
			-1800	-3600		5
	360	-720	1080	-540		6
			-270	-540		7
	54	-108	162	-81		8
			-40.5	-81		9
	8.1	-16.2	24.3	-12.2		10
			-6.1	-12.2		11
	1.2	-2.4	3.6	-1.8		12
			-0.9	-1.8		13
		0.4	0.5			14
	ΣM	2823.3	5647.0	-5647.0	0	

(b)

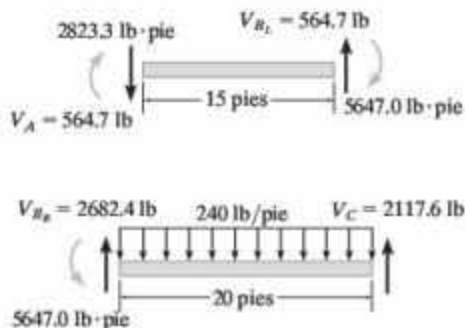
En lugar de aplicar el proceso de distribución de momentos de manera sucesiva a cada junta, como se muestra aquí, también es posible aplicarlo en todas las juntas al mismo tiempo. Este esquema se muestra en la tabla de la figura 12-6c. En este caso, se comienza por fijar todas las juntas para después equilibrar y distribuir los momentos del extremo fijo en las juntas *B* y *C*, fila 3. Si se liberan las juntas *B* y *C* al mismo tiempo (la junta *A* siempre está fija), entonces los momentos se trasladan al extremo de cada claro, fila 4. Una vez más, las juntas se bloquean, y los momentos se equilibran y distribuyen, fila 5. Al liberar las juntas una vez más se permite que los momentos se trasladen, como se muestra en la fila 6. Continuando de esta manera se obtiene el mismo resultado final que antes, el cual aparece en la línea 24. En comparación, este método da una convergencia más lenta que la respuesta del método anterior; sin embargo, en muchos casos, la aplicación de este método es más eficiente y por ello se utilizará en los ejemplos que siguen. Por último, con base en los resultados, ya sea de la figura 12-6b o 12-6c, los diagramas de cuerpo libre de cada claro de la viga son como se presentan en la figura 12-6d.

A pesar de que en este caso la obtención de los resultados finales implicó varios pasos, el trabajo que se necesita es bastante metódico, puesto que requiere la aplicación de una serie de pasos aritméticos, en vez de resolver un conjunto de ecuaciones como en el método de la pendiente-de-

Junta	A	B		C	
Elemento	AB	BA	BC	CB	
DF	0	0.4	0.6	1	1
FEM			-8000	8000	2
Dist		3200	4800	-8000	3
TR	1600		-4000	2400	4
Dist		1600	2400	-2400	5
TR	800		-1200	1200	6
Dist		480	720	-1200	7
TR	240		-600	360	8
Dist		240	360	-360	9
TR	120		-180	180	10
Dist		72	108	-180	11
TR	36		-90	54	12
Dist		36	54	-54	13
TR	18		-27	27	14
Dist		10.8	16.2	-27	15
TR	5.4		-13.5	8.1	16
Dist		5.4	8.1	-8.1	17
TR	2.7		-4.05	4.05	18
Dist		1.62	2.43	-4.05	19
TR	0.81		-2.02	1.22	20
Dist		0.80	1.22	-1.22	21
TR	0.40		-0.61	0.61	22
Dist		0.24	0.37	-0.61	23
ΣM	2823	5647	-5647	0	24

(c)

Figura 12-6



(d)

flexión. Sin embargo, cabe señalar que el proceso fundamental de la distribución de momentos sigue el mismo procedimiento que cualquier método de desplazamiento. Ahí el proceso consiste en establecer relaciones de carga-desplazamiento en cada junta y satisfacer las necesidades de equilibrio en las juntas a fin de determinar el desplazamiento angular correcto de la junta (compatibilidad). Aquí, sin embargo, el equilibrio y la compatibilidad de la rotación en la junta se satisfacen *directamente* aplicando un “balance de momentos”, proceso que incorpora las relaciones de carga-deflexión (factores de rigidez). También es posible simplificar aún más el uso de la distribución de momentos, y esto se estudiará en la próxima sección.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método general para determinar los momentos en los extremos de claros de viga mediante la distribución de momentos.

Factores de distribución y momentos de extremo fijo

Es necesario identificar las juntas en la viga y calcular los factores de rigidez para cada claro en las juntas. Con estos valores es posible determinar los factores de distribución a partir de $DF = K/\Sigma K$. Recuerde que $DF = 0$ para un extremo fijo, y $DF = 1$ para un soporte de pasador o rodillo en el *extremo*.

Los momentos de extremo fijo para cada claro cargado se determinan utilizando la tabla que se encuentra en el interior de la contraportada. Los FEM positivos actúan en sentido horario sobre el claro y los FEM negativos actúan en sentido contrario. Para mayor comodidad, estos valores pueden registrarse en forma tabular, como se muestra en la figura 12-6c.

Proceso de distribución de momentos

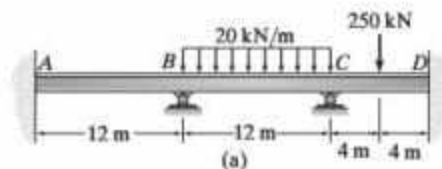
Suponga que todas las juntas en las que deben determinarse los momentos sobre los claros conectados están *inicialmente bloqueadas*. Entonces:

1. Determine el momento necesario para poner cada junta en equilibrio.
2. Libere o “desbloquee” las juntas y distribuya los momentos de equilibrio en el claro conectado a cada junta.
3. Traslade estos momentos en cada claro hacia su otro extremo multiplicando cada momento por el factor de traslado $+\frac{1}{2}$.

Al repetir este ciclo de bloqueo y desbloqueo de las juntas se encontrará con que las correcciones de los momentos disminuirán puesto que la viga tiende a alcanzar su forma final alterada. Cuando se obtiene un valor suficientemente pequeño para las correcciones, el proceso cíclico debe detenerse sin “trasladar” los últimos momentos. Después debe sumarse cada columna de FEM, momentos distribuidos y momentos de traslado. Si esto se hace correctamente, se logrará el equilibrio de momentos en las juntas.

EJEMPLO 12.1

Determine los momentos internos en cada soporte de la viga que se muestra en la figura 12-7a. EI es constante.

**Figura 12-7****SOLUCIÓN**

Primero deben calcularse los factores de distribución en cada junta.* Los factores de rigidez para los elementos son

$$K_{AB} = \frac{4EI}{12} \quad K_{BC} = \frac{4EI}{12} \quad K_{CD} = \frac{4EI}{8}$$

Por lo tanto,

$$DF_{AB} = DF_{DC} = 0 \quad DF_{BA} = DF_{BC} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/12} = 0.5$$

$$DF_{CB} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.4 \quad DF_{CD} = \frac{4EI/8}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.6$$

Los momentos de extremo fijo son

$$\begin{aligned} (FEM)_{BC} &= -\frac{wL^2}{12} = -\frac{20(12)^2}{12} = -240 \text{ kN} \cdot \text{m} & (FEM)_{CB} &= \frac{wL^2}{12} = \frac{20(12)^2}{12} = 240 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ (FEM)_{CD} &= -\frac{PL}{8} = -\frac{250(8)}{8} = -250 \text{ kN} \cdot \text{m} & (FEM)_{DC} &= \frac{PL}{8} = \frac{250(8)}{8} = 250 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

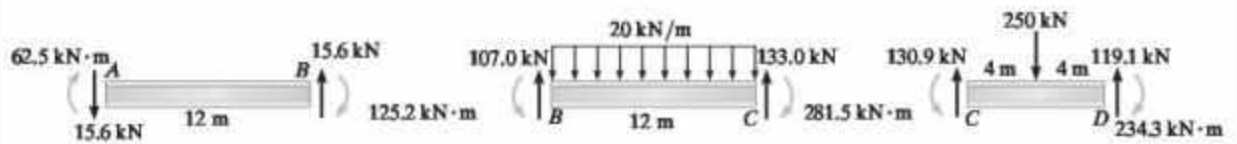
Empezando con los FEM, fila 4 de la figura 12-7b, los momentos en las juntas B y C se distribuyen en forma *simultánea*, fila 5. Después, estos momentos se trasladan *simultáneamente* a los respectivos extremos de cada claro, fila 6. De nuevo, los momentos resultantes se distribuyen y se trasladan *simultáneamente*, filas 7 y 8. El proceso continúa hasta que los momentos resultantes disminuyan a la cantidad adecuada, fila 13. Los momentos resultantes se determinan mediante una sumatoria, fila 14.

Si se colocan los momentos sobre cada claro de la viga y se aplican las ecuaciones de equilibrio, se obtienen las fuerzas cortantes en los extremos que se muestran en la figura 12-7c y el diagrama de momento flexionante para toda la viga, figura 12-7d.

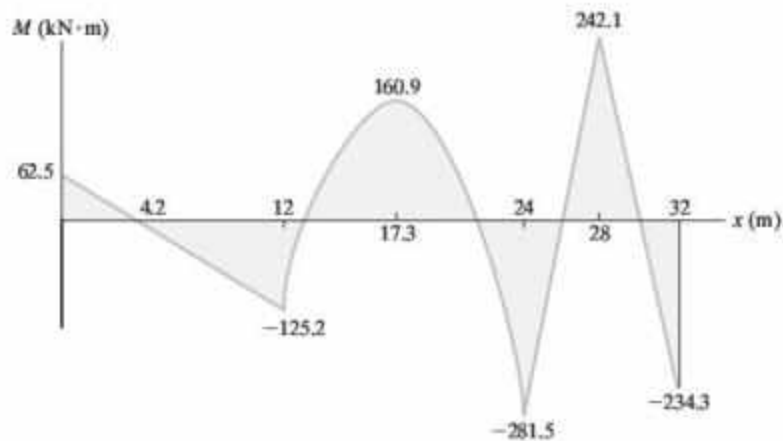
*Aquí se utilizó el factor de rigidez $4EI/L$; sin embargo, también pudo haberse empleado el factor de rigidez relativa I/L .

Junta	A	B		C		D	1
Elemento	AB	BA	BC	CB	CD	DC	2
DF	0	0.5	0.5	0.4	0.6	0	3
FEM			-240	240	-250	250	4
Dist.		120	120	4	6		5
TR	60		2	60		3	6
Dist.		-1	-1	-24	-36		7
TR	-0.5		-12	-0.5		-18	8
Dist.		6	6	0.2	0.3		9
TR	3		0.1	3		0.2	10
Dist.		-0.05	-0.05	-1.2	-1.8		11
TR	-0.02		-0.6	-0.02		-0.9	12
Dist.		0.3	0.3	0.01	0.01		13
ΣM	62.5	125.2	-125.2	281.5	-281.5	234.3	14

(b)



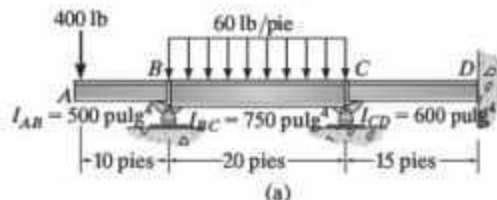
(c)



(d)

EJEMPLO 12.2

Determine el momento interno en cada soporte de la viga que se muestra en la figura 12-8a. Se indica el momento de inercia de cada claro.

**Figura 12-8****SOLUCIÓN**

En este problema no hay un momento que se distribuya en el claro saliente AB ; por lo tanto, el factor de distribución $(DF)_{BA} = 0$. La rigidez del claro BC se basa en $4EI/L$ puesto que el oscilador no está en el extremo lejano de la viga. Los factores de rigidez, los factores de distribución y los momentos de extremo fijo se calculan de la siguiente manera:

$$K_{BC} = \frac{4E(750)}{20} = 150E \quad K_{CD} = \frac{4E(600)}{15} = 160E$$

$$DF_{BC} = 1 - (DF)_{BA} = 1 - 0 = 1$$

$$DF_{CB} = \frac{150E}{150E + 160E} = 0.484$$

$$DF_{CD} = \frac{160E}{150E + 160E} = 0.516$$

$$DF_{DC} = \frac{160E}{\infty + 160E} = 0$$

Debido a la saliente,

$$(FEM)_{BA} = 400 \text{ lb}(10 \text{ pies}) = 4000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{60(20)^2}{12} = -2000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

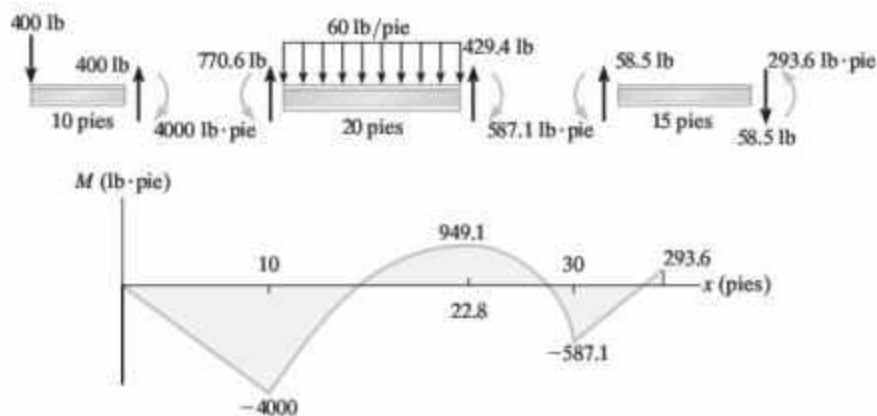
$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{60(20)^2}{12} = 2000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Estos valores se muestran en la cuarta fila de la tabla, figura 12-8b. El claro saliente requiere que el momento interno a la izquierda de B sea $+4000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$. El equilibrio en la junta B exige un momento interno de $-4000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ a la derecha de B . Como se muestra en la quinta fila de la tabla, se agregan $-2000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ a BC con el fin de satisfacer esta condición. Las operaciones de distribución y traslado se realizan de la manera usual, como se indica en la tabla.

Dado que se conocen los momentos internos, es posible construir el diagrama de momento para la viga (figura 12-8c).

Junta		<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
Elemento		<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>	
DF	0	1	0.484	0.516	0	
FEM	4000	-2000	2000			
Dist.		-2000	-968	-1032		
TR		-484	-1000			-516
Dist.		484	484	516		
TR		242	242			258
Dist.		-242	-117.1	-124.9		
TR		-58.6	-121			-62.4
Dist.		58.6	58.6	62.4		
TR		29.3	29.3			31.2
Dist.		-29.3	-14.2	-15.1		
TR		-7.1	-14.6			-7.6
Dist.		7.1	7.1	7.6		
TR		3.5	3.5			3.8
Dist.		-3.5	-1.7	-1.8		
TR		-0.8	-1.8			-0.9
Dist.		0.8	0.9	0.9		
TR		0.4	0.4			0.4
Dist.		-0.4	-0.2	-0.2		
TR		-0.1	-0.2			-0.1
Dist.		0.1	0.1	0.1		
ΣM	4000	-4000	587.1	-587.1	-293.6	

(b)



(c)



Figura 12-9

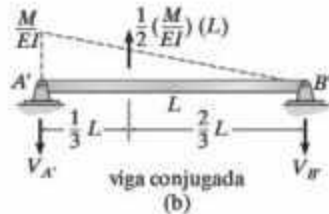
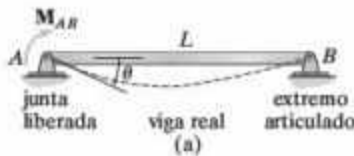


Figura 12-10

12.3 Modificaciones al factor de rigidez

En los ejemplos anteriores de la distribución de momentos, al distribuir y trasladar los momentos se ha considerado que cada claro de la viga está restringido por un soporte fijo (junta bloqueada) en su extremo lejano. Por esta razón se han calculado los factores de rigidez, los factores de distribución y los factores de traslado a partir del caso de la figura 12-9. Por supuesto, aquí $K = 4EI/L$ es el factor de rigidez (ecuación 12-1) y el factor de traslado es $+1/2$.

En algunos casos es posible modificar el factor de rigidez de un claro particular de la viga y por lo tanto simplificar el proceso de distribución de momentos. A continuación se estudiarán tres casos prácticos en los que esto ocurre con frecuencia.

Elemento articulado soportado en su extremo lejano. Muchas vigas indeterminadas tienen el extremo lejano de su claro soportado por un pasador (o un rodillo) como en el caso de la junta B de la figura 12-10a. Aquí, el momento M aplicado gira el extremo A en una cantidad θ. Para determinar θ, debe determinarse la fuerza cortante en el punto A' de la viga conjugada, figura 12-10b. Se tiene

$$\downarrow + \Sigma M_{B'} = 0; \quad V_{A'}(L) - \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) L \left(\frac{2}{3} L \right) = 0$$

$$V_{A'} = \theta = \frac{ML}{3EI}$$

o bien

$$M = \frac{3EI}{L} \theta$$

Por lo tanto, el factor de rigidez para esta viga es

$$K = \frac{3EI}{L}$$

Extremo lejano articulado
o con soporte de rodillo

(12-4)

Además, observe que el *factor de traslado es cero*, puesto que el pasador en B no soporta un momento. Entonces, por comparación, si el extremo lejano estuviera fijamente apoyado, el factor de rigidez $K = 4EI/L$ tendría que modificarse en $3/4$ a fin de modelar el caso del extremo lejano articulado. Si se toma en cuenta esta modificación, el proceso de distribución de momentos se simplifica puesto que el extremo articulado *no* tiene que bloquearse y desbloquearse sucesivamente para distribuir los momentos. Además, como el extremo del claro está fijo, los momentos de extremo fijo para el claro se calculan empleando los valores en la columna de derecha de la tabla que se encuentra en el interior de la contraportada. En el ejemplo 12-4 se ilustra la forma de aplicar estas simplificaciones.

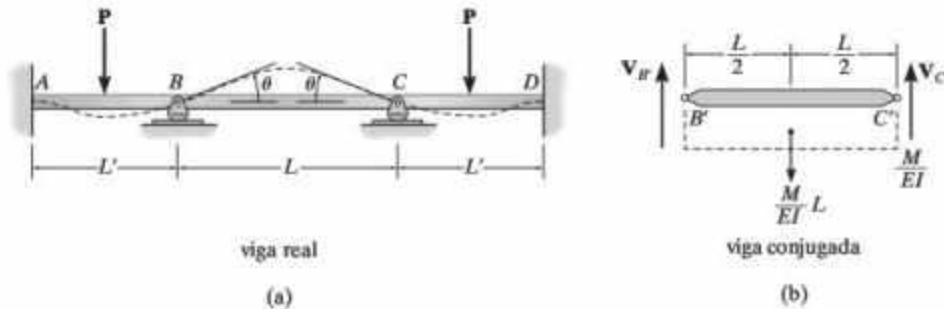


Figura 12-11

Viga y carga simétricas. Si una viga es simétrica con respecto a su carga y también a su geometría, el diagrama de momento flexionante de la viga también será simétrico. En consecuencia, puede hacerse una modificación del factor de rigidez para el claro central, por lo que los momentos en la viga sólo deben distribuirse a través de las juntas que están en ambos puntos medios de la viga. Para desarrollar la modificación adecuada del factor de rigidez, considere la viga de la figura 12-11a. Debido a la simetría, los momentos internos en B y C son iguales. Suponiendo que este valor sea M , la viga conjugada para el claro BC es como se muestra en la figura 12-11b. Por lo tanto, la pendiente θ en cada extremo es,

$$\downarrow + \Sigma M_{C'} = 0; \quad -V_{B'}(L) + \frac{M}{EI}(L)\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$V_{B'} = \theta = \frac{ML}{2EI}$$

o bien

$$M = \frac{2EI}{L}\theta$$

Entonces, el factor de rigidez para el claro central es

$$K = \frac{2EI}{L}$$

Viga y carga simétricas

(12-5)

En consecuencia, sólo se pueden distribuir los momentos de la mitad de la viga dado que el factor de rigidez para el claro central se calcula empleando la ecuación 12-5. En comparación, el factor de rigidez del claro central será la mitad del que generalmente se determina empleando $K = 4EI/L$.

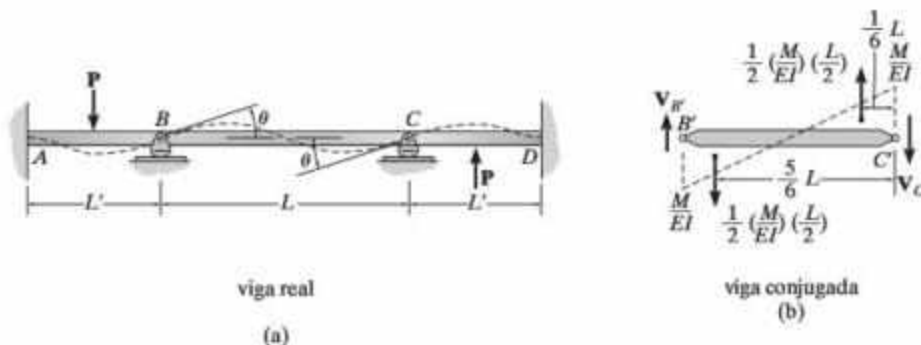


Figura 12-12

Viga simétrica con carga antisimétrica. Si una viga simétrica se somete a una carga antisimétrica, el diagrama de momento resultante será antisimétrico. Al igual que en el caso anterior, el factor de rigidez del claro central se puede modificar de manera que sólo deba considerarse la mitad de la viga para el análisis de distribución de momentos. Considere la viga de la figura 12-12a. La viga conjugada para su claro central BC se muestra en la figura 12-12b. Debido a la carga antisimétrica, el momento interno en B es igual pero opuesto al que ocurre en C . Si se supone que este valor es M , la pendiente θ en cada extremo se determina de la manera siguiente:

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; -V_{B'}(L) + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{5L}{6} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{L}{6} \right) = 0$$

$$V_{B'} = \theta = \frac{ML}{6EI}$$

o bien

$$M = \frac{6EI}{L} \theta$$

Por lo tanto, el factor de rigidez para el claro central es

$$K = \frac{6EI}{L}$$

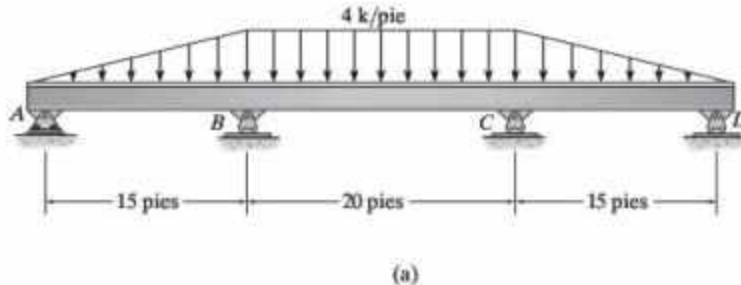
Viga simétrica con
carga antisimétrica

(12-6)

En consecuencia, cuando el factor de rigidez para el claro central de la viga se calcula mediante la ecuación 12-6, sólo deben distribuirse los momentos en la mitad de la viga. Aquí, el factor de rigidez es una y media veces más grande que el que se determina usando $K = 4EI/L$.

EJEMPLO 12.3

Determine los momentos internos en los soportes de la viga que se muestra en la figura 12-13a. EI es constante.

**Figura 12-13****SOLUCIÓN**

Por inspección, la viga y la carga son simétricas. Por lo tanto, se aplicará $K = 2EI/L$ para calcular el factor de rigidez del claro central BC y, por lo tanto, en el análisis se empleará sólo la mitad izquierda de la viga. El análisis puede reducirse aún más usando $K = 3EI/L$ para calcular el factor de rigidez del segmento AB puesto que el extremo A está fijo. Además, la distribución de momentos en A puede omitirse usando el FEM para una carga triangular sobre un plano con un extremo fijo y el otro articulado. Por lo tanto,

$$K_{AB} = \frac{3EI}{15} \quad (\text{usando la ecuación 12-4})$$

$$K_{BC} = \frac{2EI}{20} \quad (\text{usando la ecuación 12-5})$$

$$DF_{AB} = \frac{3EI/15}{3EI/15} = 1$$

$$DF_{BA} = \frac{3EI/15}{3EI/15 + 2EI/20} = 0.667$$

$$DF_{BC} = \frac{2EI/20}{3EI/15 + 2EI/20} = 0.333$$

$$(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{15} = \frac{4(15)^2}{15} = 60 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{4(20)^2}{12} = -133.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

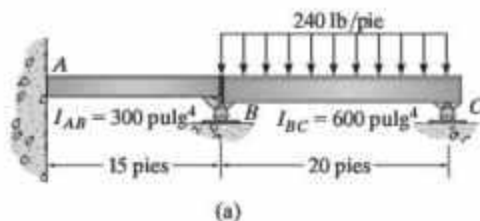
Junta	A	B	
Elemento	AB	BA	BC
DF	1	0.667	0.333
FEM		60	-133.3
Dist.		48.9	24.4
ΣM	0	108.9	-108.9

(b)

Estos datos se encuentran en la tabla de la figura 12-13b. Al calcular los factores de rigidez como se mostró antes, se reduce considerablemente el análisis, puesto que sólo debe equilibrarse la junta B , y los traslados hacia las articulaciones A y C no son necesarios. Por supuesto, la junta C está sometida al mismo momento interno de 108.9 k · pie.

EJEMPLO 12.4

Determine los momentos internos en los soportes de la viga que se muestra en la figura 12-14a. El momento de inercia de los dos claros se muestra en la figura.

**Figura 12-14****SOLUCIÓN**

Como la viga está soportada por rodillos en su extremo lejano C, la rigidez del claro BC se calculará con base en $K = 3EI/L$. Se tiene

$$K_{AB} = \frac{4EI}{L} = \frac{4E(300)}{15} = 80E$$

$$K_{BC} = \frac{3EI}{L} = \frac{3E(600)}{20} = 90E$$

Por lo tanto,

$$DF_{AB} = \frac{80E}{\infty + 80E} = 0$$

$$DF_{BA} = \frac{80E}{80E + 90E} = 0.4706$$

$$DF_{BC} = \frac{90E}{80E + 90E} = 0.5294$$

$$DF_{CB} = \frac{90E}{90E} = 1$$

En este problema es posible obtener una mayor simplificación del método de distribución, si se toma en cuenta que puede usarse un momento solo de extremo fijo para el claro final BC. Si se emplea la columna derecha de la tabla ubicada en el interior de la contraportada, para un claro cargado uniformemente que tiene un lado fijo y el otro articulado, se tiene

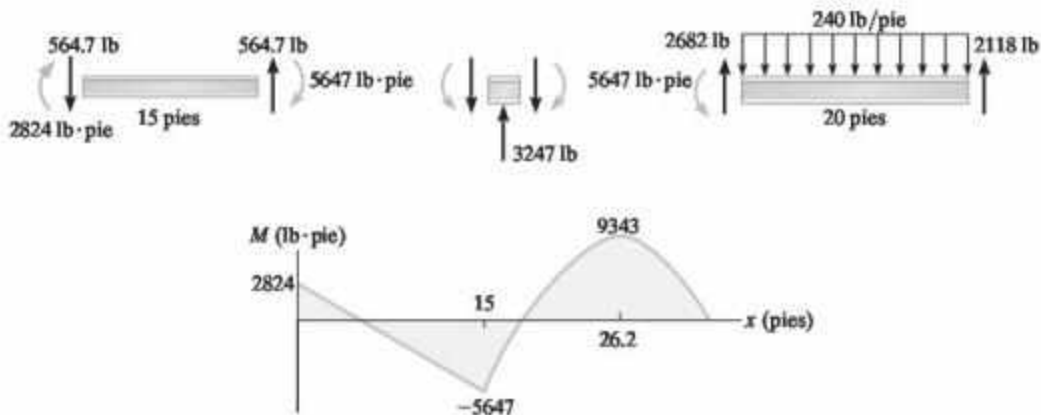
$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{8} = -\frac{240(20)^2}{8} = -12\,000 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Los datos anteriores se introducen en la tabla de la figura 12-14b y se realiza la distribución de momentos. En comparación con la figura 12-6b, este método simplifica considerablemente la distribución.

Con base en los resultados, las fuerzas cortantes en los extremos de la viga y los diagramas de momento son como se muestra en la figura 12-14c.

Junta	A	B		C
Elemento	AB	BA	BC	CB
DF	0	0.4706	0.5294	1
FEM			-12 000	
Dist.		5647.2	6352.8	
CO	2823.6			
ΣM	2823.6	5647.2	-5647.2	0

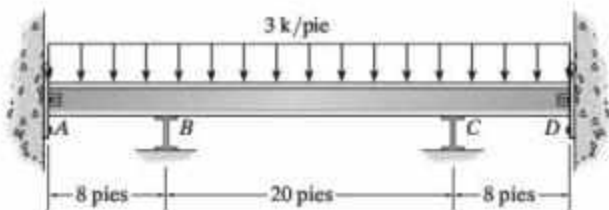
(b)



(c)

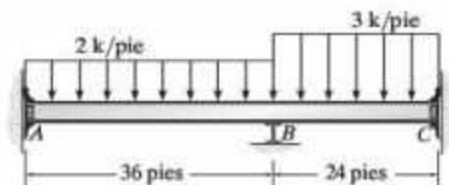
PROBLEMAS

12-1. Determine los momentos en B y C . EI es constante. Suponga que B y C son rodillos y que A y D están articulados.



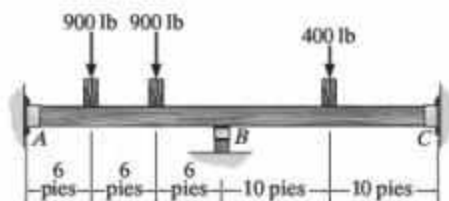
Prob. 12-1

12-2. Determine los momentos en A , B y C . Suponga que el soporte en B es un rodillo y que A y C están fijos. EI es constante.



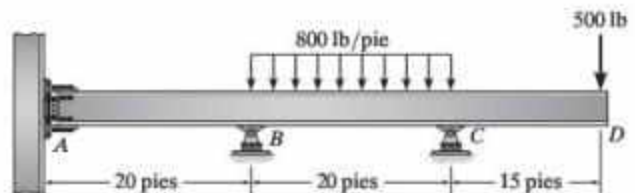
Prob. 12-2

12-3. Determine los momentos en A , B y C , y después dibuje el diagrama de momentos. Suponga que el soporte en B es un rodillo y que A y C están fijos. EI es constante.



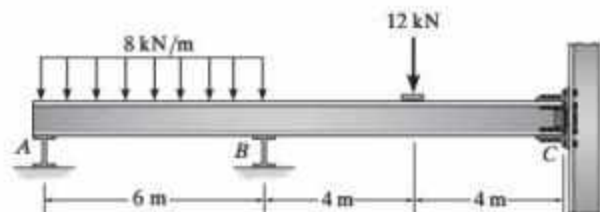
Prob. 12-3

***12-4.** Determine las reacciones en los soportes y después dibuje el diagrama de momentos. Suponga que A está fijo. EI es constante.



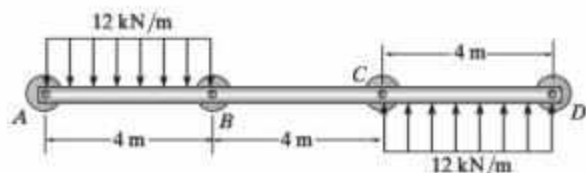
Prob. 12-4

12-5. Determine los momentos en B y C , y después dibuje el diagrama de momentos para la viga. Suponga que C es un soporte fijo. EI es constante.



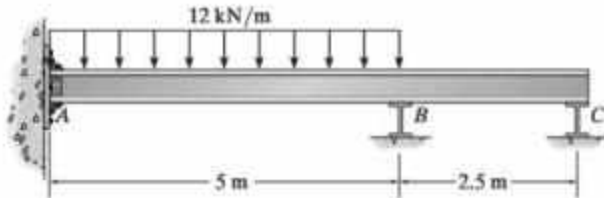
Prob. 12-5

12-6. Determine los momentos en B y C , y después dibuje el diagrama de momentos para la viga. Todas las conexiones están articuladas. Suponga que las reacciones horizontales son iguales a cero. EI es constante.



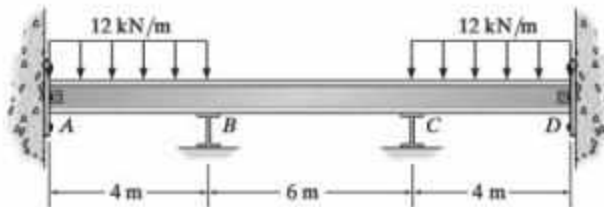
Prob. 12-6

12-7. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que A está fijo y que B y C son rodillos que pueden empujar o jalar la viga. EI es constante.



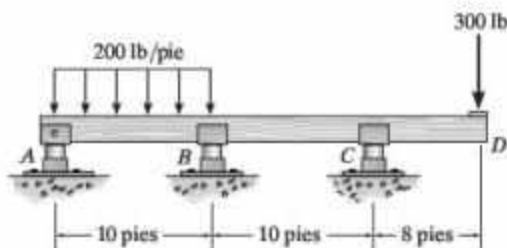
Prob. 12-7

***12-8.** Determine los momentos en B y C , y después dibuje el diagrama de momentos para la viga. Suponga que los soportes en B y C son rodillos y que A y D están articulados. EI es constante.



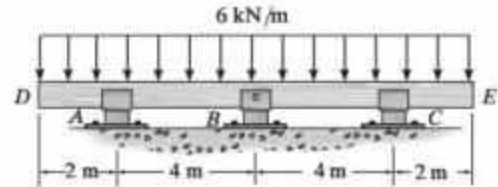
Prob. 12-8

12-9. Determine los momentos en B y C , y después dibuje el diagrama de momentos para la viga. Suponga que los soportes en B y C son rodillos y que A está articulado. EI es constante.



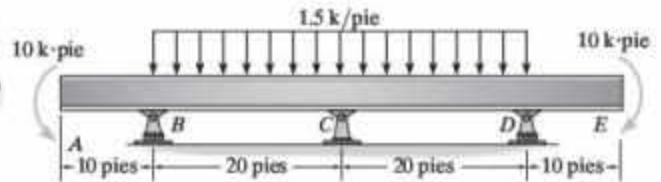
Prob. 12-9

12-10. Determine el momento en B , y después dibuje el diagrama de momentos para la viga. Suponga que los soportes en A y C son rodillos y que B está articulado. EI es constante.



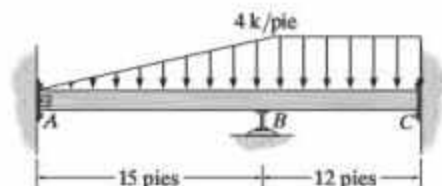
Prob. 12-10

12-11. Determine los momentos en B , C y D , y después dibuje el diagrama de momentos para la viga. EI es constante.



Prob. 12-11

***12-12.** Determine el momento en B y después dibuje el diagrama de momentos para la viga. Suponga que el soporte en A está articulado, que B es un rodillo y que C está fijo. EI es constante.



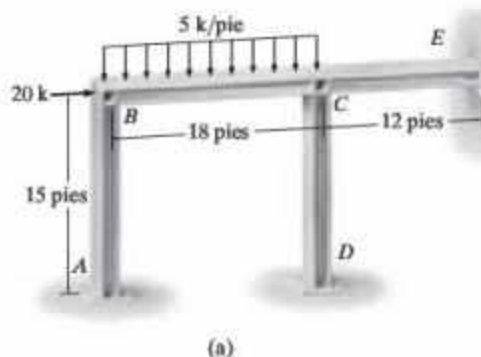
Prob. 12-12

12.4 Distribución de momentos para marcos: Sin lado

La aplicación del método de distribución de momentos para marcos sin lado sigue el mismo procedimiento que el descrito para las vigas. Para reducir al mínimo la posibilidad de errores se sugiere que el análisis se organice en forma tabular, como en los ejemplos anteriores. Además, la distribución de momentos puede simplificarse si el factor de rigidez de un claro puede modificarse como se indicó en la sección anterior.

EJEMPLO 12.5

Determine los momentos internos en las juntas del marco que se muestra en la figura 12-15a. E y D están articulados y en el punto A hay un soporte fijo. EI es constante.



Junta	A	B			C		D	E
Elemento	AB	BA	BC	CB	CD	CE	DC	EC
DF	0	0.545	0.455	0.330	0.298	0.372	1	1
FEM			-135	135				
Dist.		73.6	61.4	-44.6	-40.2	-50.2		
TR	36.8		-22.3	30.7				
Dist.		12.2	10.1	-10.1	-9.1	-11.5		
TR	6.1		-5.1	5.1				
Dist.		2.8	2.3	-1.7	-1.5	-1.9		
TR	1.4		-0.8	1.2				
Dist.		0.4	0.4	-0.4	-0.4	-0.4		
TR	0.2		-0.2	0.2				
Dist.		0.1	0.1	-0.1	0.0	-0.1		
ΣM	44.5	89.1	-89.1	115	-51.2	-64.1		

(b)

Figura 12-15

SOLUCIÓN

Por inspección, el pasador en E impedirá que el marco se ladee. Los factores de rigidez de CD y CE pueden calcularse usando $K = 3EI/L$ puesto que los extremos están fijos. Además, la carga de 20 k no contribuye con un FEM porque está aplicada en la junta B . Por lo tanto,

$$K_{AB} = \frac{4EI}{15} \quad K_{BC} = \frac{4EI}{18} \quad K_{CD} = \frac{3EI}{15} \quad K_{CE} = \frac{3EI}{12}$$

$$DF_{AB} = 0$$

$$DF_{BA} = \frac{4EI/15}{4EI/15 + 4EI/18} = 0.545$$

$$DF_{BC} = 1 - 0.545 = 0.455$$

$$DF_{CB} = \frac{4EI/18}{4EI/18 + 3EI/15 + 3EI/12} = 0.330$$

$$DF_{CD} = \frac{3EI/15}{4EI/18 + 3EI/15 + 3EI/12} = 0.298$$

$$DF_{CE} = 1 - 0.330 - 0.298 = 0.372$$

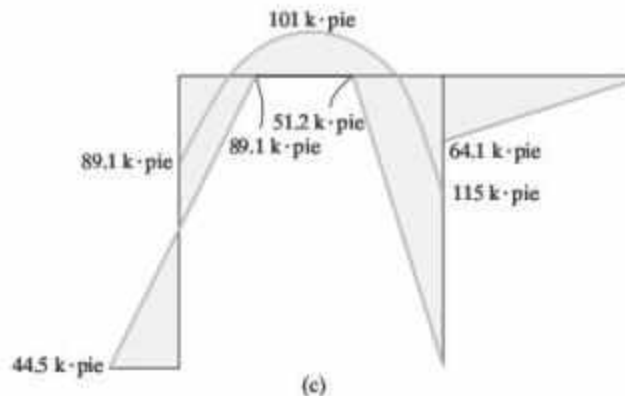
$$DF_{DC} = 1 \quad DF_{EC} = 1$$

$$(FEM)_{BC} = \frac{-wL^2}{12} = \frac{-5(18)^2}{12} = -135 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{5(18)^2}{12} = 135 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Los datos se muestran en la tabla de la figura 12-15b. Aquí se realiza sucesivamente la distribución de momentos en las juntas B y C . Los momentos finales se muestran en la última fila.

El diagrama de momentos para el marco de la figura 12-15c se construye utilizando estos datos.



12.5 Distribución de momentos para marcos: Con ladeo

En la sección 11-5 se mostró que los marcos que no son simétricos o que están sujetos a cargas no simétricas tienen una tendencia a ladearse. Un ejemplo de estos casos se muestra en la figura 12-16a. Aquí, la carga aplicada P generará momentos desiguales en las juntas B y C de modo que el marco se desviará una cantidad Δ hacia la derecha. Para determinar esta deflexión y los momentos internos en las juntas mediante la distribución de momentos se usará el principio de superposición. En este sentido se considera primero que el marco de la figura 12-16b no experimenta ladeo al aplicar un soporte artificial en la junta C . Se aplica la distribución de momentos y después, por la estática, se determina la fuerza restrictiva R . Luego se aplica a la estructura una fuerza de restricción igual pero opuesta, figura 12-16c, y se calculan los momentos en el marco. Un método para realizar este último paso requiere, en primer lugar, suponer un valor numérico de uno de los momentos internos, por ejemplo M'_{BA} . Si se usa la distribución de momentos y la estática, es posible determinar la deflexión Δ' y la fuerza externa R' correspondientes al valor supuesto para M'_{BA} . Dado que se producen deformaciones elásticas lineales, la fuerza R' desarrolla momentos en el marco que son *proporcionales* a los desarrollados por R . Por ejemplo, si se conocen M'_{BA} y R' , el momento en B desarrollado por R será $M_{BA} = M'_{BA}(R/R')$. Al sumar los momentos en las juntas para ambos casos, figuras 12-16b y c, se obtendrán los momentos reales en el marco, figura 12-16a. La aplicación de esta técnica se ilustra en los ejemplos 12-6 a 12-8.

Marcos de varios niveles. Con mucha frecuencia, los marcos de varios niveles pueden tener algunos desplazamientos *independientes* en sus juntas y, por consiguiente, el análisis de la distribución de momentos empleando las técnicas descritas anteriormente implicará un mayor número de cálculos. Por ejemplo, considere el marco de dos niveles que se muestra en la figura 12-17a. Esta estructura puede tener dos despla-

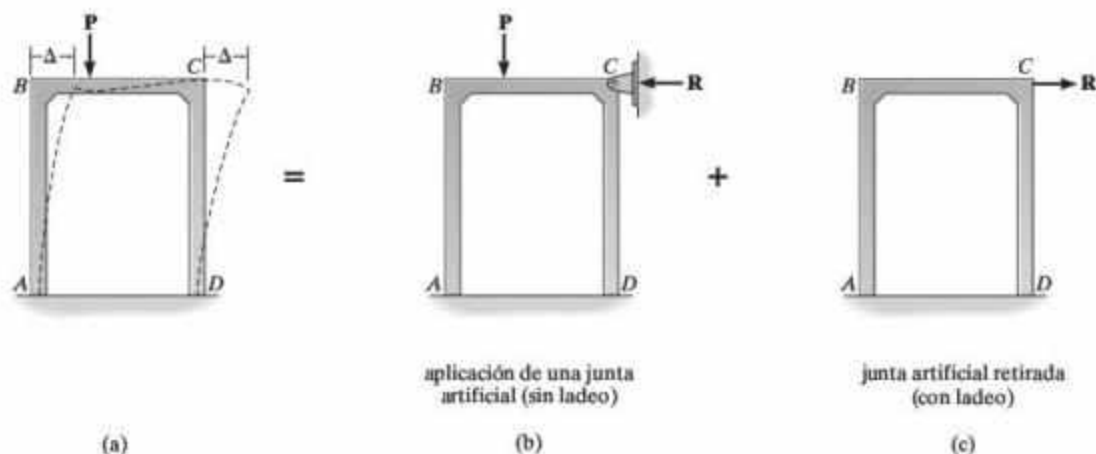


Figura 12-16

mientos independientes en sus juntas, puesto que el desplazamiento lateral Δ_1 del primer nivel es independiente de cualquier desplazamiento Δ_2 en el segundo nivel. Por desgracia, estos desplazamientos no se conocen inicialmente, por lo que el análisis debe proceder con base en la superposición, de la misma manera que se analizó antes. En este caso se aplican dos fuerzas de restricción: R_1 y R_2 , figura 12-17b, y se determinan y distribuyen los momentos de extremo fijo. Los valores numéricos de R_1 y R_2 se determinan con base en las ecuaciones de equilibrio. Después se retira la restricción en el piso del primer nivel y el piso experimenta un desplazamiento Δ' . Este desplazamiento provoca momentos de extremo fijo (FEM) en el marco, a los que pueden asignárseles valores numéricos específicos. Al distribuir estos momentos y al emplear las ecuaciones de equilibrio, es posible determinar los valores numéricos asociados de R'_1 y R'_2 . De manera similar, el piso del segundo nivel experimenta un desplazamiento Δ'' , figura 12-17d. Si se suponen valores numéricos de los momentos de extremo fijo, la distribución de momentos y el análisis del equilibrio generarán valores específicos de R''_1 y R''_2 . Como los últimos dos pasos asociados con las figuras 12-17c y d dependen de valores *supuestos* para los FEM, es necesario aplicar factores de corrección C' y C'' a los momentos distribuidos. Con referencia a las fuerzas de restricción de las figuras 12-17c y 12-17d, se requiere la aplicación igual pero opuesta de R_1 y R_2 sobre la estructura, de tal manera que

$$R_2 = -C' R'_2 + C'' R''_2$$

$$R_1 = +C' R'_1 - C'' R''_1$$

Al resolver en forma simultánea estas ecuaciones se obtiene el valor de C' y C'' . Estos factores de corrección se multiplican por los momentos internos en las juntas que se encontraron con base en la distribución de momentos, figuras 12-17c y 12-17d. Después, los momentos resultantes se determinan al sumar estos momentos corregidos con los obtenidos en el marco de la figura 12-17b.

Hay otros tipos de marcos con desplazamientos independientes en sus juntas que pueden analizarse mediante el mismo procedimiento; sin embargo, debe reconocerse que el método anterior requiere bastantes cálculos numéricos. Aunque se han desarrollado algunas técnicas para reducir los cálculos, lo mejor es resolver este tipo de problemas en una computadora, de preferencia que realice análisis matriciales. Las técnicas para llevar a cabo esto se estudiarán en el capítulo 16.

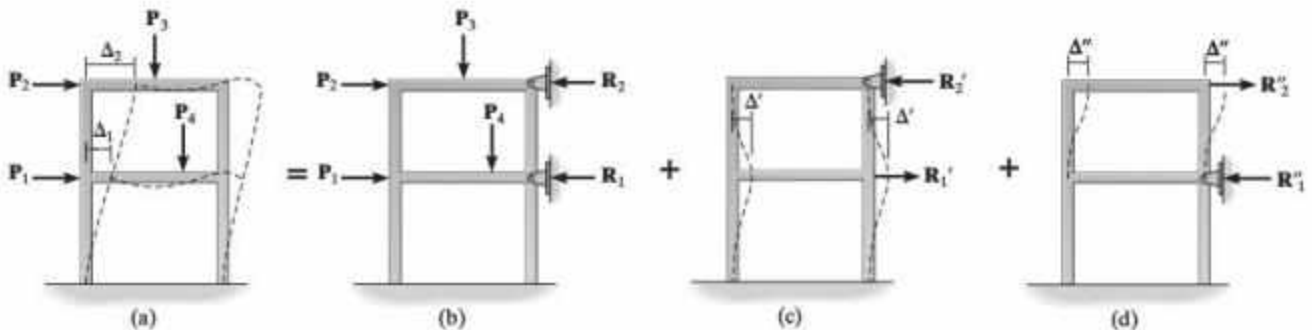
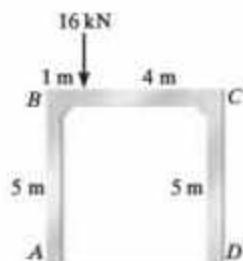


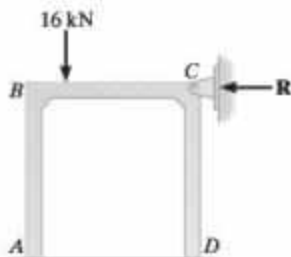
Figura 12-17

EJEMPLO 12.6



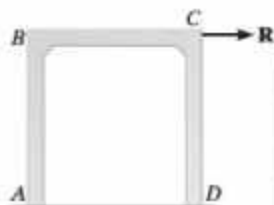
(a)

II



(b)

+



(c)

Figura 12-18

Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 12-18a. EI es constante.

SOLUCIÓN

En primer lugar se considerará que el marco no sufre desplazamiento lateral como se muestra en la figura 12-18b. Se tiene

$$(FEM)_{BC} = -\frac{16(4)^2(1)}{(5)^2} = -10.24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{16(1)^2(4)}{(5)^2} = 2.56 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

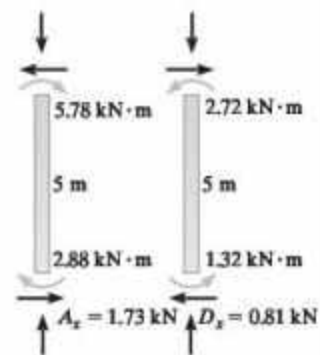
El factor de rigidez de cada claro se calcula con base en $4EI/L$ o empleando el factor de rigidez relativa I/L . Los DF y la distribución de momentos se muestran en la tabla de la figura 12-18d. Con base en estos resultados se aplican las ecuaciones de equilibrio a los diagramas de cuerpo libre de las columnas a fin de determinar A_x y D_x , figura 12-18e. A partir del diagrama de cuerpo libre de todo el marco (no se muestra), la restricción R de la junta en la figura 12-18b tiene una magnitud de

$$\Sigma F_x = 0; \quad R = 1.73 \text{ kN} - 0.81 \text{ kN} = 0.92 \text{ kN}$$

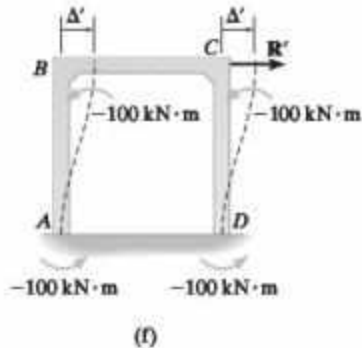
Ahora debe aplicarse un valor igual pero opuesto de $R = 0.92 \text{ kN}$ sobre el punto C del marco y es necesario calcular los momentos internos, figura 12-18c. Para resolver el problema del cálculo de estos momentos, se supondrá que se aplica una fuerza R' sobre C , lo que ocasiona que el marco se desvíe Δ' , como se muestra en la figura 12-18f. Aquí las juntas en B y C se encuentran *temporalmente restringidas a la rotación*, y como resultado se determinan los momentos de extremo fijo en los extremos de las columnas con base en la fórmula de la deflexión que se encuentra en el interior de la contraportada, es decir,

Junta	A	B		C		D
Elemento	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
FEM			-10.24	2.56		
Dist.		5.12	5.12	-1.28	-1.28	
TR	2.56		-0.64	2.56		-0.64
Dist.		0.32	0.32	-1.28	-1.28	
TR	0.16		-0.64	0.16		-0.64
Dist.		0.32	0.32	-0.08	-0.08	
TR	0.16		-0.04	0.16		-0.04
Dist.		0.02	0.02	-0.08	-0.08	
ΣM	2.88	5.78	-5.78	2.72	-2.72	-1.32

(d)



(e)



Junta	A		B		C		D
Elemento	AB	BA	BC	CB	CD	DC	
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0	
FEM	-100	-100			-100	-100	
Dist.		50	50	50	50		
TR	25		25	25		25	
Dist.		12.5	12.5	12.5	12.5		
TR	-6.25		-6.25	-6.25		-6.25	
Dist.		3.125	3.125	3.125	3.125		
TR	1.56		1.56	1.56		1.56	
Dist.		0.78	0.78	0.78	0.78		
TR	-0.39		-0.39	-0.39		-0.39	
Dist.		0.195	0.195	0.195	0.195		
ΣM	-80.00	-60.00	60.00	60.00	-60.00	-80.00	

(g)

$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

En vista de que tanto B como C se desplazan la misma cantidad Δ' , y AB y DC tienen los mismos valores de E , I y L , el FEM en AB será el mismo que en DC . Como se muestra en la figura 12-18f, se supondrá arbitrariamente que este momento de extremo fijo sea

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = -100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Se requiere un signo negativo porque el momento debe actuar en sentido antihorario sobre la columna para obtener una deflexión Δ' hacia la derecha. Ahora puede determinarse el valor de R' asociado con este momento de $-100 \text{ kN} \cdot \text{m}$. La distribución de momentos de los FEM se muestra en la figura 12-18g. Con base en el equilibrio, se calculan las reacciones horizontales en A y D , figura 12-18h. Así, para todo el marco se requiere

$$\Sigma F_x = 0; \quad R' = 28 + 28 = 56.0 \text{ kN}$$

Por lo tanto, $R' = 56.0 \text{ kN}$ crea los momentos tabulados en la figura 12-18g. Los momentos correspondientes causados por $R = 0.92 \text{ kN}$ pueden determinarse por proporción. Por lo tanto, el momento resultante en el marco, figura 12-18a, es igual a la suma de los calculados para el marco en la figura 12-18b, más la cantidad proporcional de los que se calcularon en la figura 12-18c. Se tiene

$$M_{AB} = 2.88 + \frac{0.92}{56.0}(-80) = 1.57 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

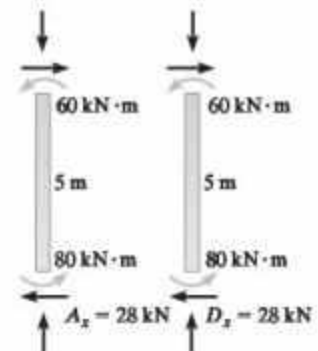
$$M_{BA} = 5.78 + \frac{0.92}{56.0}(-60) = 4.79 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{BC} = -5.78 + \frac{0.92}{56.0}(60) = -4.79 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CB} = 2.72 + \frac{0.92}{56.0}(60) = 3.71 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CD} = -2.72 + \frac{0.92}{56.0}(-60) = -3.71 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

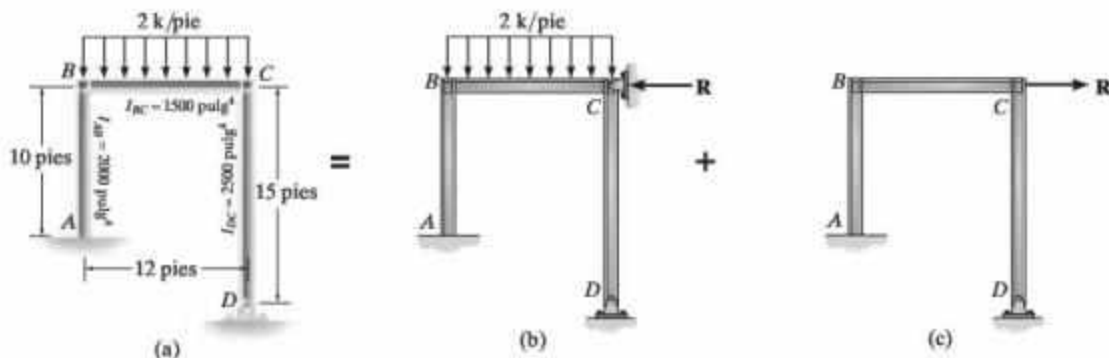
$$M_{DC} = -1.32 + \frac{0.92}{56.0}(-80) = -2.63 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$



(h)

EJEMPLO 12.7

Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 12-19a. El momento de inercia de cada elemento se indica en la figura.

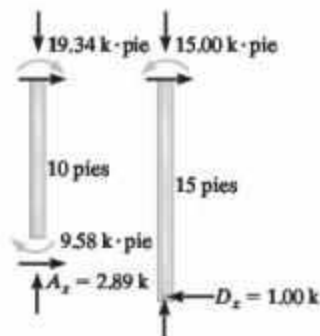
**Figura 12-19****SOLUCIÓN**

En primer lugar se evita un ladeo en el marco, como se muestra en la figura 12-19b. Los momentos internos en las juntas se calculan como se indica en la figura 12-19d. Aquí, el factor de rigidez del CD se calculó empleando $3EI/L$, puesto que hay un pasador en D . El cálculo de las reacciones horizontales en A y D se muestra en la figura 12-19e. Entonces, para todo el marco,

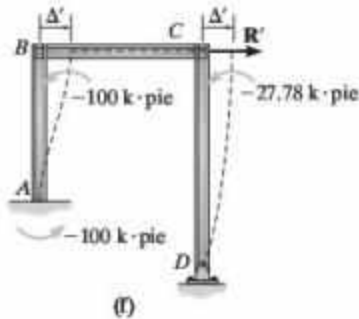
$$\Sigma F_x = 0; \quad R = 2.89 - 1.00 = 1.89 \text{ k}$$

Junta	A	B		C		D
Elemento	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	0	0.615	0.385	0.5	0.5	1
FEM			-24	24		
Dist.		14.76	9.24	-12	-12	
TR	7.38		-6	4.62		
Dist.		3.69	2.31	-2.31	-2.31	
TR	1.84		-1.16	1.16		
Dist.		0.713	0.447	-0.58	-0.58	
TR	0.357		-0.29	0.224		
Dist.		0.18	0.11	-0.11	-0.11	
ΣM	9.58	19.34	-19.34	15.00	-15.00	0

(d)



(e)



Junta	A	B		C		D
Elemento	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	0	0.615	0.385	0.5	0.5	1
FEM	-100	-100			-27.78	
Dist.		61.5	38.5	13.89	13.89	
TR	30.75		6.94	19.25		
Dist.		-4.27	-2.67	-9.625	-9.625	
TR	-2.14		-4.81	-1.34		
Dist.		2.96	1.85	0.67	0.67	
TR	1.48		0.33	0.92		
Dist.		-0.20	-0.13	-0.46	-0.46	
ΣM	-69.91	-40.01	40.01	23.31	-23.31	0

(g)

La fuerza opuesta se aplica ahora sobre el marco como se muestra en la figura 12-19c. Al igual que en el ejemplo anterior, se considerará una fuerza R' que actúa en la forma mostrada en la figura 12-19f. Como resultado, las juntas B y C se desplazan la misma cantidad Δ' . Los momentos de extremo fijo para BA se calculan a partir de

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = -\frac{6EI\Delta}{L^2} = -\frac{6E(2000)\Delta'}{(10)^2}$$

Sin embargo, con base en la tabla que se encuentra en el interior de la contraportada, para CD se tiene

$$(FEM)_{CD} = -\frac{3EI\Delta}{L^2} = -\frac{3E(2500)\Delta'}{(15)^2}$$

Si se supone que el FEM para AB es de $-100 \text{ k} \cdot \text{pie}$ como se muestra en la figura 12-19f, el FEM correspondiente en C , que causa el mismo Δ' , se encuentra por comparación, esto es,

$$\Delta' = -\frac{(-100)(10)^2}{6E(2000)} = -\frac{(FEM)_{CD}(15)^2}{3E(2500)}$$

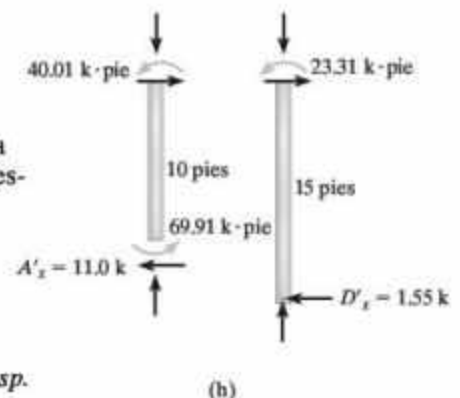
$$(FEM)_{CD} = -27.78 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

La distribución de momentos para estos FEM se tabula en la figura 12-19g. Los cálculos de las reacciones horizontales en A y D se muestran en la figura 12-19h. Entonces, para todo el marco,

$$\Sigma F_x = 0; \quad R' = 11.0 + 1.55 = 12.55 \text{ k}$$

Por lo tanto, los momentos resultantes en el marco son

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 9.58 + \left(\frac{1.89}{12.55}\right)(-69.91) = -0.948 \text{ k} \cdot \text{pie} && \text{Resp.} \\ M_{BA} &= 19.34 + \left(\frac{1.89}{12.55}\right)(-40.01) = 13.3 \text{ k} \cdot \text{pie} && \text{Resp.} \\ M_{BC} &= -19.34 + \left(\frac{1.89}{12.55}\right)(40.01) = -13.3 \text{ k} \cdot \text{pie} && \text{Resp.} \\ M_{CB} &= 15.00 + \left(\frac{1.89}{12.55}\right)(23.31) = 18.5 \text{ k} \cdot \text{pie} && \text{Resp.} \\ M_{CD} &= -15.00 + \left(\frac{1.89}{12.55}\right)(-23.31) = -18.5 \text{ k} \cdot \text{pie} && \text{Resp.} \end{aligned}$$



(h)

EJEMPLO 12.8

Determine los momentos en cada junta del marco que se muestra en la figura 12-20a. EI es constante.

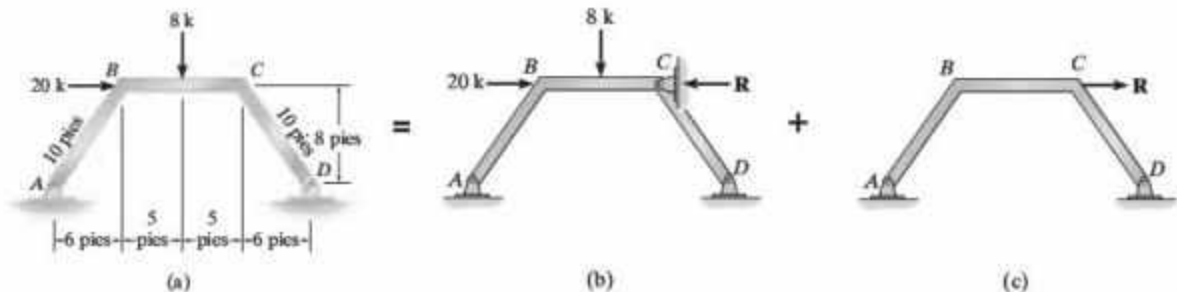


Figura 12-20

SOLUCIÓN

Primero se evita el desplazamiento lateral mediante la fuerza de restricción R , figura 12-20b. Los FEM para el elemento BC son

$$(FEM)_{BC} = -\frac{8(10)}{8} = -10 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad (FEM)_{CB} = \frac{8(10)}{8} = 10 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Como los claros AB y DC están articulados en sus extremos, el factor de rigidez se calcula empleando $3EI/L$. La distribución de momentos se muestra en la figura 12-20d.

Las reacciones horizontales en A y D deben determinarse a partir de estos resultados, lo cual se hace mediante un análisis del equilibrio para cada elemento, figura 12-20e. Al sumar los momentos respecto de los puntos B y C en cada pierna, se tiene

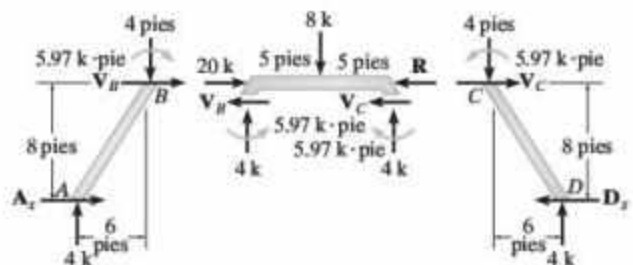
$$\begin{aligned} \downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad -5.97 + A_x(8) - 4(6) &= 0 & A_x &= 3.75 \text{ k} \\ \downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad 5.97 - D_x(8) + 4(6) &= 0 & D_x &= 3.75 \text{ k} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo el marco,

$$\Sigma F_x = 0; \quad R = 3.75 - 3.75 + 20 = 20 \text{ k}$$

Junta	A	B		C		D
Elemento	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	1	0,429	0,571	0,571	0,429	1
FEM			-10	10		
Dist.		4,29	5,71	-5,71	-4,29	
TR			-2,86	2,86		
Dist.		1,23	1,63	-1,63	-1,23	
TR			-0,82	0,82		
Dist.		0,35	0,47	-0,47	-0,35	
TR			-0,24	0,24		
Dist.		0,10	0,13	-0,13	-0,10	
ΣM	0	5,97	-5,97	5,97	-5,97	0

(d)



(e)

La fuerza opuesta R se aplica ahora al marco como se muestra en la figura 12-20c. Con el fin de determinar los momentos internos desarrollados por R se considerará primero que la fuerza R' actúa como se muestra en la figura 12-20f. Aquí las líneas discontinuas no representan la distorsión de los elementos del marco, sino que se construyen como líneas rectas extendidas hasta las posiciones finales B' y C' desde los puntos B y C , respectivamente. Debido a la simetría del marco, el desplazamiento $BB' = CC' = \Delta'$. Además, estos desplazamientos hacen que BC gire. La distancia vertical entre B' y C' es $1.2\Delta'$, como se muestra en el diagrama de desplazamiento, figura 12-20g. Dado que cada claro experimenta desplazamientos hasta un punto extremo que ocasionan un giro en éste, se inducen momentos de extremo fijo en los claros. Dichos momentos son:

$$(FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = -3EI\Delta'/(10)^2, \quad (FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = 6EI(1.2\Delta')/(10)^2.$$

Observe que para BA y CD los momentos son *negativos* puesto que una rotación en sentido horario del claro ocasiona un FEM con *sentido antihorario*.

Si se asigna arbitrariamente un valor de $(FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = -100 \text{ k} \cdot \text{pie}$, entonces al igualar Δ' en las fórmulas anteriores se obtiene $(FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = 240 \text{ k} \cdot \text{pie}$. Estos momentos se aplican al marco y se distribuyen, figura 12-20h. Con los resultados anteriores, el análisis de equilibrio es como se muestra en la figura 12-20i. Para cada pierna se tiene

$$\downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad -A'_x(8) + 29.36(6) + 146.80 = 0 \quad A'_x = 40.37 \text{ k}$$

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad -D'_x(8) + 29.36(6) + 146.80 = 0 \quad D'_x = 40.37 \text{ k}$$

Entonces, para todo el marco,

$$\Sigma F_x = 0; \quad R' = 40.37 + 40.37 = 80.74 \text{ k}$$

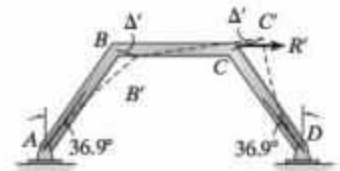
Por lo tanto, los momentos resultantes en el marco son

$$M_{BA} = 5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(-146.80) = -30.4 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

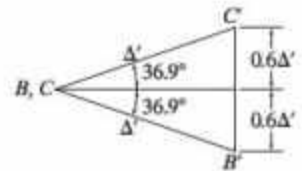
$$M_{BC} = -5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(146.80) = 30.4 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

$$M_{CB} = 5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(146.80) = 42.3 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

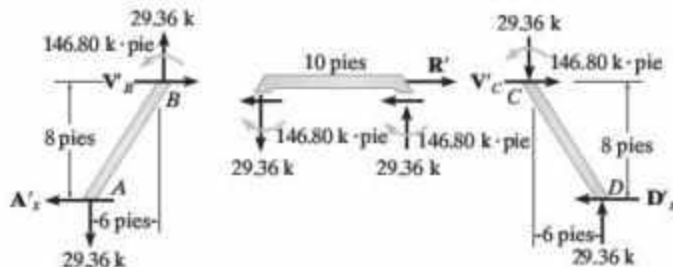
$$M_{CD} = -5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(-146.80) = -42.3 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$



(f)



(g)



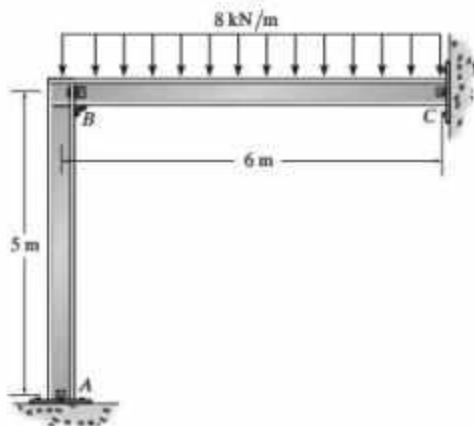
(i)

Junta	A	B		C		D
Elemento	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	1	0.429	0.571	0.571	0.429	1
FEM		-100	240	240	-100	
Dist.		-60.06	-79.94	-79.94	-60.06	
TR			-39.97	-39.97		
Dist.		17.15	22.82	22.82	17.15	
TR			11.41	11.41		
Dist.		-4.89	-6.52	-6.52	-4.89	
TR			-3.26	-3.26		
Dist.		1.40	1.86	1.86	1.40	
TR			0.93	0.93		
Dist.		-0.40	-0.53	-0.53	-0.40	
ΣM	0	-146.80	146.80	146.80	-146.80	0

(h)

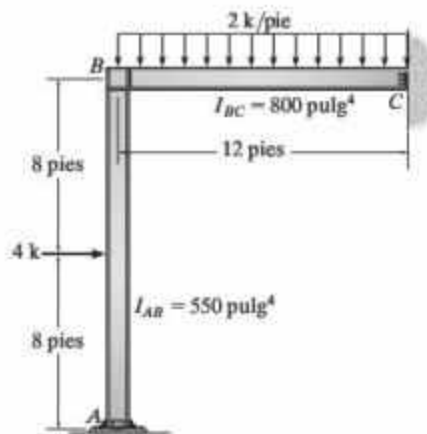
PROBLEMAS

12-13. Determine el momento en B , y después dibuje el diagrama de momentos para cada elemento del marco. Suponga que los soportes en A y C están articulados. EI es constante.



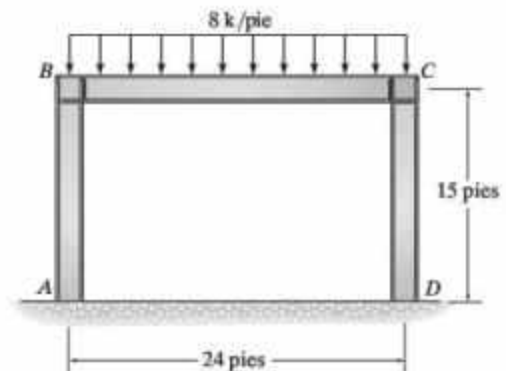
Prob. 12-13

12-14. Determine los momentos en los extremos de cada elemento del marco. Suponga que la junta en B está fija, que C está articulada y que A está fijo. El momento de inercia de cada elemento se muestra en la figura. $E = 29(10^3)$ ksi.



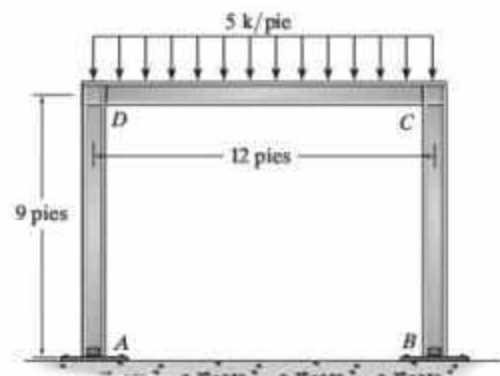
Prob. 12-14

12-15. Determine las reacciones en A y D . Suponga que los soportes en A y D están fijos y que B y C están conectados fijamente. EI es constante.



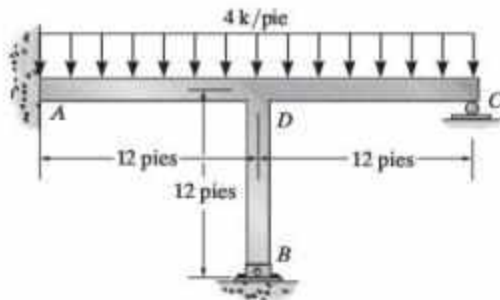
Prob. 12-15

***12-16.** Determine los momentos en D y C , y después dibuje el diagrama de momentos para cada elemento del marco. Suponga que los soportes en A y B están articulados y que las juntas D y C están fijas. EI es constante.



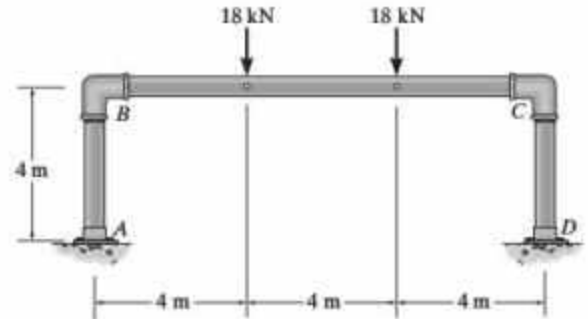
Prob. 12-16

12-17. Determine los momentos en el soporte fijo A y en la junta D , y después dibuje el diagrama de momentos para el marco. Suponga que B está articulado.



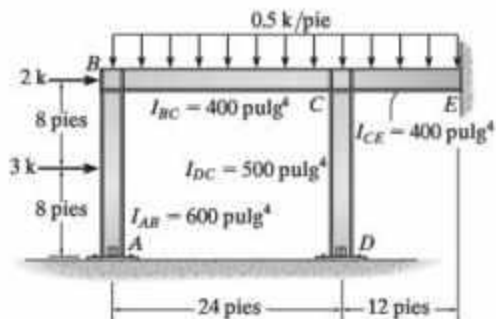
Prob. 12-17

12-19. El marco está hecho de tubos que se conectan fijamente. Si soporta las cargas que se muestran, determine los momentos desarrollados en cada una de las juntas. EI es constante.



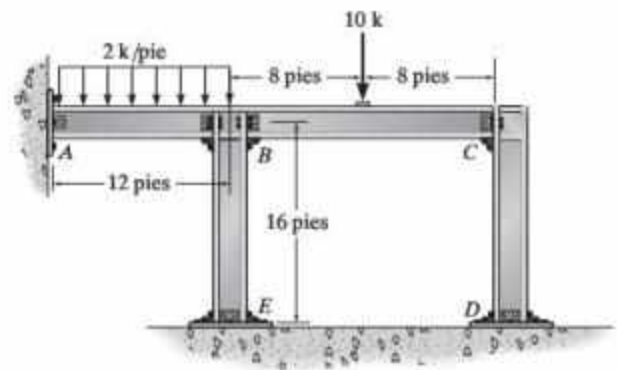
Prob. 12-19

12-18. Determine los momentos en cada junta del marco, y después dibuje el diagrama de momentos para el elemento BCE . Suponga que B , C y E están fijamente conectados y que A y D están articulados. $E = 29(10^3)$ ksi.



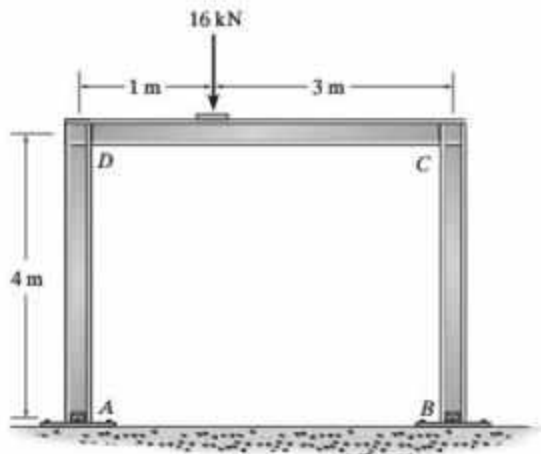
Prob. 12-18

***12-20.** Determine los momentos en B y C , y después dibuje el diagrama de momentos para cada elemento del marco. Suponga que los soportes en A , E y D están fijos. EI es constante.



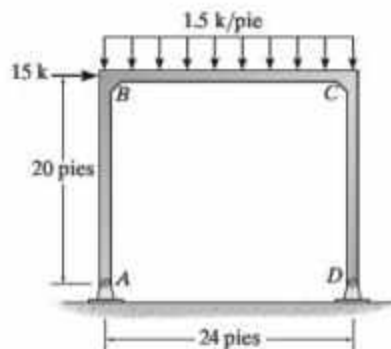
Prob. 12-20

- 12** **12-21.** Determine los momentos en D y C , y después dibuje el diagrama de momentos para cada elemento del marco. Suponga que los soportes en A y B están articulados. EI es constante.



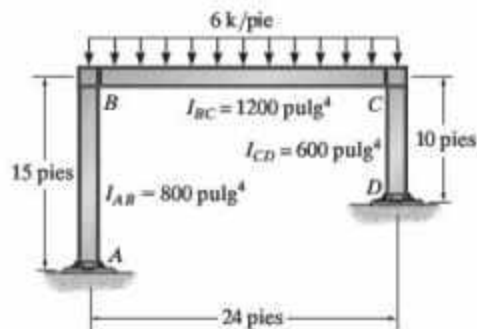
Prob. 12-21

- 12-23.** Determine los momentos que actúan en los extremos de cada elemento del marco. EI es constante.



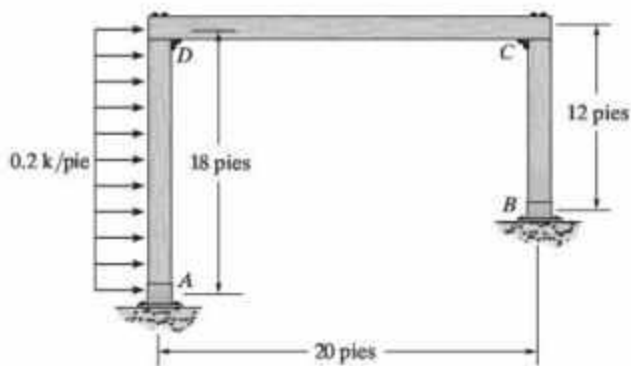
Prob. 12-23

- 12-22.** Determine los momentos que actúan en los extremos de cada elemento. Suponga que los soportes en A y D están fijos. El momento de inercia de cada elemento se muestra en la figura. $E = 29(10^3)$ ksi.



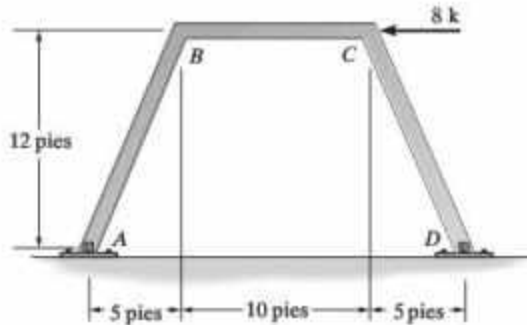
Prob. 12-22

- *12-24.** Determine los momentos que actúan en los extremos de cada elemento. Suponga que las juntas están fijamente conectadas y que A y B son soportes fijos. EI es constante.



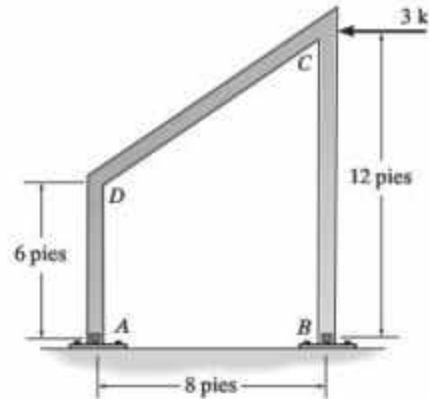
Prob. 12-24

12-25. Determine los momentos en las juntas B y C , y después dibuje el diagrama de momentos para cada elemento del marco. Los soportes en A y D están articulados. EI es constante.



Prob. 12-25

12-26. Determine los momentos en las juntas C y D , y después dibuje el diagrama de momentos para cada elemento del marco. Suponga que los soportes en A y B están articulados. EI es constante.

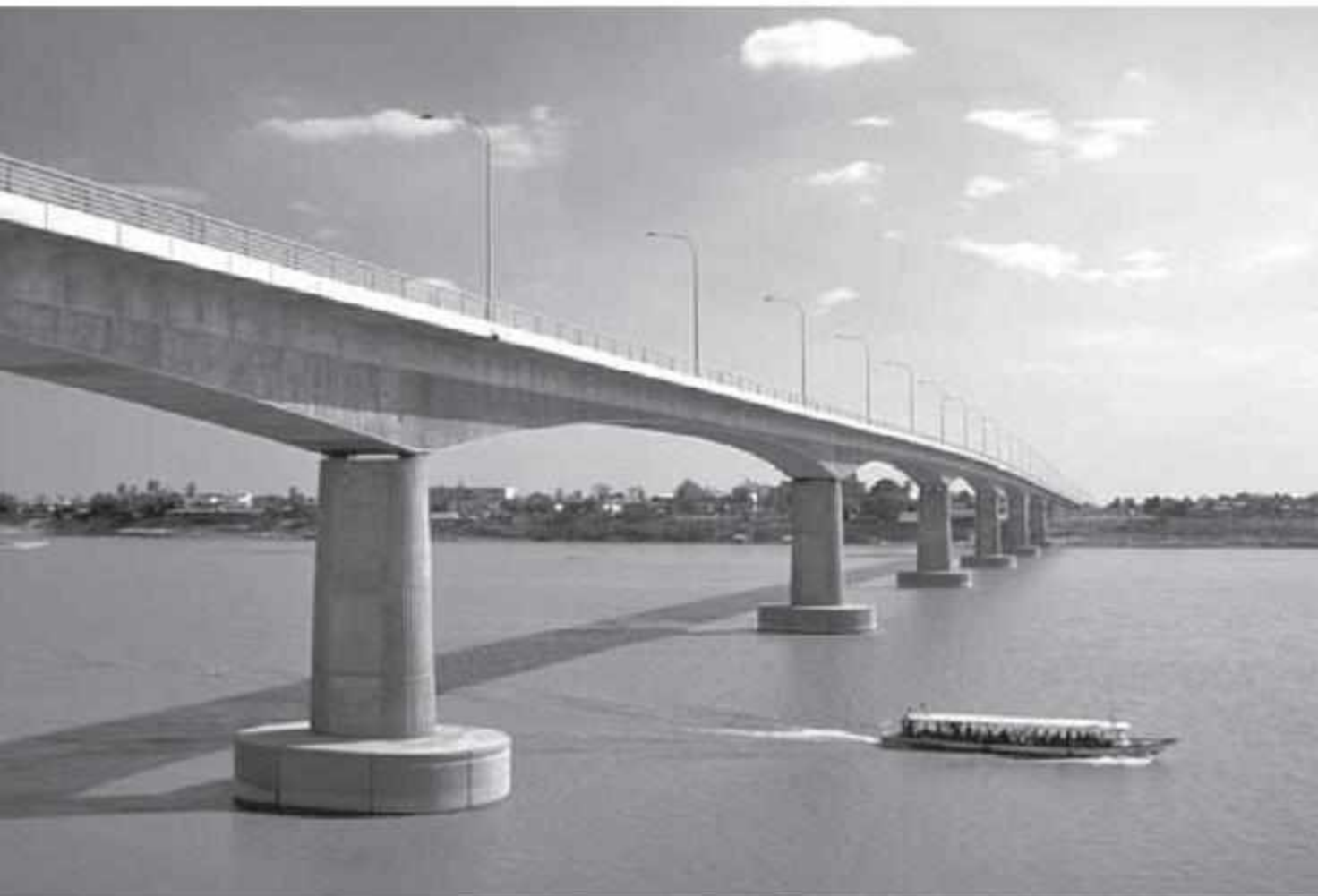


Prob. 12-26

REPASO DEL CAPÍTULO

La distribución de momentos es un método de aproximaciones sucesivas que puede realizarse con cualquier grado de precisión deseado. Inicialmente se requiere bloquear todas las juntas de la estructura. Luego se determina el momento de equilibrio para cada junta; las juntas se desbloquean y este momento se distribuye a cada elemento conectado, y después la mitad de su valor se traslada al otro lado del claro. Este ciclo de bloquear y liberar las juntas se repite hasta que el traslado de momentos se vuelva aceptablemente pequeño. Entonces se detiene el proceso y el momento en cada junta es la suma de los momentos en cada ciclo de bloqueo y desbloqueo.

El proceso de distribución de momentos se realiza de manera cómoda en la forma tabular. Antes de comenzar debe calcularse el momento de extremo fijo para cada claro empleando la tabla que aparece en el interior de la contraportada de este libro. Los factores de distribución se obtienen al dividir la rigidez de un elemento entre la rigidez total de la junta. Para los elementos que cuentan con un extremo lejano fijo, use $K = 4EI/L$; para un elemento con su extremo lejano articulado o soportado por rodillos, use $K = 3EI/L$; para un claro y una carga simétricos, $K = 2EI/L$, y para una carga antisimétrica $K = 6EI/L$. Recuerde que el factor de distribución para un extremo fijo es $DF = 0$, y para un extremo articulado o soportado por rodillos, $DF = 1$.



El uso de traveses con momentos de inercia variables redujo en forma considerable el peso muerto de cada uno de estos claros.

Vigas y marcos con elementos no prismáticos

En este capítulo se aplicarán los métodos de la pendiente-deflexión y de la distribución de momentos para analizar vigas y marcos compuestos por elementos no prismáticos. Primero se estudiará cómo obtener los traslados de factores, los factores de rigidez y los momentos de extremo fijo necesarios. A esto le sigue un análisis relacionado con el uso de valores tabulares que se publican con frecuencia en la literatura de diseño. Por último se estudiará el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas utilizando los métodos de la pendiente-deflexión y de la distribución de momentos.

13.1 Propiedades de carga de los elementos no prismáticos

Con frecuencia, las traveses que se usan en los claros grandes de puentes y edificios se diseñan como vigas no prismáticas, es decir, que deben contar con momentos de inercia variables; lo anterior, con el fin de ahorrar material. Las formas más comunes de los elementos estructurales no prismáticos tienen enriñonados que son escalonados, ahusados o parabólicos, figura 13-1. Siempre que sea posible expresar el momento de inercia del elemento en función de la coordenada x de longitud, se puede usar el principio del trabajo virtual o teorema de Castigliano como se explicó en el capítulo 9 para encontrar su deflexión. Las ecuaciones son

$$\Delta = \int_0^l \frac{Mm}{EI} dx \quad \text{o bien} \quad \Delta = \int_0^l \frac{\partial M}{\partial P} \frac{M}{EI} dx$$

Si la geometría y la carga del elemento requieren la evaluación de una integral que no puede determinarse en forma cerrada, entonces deberá usarse la regla de Simpson o alguna otra técnica numérica para llevar a cabo la integración.

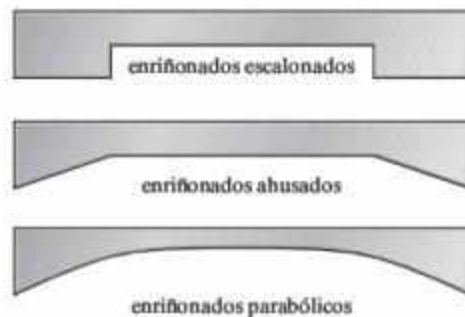


Figura 13-1

Si las ecuaciones de pendiente-deflexión o la distribución de momentos se emplean para determinar las reacciones sobre un elemento no prismático, entonces primero deben calcularse las siguientes propiedades para el elemento.

Momentos de extremo fijo (FEM). Son las reacciones de momento en los extremos del elemento que se supone está fijamente apoyado, figura 13-2a.

Factor de rigidez (K). Es la magnitud del momento que debe aplicarse al extremo del elemento de modo que ese extremo gire a través de un ángulo de $\theta = 1$ rad. Aquí se aplica el momento en el soporte articulado, mientras el otro extremo se supone fijo, figura 13-2b.

Factor de traslado (FTR). Representa la fracción numérica (C) del momento que se “traslada” desde el extremo articulado hasta la pared, figura 13.2c.

Una vez obtenidos, es posible verificar los cálculos de los factores de rigidez y de traslado; en parte, observando una importante relación que existe entre ellos. Al respecto, considere la viga de la figura 13-3 sometida a las cargas y deflexiones que se muestran. La aplicación del teorema recíproco de Maxwell-Betti requiere que el trabajo realizado por las cargas de la figura 13-3a, que actúan a través de los desplazamientos de la figura 13-3b, sea igual al trabajo de las cargas que se muestran en la figura 13-3b, que actúan a través de los desplazamientos de la figura 13-3a, es decir,

$$U_{AB} = U_{BA}$$

$$K_A(0) + C_{AB}K_A(1) = C_{BA}K_B(1) + K_B(0)$$

o bien

$$C_{AB}K_A = C_{BA}K_B \quad (13-1)$$

Por lo tanto, una vez determinados, los factores de rigidez y traspaso deben satisfacer la ecuación 13-1.



El pilón ahusado de concreto se usa para soportar las traveses del puente de esta autopista.

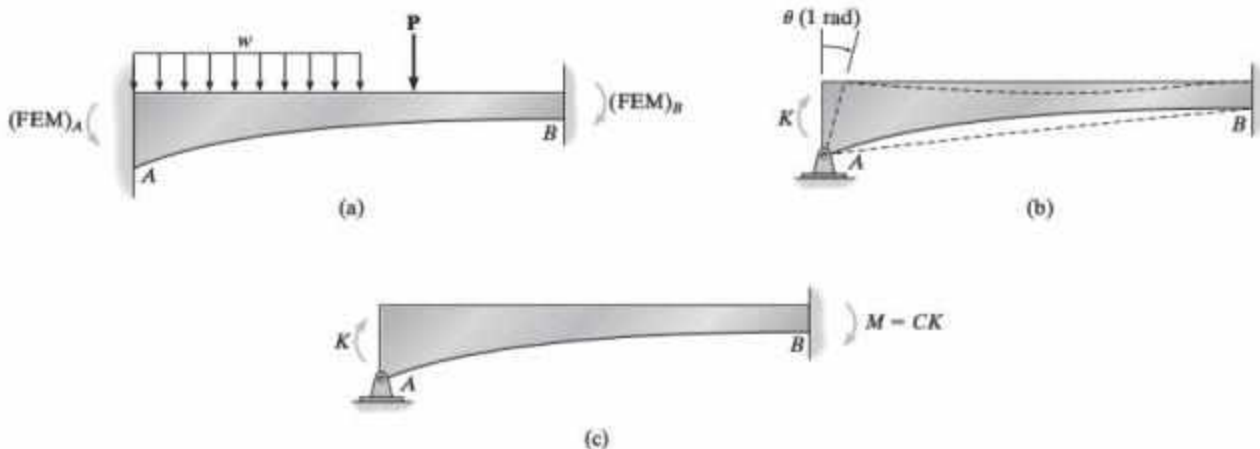


Figura 13-2

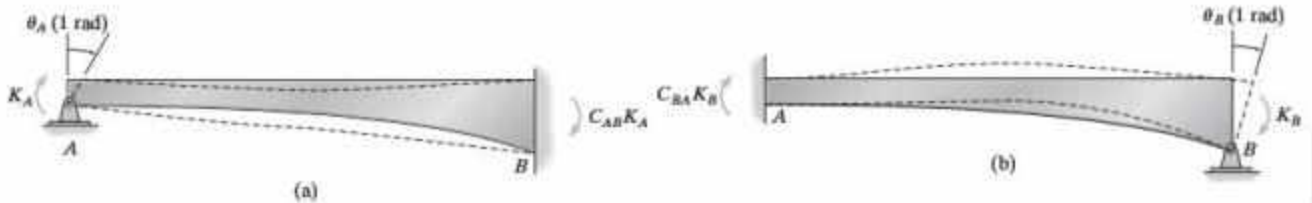


Figura 13-3

Estas propiedades pueden obtenerse usando, por ejemplo, el método de la viga conjugada o un método de energía. Sin embargo, a menudo el proceso implica una considerable cantidad de trabajo. En consecuencia, se han desarrollado gráficas y tablas para determinar estos datos para las formas comunes que se utilizan en el diseño estructural. Una de esas fuentes es el *Handbook of Frame Constants* (Manual de constantes en marcos), publicado por la Portland Cement Association.* En las tablas 13-1 y 13-2 se presenta una parte de esta información tomada de la publicación mencionada. Una forma tabular más completa de estos datos puede encontrarse en el manual de la PCA, junto con las correspondientes deducciones de las fórmulas empleadas.

La nomenclatura se define de la manera siguiente:

a_A, a_B = relación de la longitud del enfiñado en los extremos A y B con la longitud del claro.

b = relación de la distancia desde la carga concentrada hasta el extremo A con la longitud del claro.

C_{AB}, C_{BA} = factores de traslado del elemento AB en los extremos A y B, respectivamente.

h_A, h_B = profundidad del elemento en los extremos A y B, respectivamente.

h_C = profundidad del elemento en la sección mínima.

I_C = momento de inercia de la sección a la profundidad mínima.

k_{AB}, k_{BA} = factor de rigidez en los extremos A y B, respectivamente.

L = longitud del elemento.

M_{AB}, M_{BA} = Momento de extremo fijo en los extremos A y B, respectivamente; se especifica en las tablas para una carga uniforme w o una fuerza concentrada P .

r_A, r_B = relaciones para las secciones transversales rectangulares, donde $r_A = (h_A - h_C)/h_C$, $r_B = (h_B - h_C)/h_C$.

Como se indicó anteriormente, los momentos de extremo fijo y los factores de traslado pueden encontrarse en las tablas. El factor de rigidez absoluta puede determinarse empleando los factores de rigidez tabulados y a partir de las siguientes ecuaciones:

$$K_A = \frac{k_{AB}EI_C}{L} \quad K_B = \frac{k_{BA}EI_C}{L} \quad (13-2)$$

La aplicación del uso de las tablas se ilustrará en el ejemplo 13-1.



Con frecuencia, en la construcción de iglesias se usan los marcos de madera con momentos de inercia variables.

**Handbook of Frame Constants*. Portland Cement Association, Chicago, Illinois.

TABLA 13-1 Enriñonados rectos; ancho constante

Nota: Todos los factores de traslado son negativos y todos los factores de rigidez son positivos.

FEM Carga Concentrada – Coef. $\times PL$

Enriñonado derecho	r_g	FEM Carga Concentrada – Coef. $\times PL$										Carga de enriñonado en									
		Factores de traslado				Factores de rigidez				FEM Carga Unif. Coef. $\times wL^2$		Izquierda		Derecha							
		C_{1A}	C_{2A}	k_{1A}	k_{2A}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	Coef $\times wL^2$	M_{AB}	Coef $\times wL^2$	M_{BA}						
$a_b = 0.3$ $a_g = \text{variable}$ $r_A = 1.0$ $r_b = \text{variable}$																					
0.2	0.4	0.543	0.766	9.19	6.52	0.1194	0.0791	0.0935	0.0034	0.2185	0.0384	0.1955	0.1147	0.0889	0.1601	0.0096	0.0870	0.0133	0.0008	0.0006	0.0058
	0.6	0.576	0.758	9.53	7.24	0.1152	0.0851	0.0934	0.0038	0.2158	0.0422	0.1883	0.1250	0.0798	0.1729	0.0075	0.0898	0.0133	0.0009	0.0005	0.0060
	1.0	0.622	0.748	10.06	8.37	0.1089	0.0842	0.0931	0.0042	0.2118	0.0480	0.1771	0.1411	0.0608	0.1919	0.0047	0.0935	0.0132	0.0011	0.0004	0.0062
	1.5	0.660	0.740	10.52	9.38	0.1037	0.1018	0.0927	0.0047	0.2085	0.0530	0.1678	0.1550	0.0590	0.2078	0.0028	0.0961	0.0130	0.0012	0.0002	0.0064
	2.0	0.684	0.734	10.83	10.09	0.1002	0.1069	0.0924	0.0050	0.2062	0.0565	0.1614	0.1645	0.0487	0.2185	0.0019	0.0974	0.0129	0.0013	0.0001	0.0065
0.3	0.4	0.579	0.741	9.47	7.40	0.1175	0.0822	0.0934	0.0037	0.2164	0.0419	0.1909	0.1225	0.0856	0.1649	0.0100	0.0861	0.0133	0.0009	0.0022	0.0118
	0.6	0.629	0.726	9.98	8.64	0.1120	0.0902	0.0931	0.0042	0.2126	0.0477	0.1808	0.1379	0.0747	0.1807	0.0060	0.0888	0.0132	0.0010	0.0018	0.0124
	1.0	0.705	0.705	10.85	10.85	0.1034	0.0924	0.0924	0.0052	0.2063	0.0577	0.1640	0.1640	0.0577	0.2063	0.0052	0.0924	0.0131	0.0013	0.0013	0.0131
	1.5	0.771	0.689	11.70	13.10	0.0956	0.1157	0.0917	0.0062	0.2002	0.0675	0.1483	0.1892	0.0428	0.2294	0.0033	0.0953	0.0129	0.0015	0.0008	0.0137
	2.0	0.817	0.678	12.33	14.85	0.0901	0.1246	0.0913	0.0069	0.1957	0.0750	0.1368	0.2080	0.0326	0.2455	0.0022	0.0968	0.0128	0.0017	0.0006	0.0141

$a_b = 0.2$ $a_g = \text{variable}$ $r_A = 1.5$ $r_b = \text{variable}$

0.2	0.4	0.569	0.714	7.97	6.35	0.1166	0.0790	0.0966	0.0019	0.2186	0.0377	0.1847	0.1183	0.0821	0.1626	0.0088	0.0873	0.0064	0.0001	0.0006	0.0058
	0.6	0.603	0.707	8.26	7.04	0.1127	0.0858	0.0965	0.0021	0.2163	0.0413	0.1778	0.1288	0.0736	0.1752	0.0068	0.0901	0.0064	0.0001	0.0005	0.0060
	1.0	0.652	0.698	8.70	8.12	0.1089	0.0847	0.0963	0.0023	0.2127	0.0468	0.1675	0.1449	0.0616	0.1940	0.0043	0.0937	0.0064	0.0002	0.0004	0.0062
	1.5	0.691	0.691	9.08	9.08	0.1021	0.1021	0.0962	0.0025	0.2097	0.0515	0.1587	0.1587	0.0515	0.2097	0.0025	0.0962	0.0064	0.0002	0.0002	0.0064
	2.0	0.716	0.686	9.34	9.75	0.0990	0.1071	0.0960	0.0028	0.2077	0.0547	0.1528	0.1681	0.0449	0.2202	0.0017	0.0975	0.0064	0.0002	0.0001	0.0065
0.3	0.4	0.607	0.692	8.21	7.21	0.1148	0.0829	0.0965	0.0021	0.2168	0.0409	0.1801	0.1263	0.0789	0.1674	0.0091	0.0866	0.0064	0.0002	0.0020	0.0118
	0.6	0.659	0.678	8.65	8.40	0.1098	0.0907	0.0964	0.0024	0.2135	0.0464	0.1706	0.1418	0.0688	0.1831	0.0072	0.0892	0.0064	0.0002	0.0017	0.0123
	1.0	0.740	0.660	9.38	10.52	0.1018	0.1037	0.0901	0.0028	0.2078	0.0559	0.1550	0.1678	0.0530	0.2085	0.0047	0.0927	0.0064	0.0002	0.0012	0.0130
	1.5	0.809	0.645	10.00	12.66	0.0947	0.1156	0.0958	0.0033	0.2024	0.0651	0.1403	0.1928	0.0393	0.2311	0.0029	0.0950	0.0063	0.0003	0.0008	0.0137
	2.0	0.857	0.636	10.62	14.32	0.0897	0.1242	0.0955	0.0038	0.1985	0.0720	0.1296	0.2119	0.0299	0.2469	0.0020	0.0968	0.0063	0.0003	0.0005	0.0141

TABLA 13-2 Enriñonados parabólicos; ancho constante

Notas: Todos los factores de traslado son negativos y todos los factores de rigidez son positivos.

FEM Carga Concentrada - Coef. $\times R$

Enriñonado derecho α_2 r_2	FEM Carga Concentrada - Coef. $\times R$										Carga de enriñonado en										
	a					b					Izquierda		Derecha								
	Factores de traslado		Factores de rigidez		FEM Carga Univ. Coef $\times wL^2$	0.1		0.3		0.5		0.7		0.9		FEM Coef $\times wL^2$	FEM M_{AB}				
0.2	0.4	0.558	0.627	6.08	5.40	0.1022	0.0841	0.0938	0.0033	0.1891	0.0902	0.1572	0.1261	0.0715	0.1618	0.0073	0.0877	0.0032	0.0001	0.0002	0.0030
	0.6	0.582	0.624	6.21	5.80	0.0995	0.0887	0.0936	0.0036	0.1872	0.0905	0.1527	0.1339	0.0663	0.1708	0.0058	0.0902	0.0032	0.0001	0.0002	0.0031
	1.0	0.619	0.619	6.41	6.41	0.0956	0.0956	0.0935	0.0038	0.1844	0.0984	0.1459	0.1459	0.0584	0.1844	0.0038	0.0985	0.0032	0.0001	0.0001	0.0032
	1.5	0.649	0.614	6.59	6.97	0.0921	0.1015	0.0933	0.0041	0.1819	0.0928	0.1399	0.1563	0.0518	0.1962	0.0025	0.0958	0.0032	0.0001	0.0001	0.0032
	2.0	0.671	0.611	6.71	7.38	0.0899	0.1056	0.0932	0.0044	0.1801	0.0960	0.1358	0.1638	0.0472	0.2042	0.0017	0.0971	0.0032	0.0001	0.0000	0.0033
0.3	0.4	0.588	0.616	6.22	5.93	0.1002	0.0877	0.0937	0.0035	0.1873	0.0937	0.1532	0.1339	0.0678	0.1686	0.0073	0.0877	0.0032	0.0001	0.0007	0.0063
	0.6	0.625	0.609	6.41	6.38	0.0966	0.0942	0.0935	0.0039	0.1845	0.0927	0.1467	0.1455	0.0609	0.1808	0.0057	0.0902	0.0032	0.0001	0.0005	0.0065
	1.0	0.683	0.598	6.73	7.68	0.0911	0.1042	0.0932	0.0044	0.1801	0.0969	0.1365	0.1643	0.0502	0.2000	0.0037	0.0936	0.0031	0.0001	0.0004	0.0068
	1.5	0.735	0.589	7.02	8.76	0.0862	0.1133	0.0929	0.0050	0.1760	0.0946	0.1272	0.1819	0.0410	0.2170	0.0023	0.0959	0.0031	0.0001	0.0003	0.0070
	2.0	0.772	0.582	7.25	9.61	0.0827	0.1198	0.0927	0.0054	0.1730	0.0905	0.1203	0.1951	0.0345	0.2293	0.0016	0.0972	0.0031	0.0001	0.0002	0.0072
0.5	0.4	0.488	0.807	9.85	5.97	0.1214	0.0753	0.0929	0.0034	0.2131	0.0371	0.2021	0.1061	0.0979	0.1506	0.0105	0.0863	0.0171	0.0017	0.0003	0.0030
	0.6	0.515	0.803	10.10	6.45	0.1183	0.0795	0.0928	0.0036	0.2110	0.0404	0.1969	0.1126	0.0917	0.1600	0.0083	0.0892	0.0170	0.0018	0.0002	0.0030
	1.0	0.547	0.796	10.51	7.22	0.1138	0.0865	0.0926	0.0040	0.2079	0.0448	0.1890	0.1245	0.0809	0.1740	0.0056	0.0928	0.0168	0.0020	0.0001	0.0031
	1.5	0.571	0.786	10.90	7.90	0.1093	0.0922	0.0923	0.0043	0.2055	0.0485	0.1818	0.1344	0.0719	0.1862	0.0035	0.0951	0.0167	0.0021	0.0001	0.0032
	2.0	0.590	0.784	11.17	8.40	0.1063	0.0961	0.0922	0.0046	0.2041	0.0506	0.1764	0.1417	0.0661	0.1948	0.0025	0.0968	0.0166	0.0022	0.0001	0.0032
0.5	0.4	0.554	0.753	10.42	7.66	0.1170	0.0811	0.0926	0.0040	0.2087	0.0442	0.1924	0.1205	0.0898	0.1595	0.0107	0.0853	0.0169	0.0020	0.0002	0.0145
	0.6	0.606	0.730	10.96	9.12	0.1115	0.0889	0.0922	0.0046	0.2045	0.0506	0.1820	0.1360	0.0791	0.1738	0.0066	0.0878	0.0167	0.0022	0.0002	0.0152
	1.0	0.694	0.684	12.03	12.03	0.1025	0.1025	0.0915	0.0057	0.1970	0.0626	0.1639	0.1639	0.0626	0.1970	0.0057	0.0915	0.0164	0.0028	0.0001	0.0164
	1.5	0.781	0.664	13.12	15.47	0.0937	0.1163	0.0908	0.0070	0.1891	0.0759	0.1456	0.1939	0.0479	0.2187	0.0039	0.0940	0.0160	0.0034	0.0021	0.0174
	2.0	0.850	0.642	14.09	18.64	0.0870	0.1275	0.0901	0.0082	0.1825	0.0877	0.1307	0.2193	0.0376	0.2348	0.0027	0.0957	0.0157	0.0039	0.0016	0.0181

13.2 Distribución de momentos para estructuras con elementos no prismáticos

Una vez que se han determinado los momentos de extremo fijo y los factores de rigidez y traslado para los elementos no prismáticos de una estructura, la aplicación del método de distribución de momentos sigue el mismo procedimiento que se describió en el capítulo 12. Al respecto, recuerde que la distribución de momentos puede acortarse al modificar el factor de rigidez de un elemento para tomar en cuenta las condiciones de los extremos del claro con soporte articulado y la simetría o antisimetría de la estructura. En los elementos no prismáticos también pueden hacerse modificaciones similares.

Viga articulada en el extremo lejano. Considere la viga de la figura 13-4a, la cual está articulada en su extremo lejano B . El factor de rigidez absoluta K'_A es el momento aplicado en A de modo que la viga en A gire $\theta_A = 1$ rad y puede determinarse de la siguiente manera. En primer lugar suponga que B está temporalmente fijo y que se aplica un momento K_A en A , figura 13-4b. El momento inducido en B es $C_{AB}K_A$, donde C_{AB} es el factor de traslado de A a B . En segundo lugar, como B no está fijo, la aplicación del momento opuesto $C_{AB}K_A$ sobre la viga, figura 13-4c, inducirá un momento $C_{BA}C_{AB}K_A$ en el extremo A . Mediante la superposición, el resultado de estas dos aplicaciones de momento ocasiona que la viga esté cargada como se muestra en la figura 13-4a. Por lo tanto, puede verse que el factor de rigidez absoluta de la viga en A es

$$K'_A = K_A(1 - C_{AB}C_{BA}) \quad (13-3)$$

Aquí K_A es el factor de rigidez absoluta de la viga, suponiendo que está fija en el extremo B . Por ejemplo, en el caso de una viga prismática, $K_A = 4EI/L$ y $C_{AB} = C_{BA} = \frac{1}{2}$. Al sustituir en la ecuación 13-3 se obtiene $K'_A = 3EI/L$, que es igual a la ecuación 12-4.

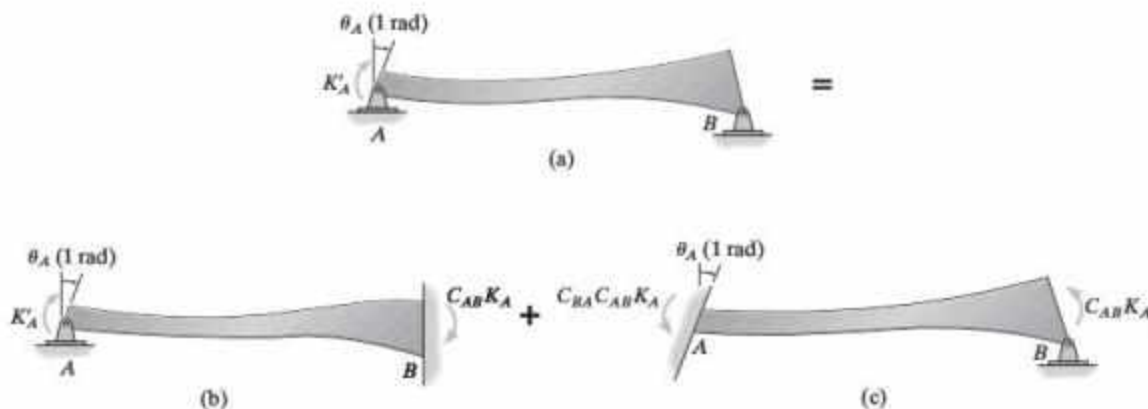


Figura 13-4

Viga y carga simétricas. En este caso es necesario determinar el momento K'_A necesario para girar el extremo A , $\theta_A = +1$ rad, mientras que $\theta_B = -1$ rad, figura 13-5a. Aquí primero se supone que el extremo B está fijo y se aplica el momento K_A en A , figura 13-5b. Después se aplica un momento K_B negativo sobre el extremo B suponiendo que el extremo A está fijo. Lo anterior resulta en un momento $C_{BA}K_B$ en el extremo A como se muestra en la figura 13-5c. Al superponer estas dos aplicaciones de momento en A se obtienen los resultados de la figura 13-5a. Se requiere

$$K'_A = K_A - C_{BA}K_B$$

Con base en la ecuación 13-1 ($C_{BA}K_B = C_{AB}K_A$), también es posible escribir

$$K'_A = K_A(1 - C_{AB}) \quad (13-4)$$

En el caso de una viga prismática, $K_A = 4EI/L$ y $C_{AB} = \frac{1}{2}$, de modo que $K'_A = 2EI/L$, lo cual es igual a la ecuación 12-5.

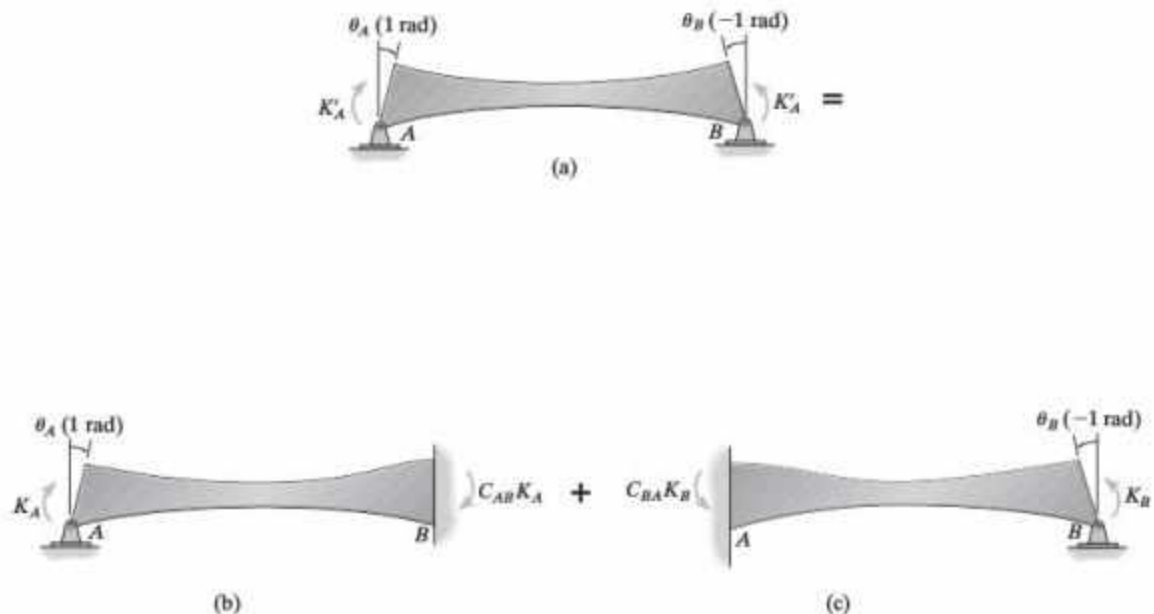


Figura 13-5

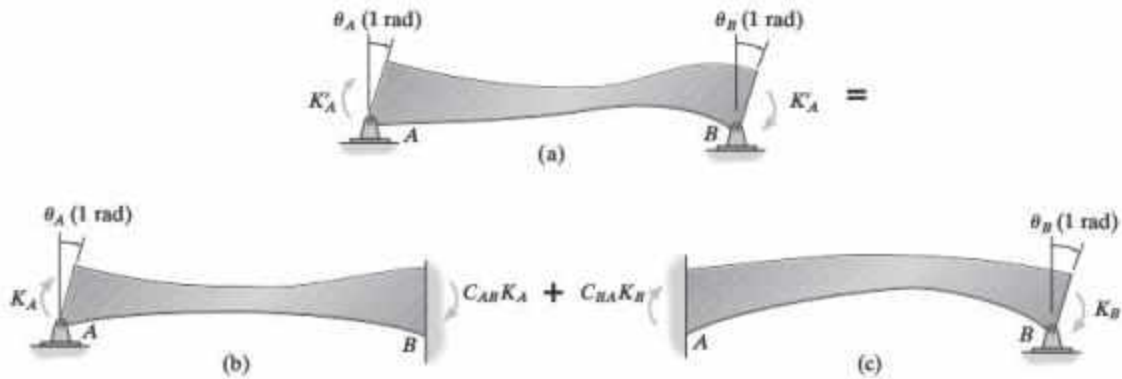


Figura 13-6

Viga simétrica con carga antisimétrica. En el caso de una viga simétrica con carga antisimétrica, es necesario determinar K'_A de modo que ocurra una rotación igual en los extremos de la viga, figura 13-6a. Para hacer esto, primero se fija el extremo B y se aplica el momento K_A en A , figura 13-6b. Del mismo modo, en la figura 13-6c se muestra la aplicación de K_B en el extremo B en tanto que el extremo A se mantiene fijo. Al superponer los dos casos se obtienen los resultados de la figura 13-6a. Por lo tanto,

$$K'_A = K_A + C_{BA}K_B$$

o, si se usa la ecuación 13-1 ($C_{BA}K_B = C_{AB}K_A$), resulta que para la rigidez absoluta

$$K'_A = K_A(1 + C_{AB}) \quad (13-5)$$

Al sustituir los datos para un elemento prismático, $K_A = 4EI/L$ y $C_{AB} = \frac{1}{2}$, se obtiene $K'_A = 6EI/L$, lo cual es igual a la ecuación 12-6.

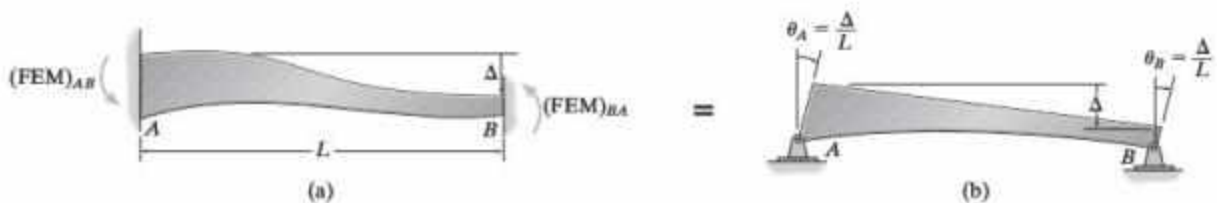


Figura 13-7

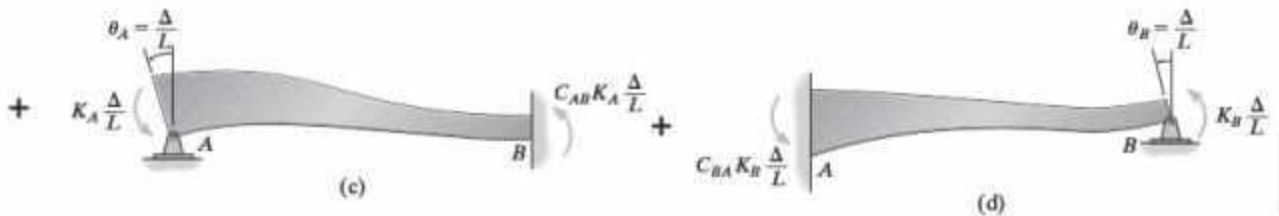


Figura 13-7

Traslación relativa de una junta en una viga. Los momentos de extremo fijo se desarrollan en un elemento no prismático si éste tiene una traslación relativa de una junta Δ entre sus extremos A y B , figura 13-7a. Para determinar estos momentos se procede de la manera siguiente. En primer lugar, considere que los extremos A y B están articulados y que el extremo B de la viga se desplaza una distancia Δ de tal manera que las rotaciones de los extremos son $\theta_A = \theta_B = \Delta/L$, figura 13-7b. En segundo lugar, suponga que B está fijo y aplique un momento de $M'_A = -K_A(\Delta/L)$ sobre el extremo A de manera que el extremo gire $\theta_A = -\Delta/L$, figura 13-7c. En tercer lugar, suponga que A está fijo y aplique un momento $M'_B = -K_B(\Delta/L)$ al extremo B de modo que éste gire $\theta_B = -\Delta/L$, figura 13-7d. Como la suma total de estas tres operaciones genera la condición que se muestra en la figura 13-7a, se tiene que en A

$$(\text{FEM})_{AB} = -K_A \frac{\Delta}{L} - C_{BA} K_B \frac{\Delta}{L}$$

Al aplicar la ecuación 13-1 ($C_{BA}K_B = C_{AB}K_A$) se obtiene

$$(\text{FEM})_{AB} = -K_A \frac{\Delta}{L} (1 + C_{AB}) \quad (13-6)$$

Para el extremo B puede escribirse una expresión similar. Recuerde que para que un elemento prismático $K_A = 4EI/L$ y $C_{AB} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto $(\text{FEM})_{AB} = -6EI\Delta/L^2$, lo cual es igual a la ecuación 11-5.

Si el extremo B está articulado en vez de fijo, figura 13-8, el momento de extremo fijo en A puede determinarse de una manera similar a la descrita anteriormente. El resultado es

$$(\text{FEM})'_{AB} = -K_A \frac{\Delta}{L} (1 - C_{AB}C_{BA}) \quad (13-7)$$



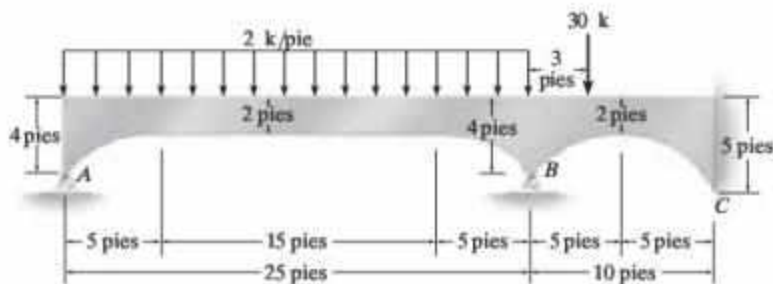
Figura 13-8

Aquí puede verse que, para un elemento prismático, esta ecuación da $(\text{FEM})'_{AB} = -3EI\Delta/L^2$, la cual es igual a la que aparece en el interior de la contraportada.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación del método de distribución de momentos en estructuras que tienen elementos no prismáticos. Una vez que se han determinado los momentos de extremo fijo y los factores de rigidez y de traspaso, y que se ha modificado el factor de rigidez de acuerdo con las ecuaciones dadas anteriormente, el procedimiento de análisis es igual al descrito en el capítulo 12.

EJEMPLO 13.1

Determine los momentos internos en los soportes de la viga que se muestra en la figura 13-9a. La viga tiene un espesor de 1 pie y E es constante.



(a)

Figura 13-9**SOLUCIÓN**

Como los enrijonados son parabólicos, se utilizará la tabla 13-2 para obtener las propiedades de la distribución de momentos de la viga.

Claro AB

$$a_A = a_B = \frac{5}{25} = 0.2 \quad r_A = r_B = \frac{4-2}{2} = 1.0$$

Conformando estas relaciones en la tabla 13-2, se encuentra que

$$C_{AB} = C_{BA} = 0.619$$

$$k_{AB} = k_{BA} = 6.41$$

A partir de las ecuaciones 13-2,

$$K_{AB} = K_{BA} = \frac{kEI_C}{L} = \frac{6.41E\left(\frac{1}{12}\right)(1)(2)^3}{25} = 0.171E$$

Como el extremo lejano del claro BA está articulado, se modificará el factor de rigidez de BA mediante la ecuación 13-3. Se tiene

$$K'_{BA} = K_{BA}(1 - C_{AB}C_{BA}) = 0.171E[1 - 0.619(0.619)] = 0.105E$$

Con base en la tabla 13-2, para la carga uniforme

$$(FEM)_{AB} = -(0.0956)(2)(25)^2 = -119.50 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{BA} = 119.50 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Claro BC

$$a_B = a_C = \frac{5}{10} = 0.5 \quad r_B = \frac{4-2}{2} = 1.0$$

$$r_C = \frac{5-2}{2} = 1.5$$

En la tabla 13-2 se encuentra que

$$C_{BC} = 0.781 \quad C_{CB} = 0.664$$

$$k_{BC} = 13.12 \quad k_{CB} = 15.47$$

Por lo tanto, a partir de las ecuaciones 13-2,

$$K_{BC} = \frac{kEI_C}{L} = \frac{13.12E\left(\frac{1}{12}\right)(1)(2)^3}{10} = 0.875E$$

$$K_{CB} = \frac{kEI_C}{L} = \frac{15.47E\left(\frac{1}{12}\right)(1)(2)^3}{10} = 1.031E$$

Para la carga concentrada,

$$b = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$(FEM)_{BC} = -0.1891(30)(10) = -56.73 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$(FEM)_{CB} = 0.0759(30)(10) = 22.77 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Si se emplean los valores anteriores para los factores de rigidez, se calculan los factores de distribución y se introducen en la tabla, figura 13-9b. La distribución de momentos sigue el mismo procedimiento descrito en el capítulo 12. Los resultados en k · pie se muestran en la última fila de la tabla.

Junta	A	B		C
Elemento	AB	BA	BC	CB
K	0.171E	0.105E	0.875E	1.031E
DF	1	0.107	0.893	0
FTR	0.619	0.619	0.781	0.664
FEM	-119.50	119.50	-56.73	22.77
Dist.	119.50	-6.72	-56.05	
TR		73.97		-43.78
Dist.		-7.91	-66.06	
TR				-51.59
ΣM	0	178.84	-178.84	-72.60

(b)

Figura 13-9

13.3 Ecuaciones de pendiente-deflexión para elementos no prismáticos

Las ecuaciones de pendiente-deflexión para elementos prismáticos se desarrollaron en el capítulo 11. En esta sección se generalizará la forma de estas ecuaciones para que también se apliquen a los elementos no prismáticos. Para ello se utilizarán los resultados de la sección anterior y se procederá a formular las ecuaciones de la misma manera que se hizo en el capítulo 11; es decir, considerando los efectos causados por las cargas, el desplazamiento relativo de las juntas y la rotación de cada junta por separado, para después superponer los resultados.

Cargas. Las cargas se especifican por los momentos de extremo fijo $(FEM)_{AB}$ y $(FEM)_{BA}$ que actúan en los extremos A y B del claro. Los momentos positivos actúan en sentido horario.

Traslación relativa de las juntas. Cuando ocurre un desplazamiento relativo entre las juntas, los momentos inducidos se determinan a partir de la ecuación 13-6. En el extremo A este momento es $-[K_A \Delta/L](1 + C_{AB})$ y en el extremo B es $-[K_B \Delta/L](1 + C_{BA})$.

Rotación en A . Si el extremo A gira θ_A , el momento requerido en el punto A del claro es $K_A \theta_A$. Además, esto induce a un momento de $C_{AB} K_A \theta_A = C_{BA} K_B \theta_A$ en el extremo B .

Rotación en B . Si el extremo B gira θ_B , un momento de $K_B \theta_B$ debe actuar en el extremo B , y el momento inducido en el extremo A es $C_{BA} K_B \theta_B = C_{AB} K_A \theta_B$.

Los momentos extremos totales causados por estos efectos producen las ecuaciones de pendiente-deflexión generalizadas que, por lo tanto, pueden escribirse como

$$M_{AB} = K_A \left[\theta_A + C_{AB} \theta_B - \frac{\Delta}{L} (1 + C_{AB}) \right] + (FEM)_{AB}$$

$$M_{BA} = K_B \left[\theta_B + C_{BA} \theta_A - \frac{\Delta}{L} (1 + C_{BA}) \right] + (FEM)_{BA}$$

Como estas dos ecuaciones son similares, pueden expresarse como una sola ecuación. Si se denomina a uno de los extremos del claro como el extremo cercano (N), y al otro como el extremo lejano (F), y además se representa la rotación del elemento como $\psi = \Delta/L$, se tiene

$$M_N = K_N (\theta_N + C_N \theta_F - \psi (1 + C_N)) + (FEM)_N \quad (13-8)$$

Aquí

M_N = momento interno en el extremo cercano del claro; este momento es positivo cuando actúa sobre el claro en sentido horario.

K_N = rigidez absoluta del extremo cercano, determinada a partir de las tablas o por medio de cálculos.

θ_N, θ_F = pendientes del extremo cercano y del extremo lejano del claro en los soportes; los ángulos se miden en *radianes* y son *positivos en sentido horario*.

ψ = rotación de la cuerda del claro debida a un desplazamiento lineal, $\psi = \Delta/L$; este ángulo se mide en *radianes* y es *positivo en sentido horario*.

$(FEM)_N$ = momento de extremo fijo en el soporte del extremo cercano; el momento es *positivo* cuando actúa en sentido horario sobre el claro y se obtiene a partir de las tablas o por medio de cálculos.

La aplicación de la ecuación sigue el mismo procedimiento que se describió en el capítulo 11 y, por lo tanto, no se analizará aquí. En particular, tenga en cuenta que la ecuación 13-8 se reduce a la ecuación 11-8 cuando se aplica a elementos que son prismáticos.



A menudo las construcciones metálicas ligeras se diseñan utilizando marcos con elementos que tienen momentos de inercia variables.



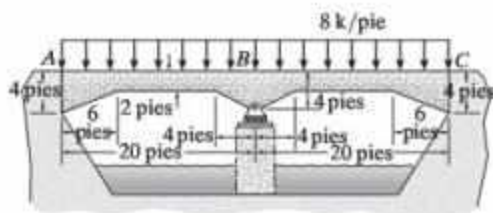
Puente carretero continuo de concreto reforzado.

PROBLEMAS

13

13-1. Determine los momentos en A , B y C por el método de la distribución de momentos. Suponga que los soportes en A y C son fijos y que el soporte de rodillos en B está en una base rígida. La viga tiene un espesor de 4 pies. Use la tabla 13-1. E es constante. Los enrijonados son rectos.

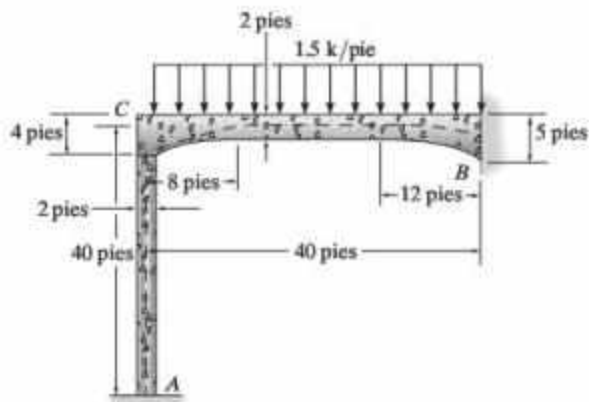
13-2. Resuelva el problema 13-1 usando las ecuaciones de pendiente-deflexión.



Probs. 13-1/13-2

13-3. Aplique el método de distribución de momentos para determinar el momento en cada junta del marco parabólico enrijonado. Los soportes A y B son fijos. Use la tabla 13-2. Cada uno de los elementos tiene 1 pie de espesor. E es constante.

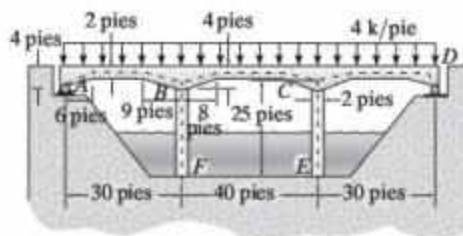
***13-4.** Resuelva el problema 13-3 usando las ecuaciones de pendiente-deflexión.



Probs. 13-3/13-4

13-5. Use el método de la distribución de momentos para determinar el momento en cada junta del marco simétrico para puente. Los soportes en F y E son fijos y B y C están conectados fijamente. Use la tabla 13-2. Suponga que E es constante y que cada elemento tiene 1 pie de espesor.

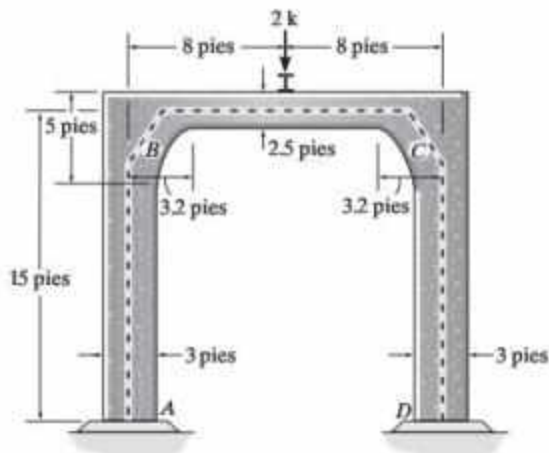
13-6. Resuelva el problema 13-5 usando las ecuaciones de pendiente-deflexión.



Probs. 13-5/13-6

13-7. Aplique el método de la distribución de momentos para determinar el momento en cada junta del marco simétrico parabólico enrijonado. Los soportes A y D son fijos. Use la tabla 13-2. Cada elemento tiene 1 pie de espesor. E es constante.

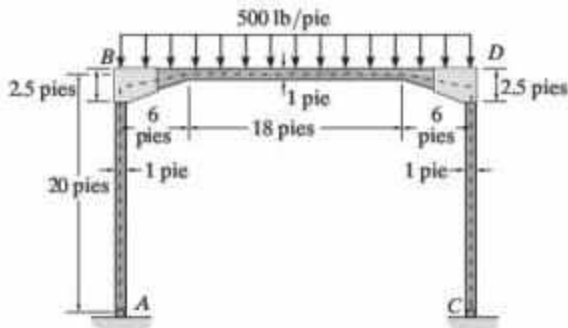
***13-8.** Resuelva el problema 13-7 usando las ecuaciones de pendiente-deflexión.



Probs. 13-7/13-8

13-9. Use el método de la distribución de momentos para determinar el momento en cada junta del marco. Los soportes en *A* y *C* están articulados en las juntas, y *B* y *D* están conectados fijamente. Suponga que *E* es constante y que los elementos tienen un espesor de 1 pie. Los enriñonados son rectos, por lo que puede usar la tabla 13-1.

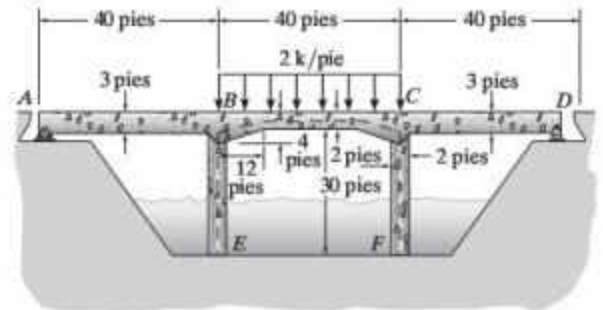
13-10. Resuelva el problema 13-9 usando las ecuaciones de pendiente-deflexión.



Probs. 13-9/13-10

13-11. Use el método de la distribución de momentos para determinar el momento en cada junta del marco simétrico para puente. Los soportes *F* y *E* son fijos y *B* y *C* están conectados fijamente. Los enriñonados son rectos, por lo que puede emplear la tabla 13-2. Suponga que *E* es constante y que los elementos tienen 1 pie de espesor.

***13-12.** Resuelva el problema 13-11 usando las ecuaciones de pendiente-deflexión.



Probs. 13-11/13-12

REPASO DEL CAPÍTULO

Los elementos no prismáticos que tienen momentos de inercia variables se usan con frecuencia en puentes y marcos de construcción con claros amplios a fin de ahorrar material.

El análisis estructural que incluye elementos no prismáticos puede realizarse empleando las ecuaciones de pendiente-deflexión o la distribución de momentos. Al hacer esto, se vuelve necesario obtener los momentos de extremo fijo, los factores de rigidez y los factores de traslado para el elemento. Una forma de obtener estos valores consiste en usar el método de la viga conjugada, aunque el trabajo es algo tedioso. También es posible obtener estos valores a partir de datos tabulados, como los publicados por la Portland Cement Association.

Si se usa el método de la distribución de momentos, entonces el proceso puede simplificarse al modificar la rigidez de algunos de los elementos.



El análisis de la armadura espacial en estas torres de transmisión eléctrica puede realizarse utilizando el método de la rigidez.

Análisis de armaduras utilizando el método de la rigidez

En este capítulo se explicarán los fundamentos básicos del uso del método de la rigidez para el análisis de estructuras. Se mostrará que la aplicación de este método, aunque tediosa para hacerlo manualmente, resulta muy adecuada para su uso en computadora. Se proporcionarán ejemplos de aplicaciones específicas en armaduras planas. El método se ampliará para incluir el análisis de armaduras espaciales. Las vigas y estructuras armadas se estudiarán en los próximos capítulos.

14.1 Fundamentos del método de la rigidez

En esencia, hay dos formas de analizar las estructuras utilizando métodos matriciales. El método de la rigidez, que se usará en éste y los siguientes capítulos, es un método de análisis del desplazamiento. Para analizar las estructuras también puede emplearse un método de fuerza, llamado el método de la flexibilidad, como se indica en la sección 9-1; sin embargo, tal método no se presenta en este texto. Existen varias razones para ello, la más importante es que el método de la rigidez puede usarse tanto para analizar estructuras estáticamente determinadas como indeterminadas, mientras que el método de la flexibilidad requiere un procedimiento diferente para cada uno de estos dos casos. Inclusive, del método de la rigidez se obtienen los desplazamientos y las fuerzas de forma directa, mientras que con el método de la flexibilidad, los desplazamientos no se obtienen de esa manera. Además, por lo general es mucho más fácil formular las matrices necesarias para realizar las operaciones en computadora mediante el método de la rigidez; y una vez hecho esto, los cálculos en computadora pueden realizarse de modo eficiente.

La aplicación del método de la rigidez requiere subdividir la estructura en una serie de *elementos finitos* discretos e identificar sus puntos extremos como *nodos*. Para el análisis de la armadura, los elementos finitos se representan mediante cada uno de los elementos que la componen y los nodos representan las juntas. Se determinan las propiedades de la fuerza-desplazamiento en cada elemento y después se relacionan entre sí usando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas escritas en los nodos. Luego estas relaciones, para toda la estructura, se agrupan en lo que se denomina *matriz de rigidez de la estructura* **K**. Una vez establecido esto, se pueden determinar los desplazamientos desconocidos de los nodos para cualquier carga dada sobre la estructura. Al conocer estos desplazamientos pueden calcularse las fuerzas externas e internas en la estructura utilizando las relaciones de fuerza-desplazamiento para cada elemento.

Antes de desarrollar un procedimiento formal para aplicar el método de la rigidez, es necesario establecer primero algunas definiciones y conceptos preliminares.

Identificación del elemento y el nodo. Uno de los primeros pasos para aplicar el método de la rigidez consiste en identificar los elementos o miembros de la estructura y sus nodos. Cada elemento se especificará por un número encerrado en un cuadrado, y para identificar los nodos se usará un número dentro de un círculo. También se identificarán los extremos “cercano” y “lejano” de cada elemento mediante una flecha indicada a lo largo del elemento, con la punta de la flecha dirigida hacia el extremo lejano. En la figura 14-1a se muestran algunos ejemplos con la identificación del elemento, el nodo y la “dirección” para una armadura. Estas asignaciones se hicieron de manera arbitraria.*

Coordenadas global y del elemento. Dado que las cargas y los desplazamientos son cantidades vectoriales, es necesario establecer un sistema de coordenadas a fin de precisar el sentido correcto de la dirección. Aquí se usarán dos tipos diferentes de sistemas coordinados. Se usará un *sistema de coordenadas de la estructura o global* x, y , el cual es único, y sirve para especificar el sentido de cada uno de los componentes de la fuerza externa y el desplazamiento en los nodos, figura 14-1a. Se empleará un *sistema de coordenadas locales o del elemento* para especificar el sentido de dirección de sus desplazamientos y las cargas *internas* en el elemento. Este sistema se identificará con ejes x', y' con el origen en el nodo “cercano” y el eje x' extendiéndose hacia el nodo “lejano”. En la figura 14-1b se muestra un ejemplo para el elemento 4 de la armadura.

*Para vigas grandes, las manipulaciones matriciales usando **K** resultan ser más eficientes si se emplea una numeración selectiva de los elementos en un patrón de onda, es decir, comenzando desde la parte superior hasta la parte inferior y después de abajo hacia arriba, etcétera.

Indeterminación cinemática. Como se explicó en la sección 11-1, los grados de libertad no restringidos para una armadura representan las incógnitas primarias de cualquier método de desplazamiento, y por lo tanto éstos deben identificarse. Como regla general hay dos grados de libertad, o dos posibles desplazamientos, para cada junta (nodo). Para su aplicación, cada grado de libertad se especificará sobre la armadura mediante un código numérico, mostrado en la junta o nodo, y se referirá a su dirección coordenada global positiva con una flecha asociada. Por ejemplo, la armadura de la figura 14-1a tiene ocho grados de libertad, los cuales se han identificado mediante los "códigos" del 1 al 8, como se muestra. La armadura es cinemáticamente indeterminada de quinto grado debido a estos ocho posibles desplazamientos: del 1 al 5 representan *grados de libertad* desconocidos o *sin restricciones*, y del 6 al 8 representan *grados de libertad restringidos*. Debido a las restricciones, aquí los desplazamientos son iguales a cero. Para futuras aplicaciones, los números de código más bajo se usarán siempre para identificar los desplazamientos desconocidos (*grados de libertad no restringidos*), y los números de código más alto se utilizarán para identificar los desplazamientos conocidos (*grados de libertad restringidos*). La razón para elegir este método de identificación tiene que ver con la comodidad posterior al dividir la matriz de rigidez de la estructura, de modo que los desplazamientos desconocidos se puedan encontrar de forma más directa.

Una vez etiquetada la armadura y especificados los números de código, se puede determinar la matriz de rigidez de la estructura \mathbf{K} . Para hacer esto primero debe establecerse una *matriz de rigidez del elemento* \mathbf{k}' para cada elemento de la armadura. Esta matriz se usa para expresar las relaciones de carga-desplazamiento del elemento en términos de las *coordenadas locales*. Puesto que no todos los elementos de la armadura están en la misma dirección, se debe desarrollar una manera de transformar estas cantidades desde el sistema local de coordenadas x', y' de cada elemento al sistema de coordenadas x, y , de la estructura global. Esto puede hacerse empleando *matrices de transformación de la fuerza y el desplazamiento*. Una vez establecidos, los elementos de la matriz de rigidez del elemento se transforman de las coordenadas locales a las globales, y luego se juntan para crear la matriz de rigidez de la estructura. Si se usa \mathbf{K} , como se estableció anteriormente, es posible determinar primero los desplazamientos del nodo para después encontrar las reacciones en los soportes y las fuerzas de los elementos. Ahora se trabajará en el desarrollo de este método.

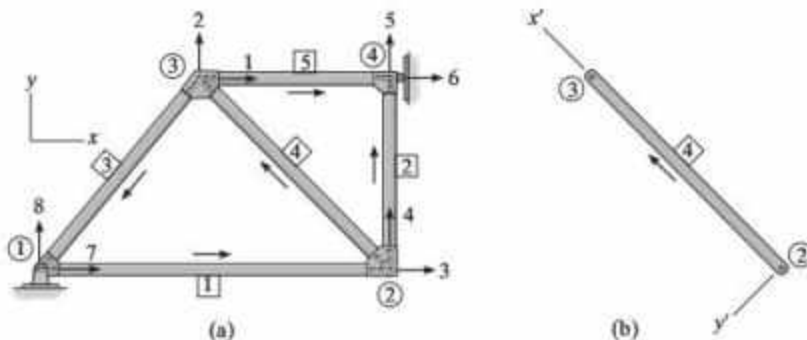


Figura 14-1

14.2 Matriz de rigidez del elemento

En esta sección se establecerá la matriz de rigidez para un solo elemento de una armadura con coordenadas locales x' , y' , orientadas como se muestra en la figura 14-2. Los términos de esta matriz representan las relaciones de carga-desplazamiento para el elemento.

Un elemento de una armadura sólo puede desplazarse a lo largo de su eje (eje x') puesto que las cargas se aplican a lo largo de ese eje. Por lo tanto, pueden ocurrir dos desplazamientos independientes. Cuando se impone un desplazamiento positivo d_N sobre el extremo cercano del elemento, mientras el extremo lejano se mantiene articulado, figura 14-2a, las fuerzas desarrolladas en los extremos de los elementos son

$$q'_N = \frac{AE}{L} d_N \quad q'_F = -\frac{AE}{L} d_N$$

Observe que q'_F es negativa porque para lograr el equilibrio actúa en la dirección negativa x' . Del mismo modo, un desplazamiento positivo d_F en el extremo lejano, que mantiene al extremo cercano articulado, figura 14-2b, resulta en las siguientes fuerzas de elemento

$$q''_N = -\frac{AE}{L} d_F \quad q''_F = \frac{AE}{L} d_F$$

Por superposición, figura 14-2c, las fuerzas resultantes causadas por ambos desplazamientos son

$$q_N = \frac{AE}{L} d_N - \frac{AE}{L} d_F \quad (14-1)$$

$$q_F = -\frac{AE}{L} d_N + \frac{AE}{L} d_F \quad (14-2)$$

Estas ecuaciones de carga-desplazamiento pueden escribirse en forma matricial* como

$$\begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{bmatrix}$$

o bien

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{d} \quad (14-3)$$

donde

$$\mathbf{k}' = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (14-4)$$

Esta matriz, \mathbf{k}' , se denomina *matriz de rigidez del elemento*, y tiene la misma forma para cada elemento de la armadura. Los cuatro elementos que la componen se llaman *coeficientes de influencia de la rigidez del elemento*, k'_{ij} . Físicamente, k'_{ij} representa la fuerza en la junta i cuando se

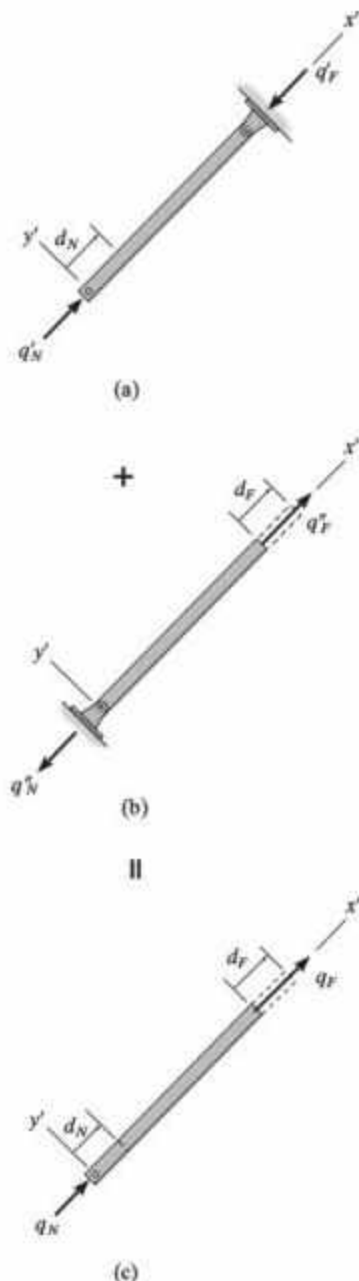


Figura 14-2

*En el Apéndice A, se hace un repaso de álgebra matricial.

imponer un *desplazamiento unitario* en la junta j . Por ejemplo, si $i = j = 1$, entonces k'_{11} es la fuerza en la junta cercana cuando la junta lejana se mantiene fija, y la junta cercana experimenta un desplazamiento de $d_N = 1$, es decir,

$$q_N = k'_{11} = \frac{AE}{L}$$

Del mismo modo, la fuerza en la junta lejana se determina a partir de $i = 2$, $j = 1$, por lo que

$$q_F = k'_{21} = -\frac{AE}{L}$$

Estos dos términos representan la primera columna de la matriz de rigidez del elemento. De la misma manera, la segunda columna de esta matriz representa las fuerzas en el elemento sólo cuando el extremo lejano del elemento experimenta un desplazamiento unitario.

14.3 Matrices de transformación de fuerza y desplazamiento

Como una armadura está compuesta de muchos elementos (miembros), ahora se desarrollará un método para transformar las fuerzas \mathbf{q} del elemento y los desplazamientos \mathbf{d} definidos en coordenadas locales a coordenadas globales. A fin de establecer una convención, se considerará que las coordenadas globales x positivas están a la derecha y las coordenadas y positivas hacia arriba. Los ángulos menores entre los ejes globales x, y , positivos, y el eje local x' positivo se definirán como θ_x y θ_y , tal como se muestra en la figura 14-3. Los cosenos de estos ángulos se usarán en el análisis matricial que sigue. Éstos se identificarán como $\lambda_x = \cos \theta_x$, $\lambda_y = \cos \theta_y$. Los valores numéricos para λ_x y λ_y pueden generarse fácilmente por computadora una vez que se han especificado las coordenadas x, y del extremo cercano N y del extremo lejano F del elemento. Por ejemplo, considere el elemento NF de la armadura que se muestra en la figura 14-4. Aquí, las coordenadas de N y F son (x_N, y_N) y (x_F, y_F) , respectivamente.* Por lo tanto,

$$\lambda_x = \cos \theta_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{x_F - x_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \quad (14-5)$$

$$\lambda_y = \cos \theta_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{y_F - y_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \quad (14-6)$$

Los signos algebraicos de estas ecuaciones "generalizadas" contarán de forma automática para los elementos orientados en otros cuadrantes del plano x - y .

*El origen puede ubicarse en cualquier punto conveniente. Sin embargo, usualmente se localiza de modo que las coordenadas x, y de todos los nodos sean *positivas*, como se muestra en la figura 14-4.

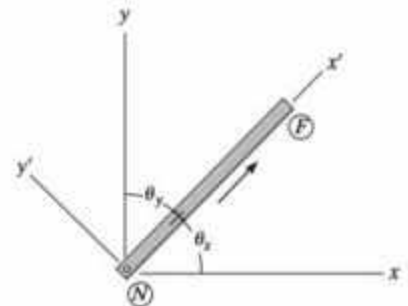


Figura 14-3

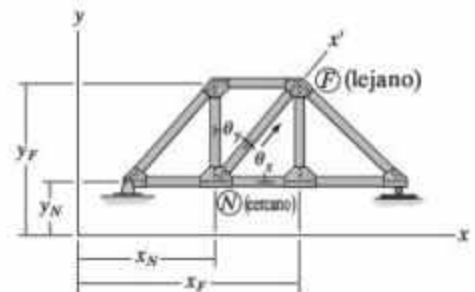


Figura 14-4

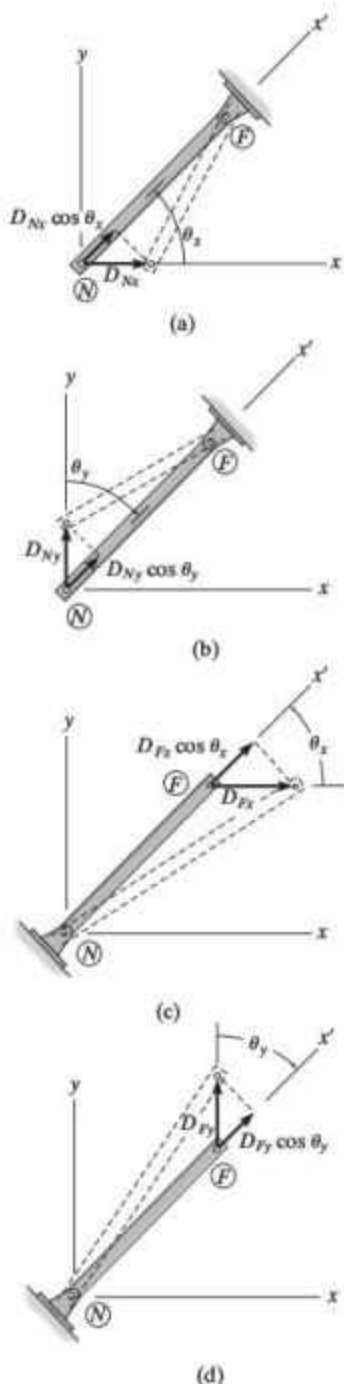


Figura 14-5

Matriz de transformación del desplazamiento. En las coordenadas globales, cada extremo del elemento puede tener dos grados de libertad o desplazamientos independientes; a saber, la junta N tiene D_{Nx} y D_{Ny} , figuras 14-5a y 14-5b, y la junta F tiene D_{Fx} y D_{Fy} , figuras 14-5c y 14-5d. Ahora se considerarán cada uno de estos desplazamientos por separado, a fin de determinar su desplazamiento de componente a lo largo del elemento. Cuando el extremo lejano se mantiene articulado y al extremo cercano se le da un desplazamiento global D_{Nx} , figura 14-5a, el desplazamiento correspondiente (deformación) a lo largo del elemento es $D_{Nx} \cos \theta_x$.^{*} Del mismo modo, un desplazamiento D_{Ny} ocasionará que el elemento se desplace $D_{Ny} \cos \theta_y$ a lo largo del eje x' , figura 14-5b. El efecto de *ambos* desplazamientos globales hace que el elemento se desplace

$$d_N = D_{Nx} \cos \theta_x + D_{Ny} \cos \theta_y$$

De manera similar, los desplazamientos positivos D_{Fx} y D_{Fy} , aplicados en forma sucesiva en el extremo lejano F , mientras el extremo cercano se mantiene articulado, figuras 14-5c y 14-5d, hará que el elemento se desplace

$$d_F = D_{Fx} \cos \theta_x + D_{Fy} \cos \theta_y$$

Si se considera que $\lambda_x = \cos \theta_x$ y $\lambda_y = \cos \theta_y$ representan los *cosenos directores* para el elemento, se tiene

$$d_N = D_{Nx} \lambda_x + D_{Ny} \lambda_y$$

$$d_F = D_{Fx} \lambda_x + D_{Fy} \lambda_y$$

que puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix} \quad (14-7)$$

o bien

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{D} \quad (14-8)$$

donde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \quad (14-9)$$

De la deducción anterior, \mathbf{T} transforma los cuatro desplazamientos \mathbf{D} globales x, y , en los dos desplazamientos \mathbf{d} locales x' . Por lo tanto, \mathbf{T} se conoce como la *matriz de transformación del desplazamiento*.

^{*}El cambio en θ_x o θ_y , no se tomará en cuenta porque es muy pequeño.

Matriz de transformación de fuerza. Considere ahora la aplicación de la fuerza q_N sobre el extremo cercano del elemento, el extremo lejano se mantiene articulado, figura 14-6a. Aquí las componentes de la fuerza global de q_N en N son

$$Q_{Nx} = q_N \cos \theta_x \quad Q_{Ny} = q_N \cos \theta_y$$

Del mismo modo, si se aplica q_F a la barra, figura 14-6b, las componentes de la fuerza global en F son

$$Q_{Fx} = q_F \cos \theta_x \quad Q_{Fy} = q_F \cos \theta_y$$

Con base en los cosenos directores $\lambda_x = \cos \theta_x$, $\lambda_y = \cos \theta_y$, estas ecuaciones se convierten en

$$Q_{Nx} = q_N \lambda_x \quad Q_{Ny} = q_N \lambda_y$$

$$Q_{Fx} = q_F \lambda_x \quad Q_{Fy} = q_F \lambda_y$$

que pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} \quad (14-10)$$

o bien

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{q} \quad (14-11)$$

donde

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \quad (14-12)$$

En este caso, \mathbf{T}^T transforma las dos fuerzas \mathbf{q} locales (x') que actúan en los extremos del elemento en las cuatro componentes de la fuerza \mathbf{Q} global (x, y). Por comparación, puede establecerse que esta *matriz de transformación de la fuerza* es la transpuesta de la matriz de transformación del desplazamiento, ecuación 14-9.

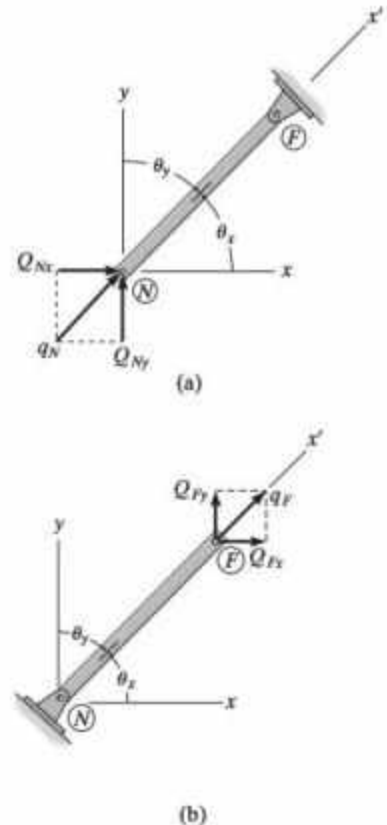


Figura 14-6

14.4 Matriz de rigidez global del elemento

Ahora se combinarán los resultados de las secciones anteriores y se determinará la matriz de rigidez de un elemento que relaciona los componentes de la fuerza global \mathbf{Q} del elemento con sus desplazamientos globales \mathbf{D} . Si se sustituye la ecuación 14-8 ($\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{D}$) en la ecuación 14-3 ($\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{d}$), es posible determinar las fuerzas \mathbf{q} de los elementos en función de los desplazamientos globales \mathbf{D} en sus puntos extremos, a saber,

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D} \quad (14-13)$$

Al sustituir esta ecuación en la ecuación 14-11, $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{q}$, se obtiene el resultado final,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D}$$

o bien

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{D} \quad (14-14)$$

donde

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T} \quad (14-15)$$

La matriz \mathbf{k} es la *matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales*. Dado que \mathbf{T}^T , \mathbf{T} y \mathbf{k}' ya se conocen, entonces

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}$$

Si se realizan las operaciones matriciales se obtiene

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} N_x & N_y & F_x & F_y \\ \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y \\ -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (14-16)$$

La ubicación de cada elemento en esta matriz simétrica de 4×4 está referenciada con cada grado de libertad global asociado con el extremo cercano N , seguido por el extremo lejano F . Esto se indica mediante la notación del número de código a lo largo de las filas y columnas, es decir, N_x, N_y, F_x, F_y . Aquí \mathbf{k} representa las relaciones de fuerza-desplazamiento para el elemento cuando las componentes de la fuerza y el desplazamiento en los extremos del elemento están en las direcciones globales x, y . Por lo tanto, cada uno de los términos de la matriz es un *coeficiente de influencia de la rigidez* k_{ij} , lo que denota la componente de fuerza x o y en i , necesaria para originar una componente *unitaria* de desplazamiento asociada x o y en j . Como resultado, cada columna identificada de la matriz representa las cuatro componentes de fuerza desarrolladas en los extremos del elemento cuando el extremo identificado se somete a un desplazamiento unitario relacionado con su columna de la matriz. Por ejemplo, un desplazamiento unitario $D_{N_x} = 1$ creará las cuatro componentes de fuerza sobre el elemento que se muestran en la primera columna de la matriz.

14.5 Matriz de rigidez de la armadura

Una vez que se forman todas las matrices de rigidez de los elementos en coordenadas globales, es necesario ensamblarlas en el orden correcto para que se pueda determinar la matriz de rigidez \mathbf{K} de toda la armadura. Este proceso de combinación de matrices de los elementos depende de una cuidadosa identificación de los miembros de cada matriz del elemento. Como se analizó en la sección anterior, esto se hace por la designación de filas y columnas de la matriz mediante los cuatro números de código N_x, N_y, F_x, F_y que se utilizan para identificar los dos grados de libertad globales que pueden ocurrir en cada extremo del elemento (vea la ecuación 14-16). La matriz de rigidez de la estructura tendrá entonces un orden que será igual al número de código mayor asignado a la armadura, ya que representa la cantidad total de grados de libertad para la estructura. Cuando se ensamblen las matrices \mathbf{k} , cada elemento en \mathbf{k} se pondrá entonces en su *misma* designación de fila y columna en la matriz de rigidez de la estructura \mathbf{K} . En particular, cuando dos o más elementos están *conectados* a la *misma* junta o nodo, entonces algunos de los elementos de cada matriz \mathbf{k} del elemento se asignarán a la misma posición en la matriz \mathbf{K} . Cuando esto ocurre, los elementos asignados a la ubicación común deben sumarse algebraicamente. La razón de esto se hace evidente si se tiene en cuenta que cada elemento de la matriz \mathbf{k} representa la resistencia del elemento a una fuerza aplicada en su extremo. De esta manera, la suma de estas resistencias en la dirección x o y al formar la matriz \mathbf{K} determina la *resistencia total* de cada junta a un desplazamiento unitario en la dirección x o y .

Este método de ensamble de las matrices de los elementos para formar la matriz de rigidez de la estructura se mostrará ahora mediante dos ejemplos numéricos. Aunque este proceso es algo tedioso si se hace manualmente, resulta más fácil si se programa en una computadora.

EJEMPLO 14.1

Determine la matriz de rigidez de la estructura para la armadura de dos elementos que se muestra en la figura 14-7a. AE es constante.

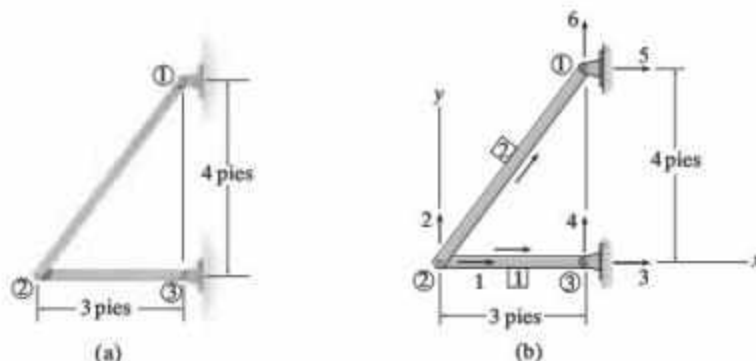


Figura 14-7

SOLUCIÓN

Por inspección, ② tendrá dos componentes de desplazamiento desconocidas, en tanto que las juntas ① y ③ estarán limitadas por el desplazamiento. En consecuencia, las componentes del desplazamiento en la junta ② se codifican numéricamente en primer lugar, seguidas por las de las articulaciones ③ y ①, figura 14-7b. El origen del sistema de coordenadas globales puede ubicarse en cualquier punto. Para mayor comodidad, se elegirá la junta ②, como se muestra. Los elementos se identifican de forma arbitraria y se trazan flechas a lo largo de los dos elementos para identificar los extremos cercano y lejano de cada elemento. Ahora pueden determinarse los cosenos directores y la matriz de rigidez para cada elemento.

Elemento 1. Como ② es el extremo cercano y ③ es el extremo lejano, entonces a partir de las ecuaciones 14-5 y 14-6, se tiene

$$\lambda_x = \frac{3 - 0}{3} = 1 \quad \lambda_y = \frac{0 - 0}{3} = 0$$

Con base en la ecuación 14-16, si se divide cada término entre $L = 3$ pies, se tiene

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.333 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Los cálculos pueden verificarse en parte al observar que \mathbf{k}_1 es *simétrica*. Tenga en cuenta que las filas y columnas en \mathbf{k}_1 se identifican por los grados de libertad x, y en el extremo cercano, seguidos por el extremo lejano, es decir, 1, 2, 3, 4, respectivamente, para el elemento 1, figura 14-7b. Esto se hace con el fin de identificar los términos para el ensamble posterior en la matriz \mathbf{K} .

Elemento 2. Como ② es el extremo cercano y ① es el extremo lejano, se tiene

$$\lambda_x = \frac{3-0}{5} = 0.6 \quad \lambda_y = \frac{4-0}{5} = 0.8$$

Así, la ecuación 14-16 con $L = 5$ pies se convierte en

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0.072 & 0.096 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & -0.096 & -0.128 \\ -0.072 & -0.096 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Aquí las filas y columnas se identifican como 1, 2, 5, 6, puesto que estos números representan, respectivamente, los grados de libertad x , y en los extremos cercano y lejano del elemento 2.

Matriz de rigidez de la estructura. Esta matriz tiene una orden de 6×6 porque hay seis grados de libertad designados para la armadura, figura 14-7b. Los elementos correspondientes de las dos matrices anteriores se suman algebraicamente para formar la matriz de rigidez de la estructura. Quizá el proceso de ensamble es más fácil de observar si las columnas y filas numéricas faltantes en \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 se expanden con ceros para formar dos matrices de 6×6 . Entonces,

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$$

$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.333 & 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 + AE \\ 5 \\ 6 \end{matrix} + AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.072 & 0.096 & 0 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 & -0.333 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix}$$

Si se usa una computadora para esta operación, por lo general se empieza con una \mathbf{K} donde todos los términos son cero; después, conforme se generan las matrices de rigidez globales del elemento, éstas se colocan directamente en sus respectivas posiciones elementales en la matriz \mathbf{K} , en vez de desarrollar las matrices de rigidez de cada elemento y almacenarlas, para después ensamblarlas.

EJEMPLO 14.2

Determine la matriz de rigidez de la estructura para la armadura que se muestra en la figura 14-8a. AE es constante.

SOLUCIÓN

Aunque la armadura es estáticamente indeterminada de primer grado, esto no representa ninguna dificultad para la obtención de la matriz de rigidez de la estructura. Cada junta y cada elemento se identifican numéricamente en forma arbitraria, y los extremos cercano y lejano se indican mediante flechas a lo largo de los elementos. Como se muestra en la figura 14-8b, los *desplazamientos no restringidos* se *codifican numéricamente en primer lugar*. Hay ocho grados de libertad para la armadura y, por lo tanto, \mathbf{K} será una matriz de 8×8 . Con el fin de mantener todas las coordenadas de las juntas positivas, el origen de las coordenadas globales se elige en ①. Ahora se aplicarán las ecuaciones 14-5, 14-6 y 14-16 a cada elemento.

Elemento 1. Aquí $L = 10$ pies, de modo que

$$\lambda_x = \frac{10 - 0}{10} = 1 \quad \lambda_y = \frac{0 - 0}{10} = 0$$

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0.1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 5 \end{matrix}$$

Elemento 2. Aquí $L = 10\sqrt{2}$ pies, por lo que

$$\lambda_x = \frac{10 - 0}{10\sqrt{2}} = 0.707 \quad \lambda_y = \frac{10 - 0}{10\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.035 \\ 0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0.035 & 0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0.035 & 0.035 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 3. Aquí $L = 10$ pies, entonces

$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{10} = 0 \quad \lambda_y = \frac{10 - 0}{10} = 1$$

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

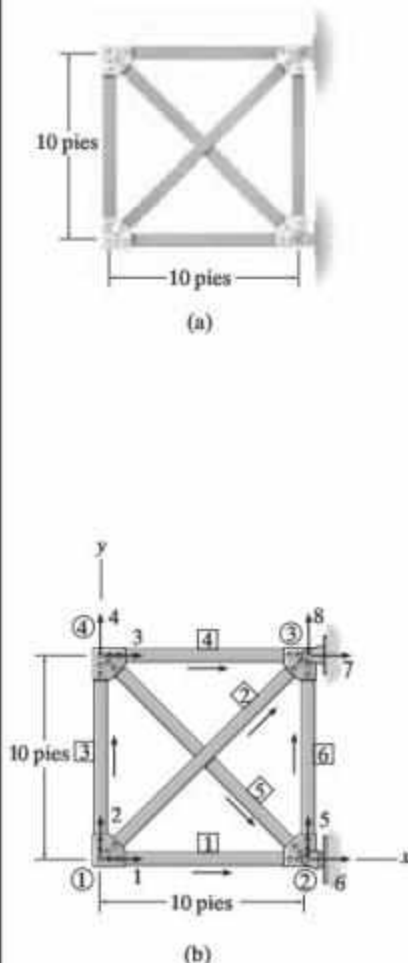


Figura 14-8

Elemento 4. Aquí $L = 10$ pies, de modo que

$$\lambda_x = \frac{10 - 0}{10} = 1 \quad \lambda_y = \frac{10 - 10}{10} = 0$$

$$\mathbf{k}_4 = AE \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0.1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Elemento 5. Aquí $L = 10\sqrt{2}$ pies, por lo que

$$\lambda_x = \frac{10 - 0}{10\sqrt{2}} = 0.707 \quad \lambda_y = \frac{0 - 10}{10\sqrt{2}} = -0.707$$

$$\mathbf{k}_5 = AE \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 \\ -0.035 & -0.035 & -0.035 & 0.035 \\ -0.035 & 0.035 & 0.035 & -0.035 \\ -0.035 & 0.035 & 0.035 & -0.035 \\ 0.035 & -0.035 & -0.035 & 0.035 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{matrix}$$

Elemento 6. Aquí $L = 10$ pies, entonces

$$\lambda_x = \frac{10 - 10}{10} = 0 \quad \lambda_y = \frac{10 - 0}{10} = 1$$

$$\mathbf{k}_6 = AE \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura. Ahora, las seis matrices anteriores pueden ensamblarse en la matriz \mathbf{K} de 8×8 al sumar algebraicamente sus elementos correspondientes. Por ejemplo, puesto que $(k_{11})_1 = AE(0.1)$, $(k_{11})_2 = AE(0.035)$, $(k_{11})_3 = (k_{11})_4 = (k_{11})_5 = (k_{11})_6 = 0$, entonces, $K_{11} = AE(0.1 + 0.035) = AE(0.135)$, y así sucesivamente. Por lo tanto, el resultado final es

$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0.135 & 0.035 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0.035 & -0.035 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & -0.035 & -0.035 \\ 0 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & 0 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.135 & 0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.035 & 0.135 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad \text{Resp.}$$

14.6 Aplicación del método de la rigidez para el análisis de armaduras

Una vez que se forma la matriz de rigidez de la estructura, las componentes de fuerza global \mathbf{Q} que actúan sobre la armadura pueden relacionar con sus desplazamientos globales \mathbf{D} utilizando

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{D} \quad (14-17)$$

Esta ecuación se conoce como la *ecuación de rigidez de la estructura*. Como siempre se han asignado los números más bajos de código para identificar los grados de libertad no restringidos, esto permitirá ahora hacer una partición de la ecuación en la forma siguiente:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{Q}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \mathbf{D}_k \end{bmatrix} \quad (14-18)$$

Aquí

$\mathbf{Q}_k, \mathbf{D}_k$ = cargas externas y desplazamientos *conocidos*; aquí las cargas existen en la armadura como parte del problema, y los desplazamientos suelen especificarse como iguales a cero debido a las limitaciones de soportes como pasadores o rodillos.

$\mathbf{Q}_u, \mathbf{D}_u$ = cargas y desplazamientos *desconocidos*; aquí las cargas representan las reacciones desconocidas en los soportes y los desplazamientos se presentan en las juntas donde el movimiento no está restringido en una dirección particular.

\mathbf{K} = matriz de rigidez de la *estructura*, que se parte para ser compatible con las particiones de \mathbf{Q} y \mathbf{D} .

Al expandir la ecuación 14-18 se obtiene

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k \quad (14-19)$$

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k \quad (14-20)$$

Muy a menudo $\mathbf{D}_k = \mathbf{0}$, puesto que los soportes no se desplazan. Cuando se da este caso, la ecuación 14-19 se convierte en

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u$$

Como los elementos de la matriz partida \mathbf{K}_{11} representan la *resistencia total* en una junta de armadura a un desplazamiento unitario, ya sea en la dirección x o y , entonces la ecuación anterior simboliza la colección de todas las *ecuaciones de equilibrio de fuerzas* aplicadas a las juntas donde las cargas externas son cero o tienen un valor conocido (\mathbf{Q}_k). Si se despeja \mathbf{D}_u , resulta

$$\mathbf{D}_u = [\mathbf{K}_{11}]^{-1}\mathbf{Q}_k \quad (14-21)$$

De esta ecuación puede obtenerse una solución directa para todos los desplazamientos de junta desconocidos; entonces, a partir de la ecuación 14-20, con $\mathbf{D}_k = \mathbf{0}$, se obtiene

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u \quad (14-22)$$

con base en la cual pueden obtenerse las reacciones desconocidas en los soportes. Las fuerzas del elemento pueden determinarse mediante la ecuación 14-13, a saber:

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}^T\mathbf{D}$$

*Este esquema de partición será evidente en los ejemplos numéricos que siguen.

Al expandir esta ecuación se obtiene

$$\begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix}$$

Como $q_N = -q_F$ para el equilibrio, sólo debe encontrarse una de las fuerzas. Aquí se determinará q_F , la cual ejerce tensión en el elemento, figura 14-2c.

$$q_F = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -\lambda_x & -\lambda_y & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix} \quad (14-23)$$

En particular, si el resultado que se calcula mediante esta ecuación es negativo, entonces el elemento está en compresión.

Procedimiento de análisis

El siguiente método proporciona un medio para determinar los desplazamientos y las reacciones en los apoyos desconocidos para una armadura utilizando el método de la rigidez.

Notación

- Establezca el sistema de coordenadas globales x, y . Por lo general, el origen se localiza en una junta para la cual las coordenadas de todas las demás juntas son positivas.
- Identifique cada junta y elemento en forma numérica, y especifique arbitrariamente los extremos cercano y lejano de cada elemento de manera simbólica al dirigir una flecha a lo largo del elemento con la punta dirigida hacia el extremo lejano.
- Especifique los dos números de código en cada junta, considere los *números más bajos* para identificar los *grados de libertad no restringidos*, seguidos por los *números mayores* para identificar los *grados de libertad restringidos*.
- Con base en el problema, establezca \mathbf{D}_k y \mathbf{Q}_k .

Matriz de rigidez de la estructura

- Para cada elemento, determine λ_x y λ_y y la matriz de rigidez del elemento usando la ecuación 14-16.
- Ensamble estas matrices para formar la matriz de rigidez de toda la armadura, como se explicó en la sección 14-5. Para verificar parcialmente los cálculos, revise que las matrices de rigidez del elemento y la estructura sean *simétricas*.

Desplazamientos y cargas

- Parta la matriz de rigidez de la estructura, como lo indica la ecuación 14-18.
- Determine los desplazamientos desconocidos \mathbf{D}_u de la junta mediante la ecuación 14-21, las reacciones en los soportes \mathbf{Q}_u con base en la ecuación 14-22, y cada fuerza de elemento q_F usando la ecuación 14-23.

EJEMPLO 14.3

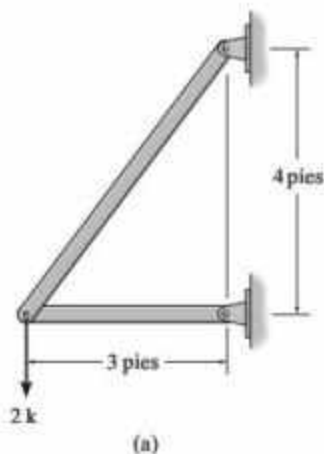


Figura 14-9

Determine la fuerza en cada uno de los dos elementos que componen la armadura que se muestra en la figura 14-9a. AE es constante.

SOLUCIÓN

Notación. En la figura 14-9b se muestran el origen de x , y y la numeración de las juntas y los elementos. Además, los extremos cercano y lejano de todos los elementos se identifican mediante flechas y se usan números de código en cada junta. Por inspección, puede verse que los desplazamientos externos conocidos son $D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = 0$. Inclusive, las cargas externas conocidas son $Q_1 = 0$, $Q_2 = -2$ k. Por lo tanto,

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura. Si se emplea la misma notación que se usó aquí, esta matriz ya se desarrolló en el ejemplo 14-1.

Desplazamientos y cargas. Al escribir la ecuación 14-17, $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$, para esta armadura se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 & -0.333 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

A partir de esta ecuación se puede identificar \mathbf{K}_{11} y así determinar \mathbf{D}_u . Se ve que la multiplicación de matrices, como la ecuación 14-19, resulta en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 \\ 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aquí resulta fácil resolver mediante una expansión directa,

$$0 = AE(0.405D_1 + 0.096D_2)$$

$$-2 = AE(0.096D_1 + 0.128D_2)$$

Físicamente estas ecuaciones representan $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ aplicadas a la junta ②. Despejando, se obtiene

$$D_1 = \frac{4.505}{AE} \quad D_2 = \frac{-19.003}{AE}$$

Por inspección de la figura 14-9b, de hecho se esperaría la ocurrencia de un desplazamiento hacia la derecha y hacia abajo en la junta ② según lo indican los signos positivos y negativos de estas respuestas.

Con estos resultados, ahora se obtienen las reacciones en los soportes a partir de la ecuación (1), escrita en la forma de la ecuación 14-20 (o la ecuación 14-22) como

$$\begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} -0.333 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 \\ -0.096 & -0.128 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al expandir y despejar las reacciones,

$$Q_3 = -0.333(4.505) = -1.5 \text{ k}$$

$$Q_4 = 0$$

$$Q_5 = -0.072(4.505) - 0.096(-19.003) = 1.5 \text{ k}$$

$$Q_6 = -0.096(4.505) - 0.128(-19.003) = 2.0 \text{ k}$$

La fuerza en cada elemento se encuentra con base en la ecuación 14-23. Empleando los datos para λ_x y λ_y en el ejemplo 14-1, se tiene

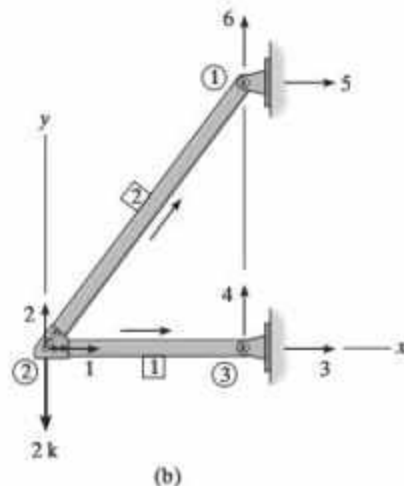
Elemento 1: $\lambda_x = 1, \lambda_y = 0, L = 3$ pies.

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{AE}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} [-4.505] = -1.5 \text{ k} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

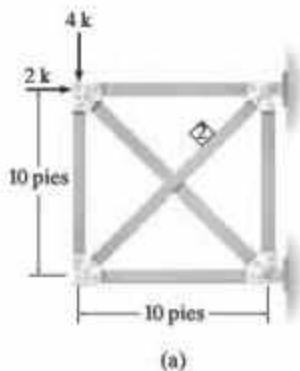
Elemento 2: $\lambda_x = 0.6, \lambda_y = 0.8, L = 5$ pies.

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{AE}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ -0.6 & -0.8 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} [-0.6(4.505) - 0.8(-19.003)] = 2.5 \text{ k} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Por supuesto, estas respuestas pueden verificarse mediante el equilibrio, aplicado en la junta ②.



EJEMPLO 14.4



Determine las reacciones en los soportes y la fuerza en el elemento 2 de la armadura que se muestra en la figura 14-10a. AE es constante.

SOLUCIÓN

Notación. Se numeran las juntas y los elementos numerados y se establece el origen de los ejes x, y en ①, figura 14-10b. Además, las flechas se usan para hacer referencia a los extremos cercano y lejano de cada elemento. Si se emplean los números de código donde los números más bajos indican los grados de libertad no restringidos, figura 14-10b, se tiene

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad Q_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

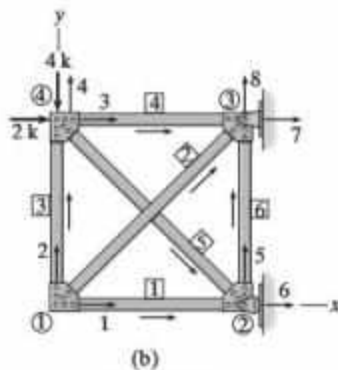


Figura 14-10

Estructura de la matriz de rigidez. Esta matriz se determinó en el ejemplo 14-2 con la misma notación que en la figura 14-10b.

Desplazamientos y cargas. Para este problema $Q = KD$ es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.135 & 0.035 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0.035 & -0.035 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & -0.035 & -0.035 \\ 0 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & 0 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.135 & 0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.035 & 0.135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Si se multiplica de modo que pueda formularse la ecuación 14-18 del desplazamiento desconocido, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.135 & 0.035 & 0 & 0 & 0 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0.035 \\ 0 & -0.1 & -0.035 & 0.135 & -0.035 \\ 0 & 0 & 0.035 & -0.035 & 0.135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al expandir estas ecuaciones y despejar los desplazamientos resulta

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 17.94 \\ -69.20 \\ -2.06 \\ -87.14 \\ -22.06 \end{bmatrix}$$

Si se desarrolla la ecuación 14-20 a partir de la ecuación (1), empleando los resultados calculados, se tiene

$$\begin{bmatrix} Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & -0.035 & 0.035 & -0.035 \\ -0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 17.94 \\ -69.20 \\ -2.06 \\ -87.14 \\ -22.06 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al expandir y calcular las reacciones en los soportes se obtiene

$$Q_6 = -4.0 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

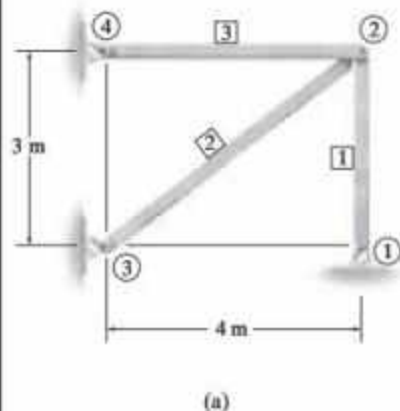
$$Q_7 = 2.0 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

$$Q_8 = 4.0 \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

El signo negativo para Q_6 indica que la reacción en el soporte de oscilador actúa en la dirección x negativa. La fuerza en el elemento 2 se encuentra a partir de la ecuación 14-23, donde desde el ejemplo 14-2, $\lambda_x = 0.707, \lambda_y = 0.707, L = 10\sqrt{2}$ pies. Entonces,

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{AE}{10\sqrt{2}} [-0.707 \quad -0.707 \quad 0.707 \quad 0.707] \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 17.94 \\ -69.20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2.56 \text{ k} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 14.5



Determine la fuerza en el elemento 2 del ensamble que se muestra en la figura 14-11a si el soporte en la junta ① se asienta 25 mm *hacia abajo*. Considere que $AE = 8(10^3)$ kN.

SOLUCIÓN

Notación. Por comodidad, el origen de las coordenadas globales en la figura 14-11b se establece en la junta ③ y, como siempre, los números más bajos del código se usan para hacer referencia a los grados de libertad no restringidos. Por lo tanto,

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad Q_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura. Con base en la ecuación 14-16, se tiene

Elemento 1: $\lambda_x = 0, \lambda_y = 1, L = 3$ m, de modo que

$$k_1 = AE \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Elemento 2: $\lambda_x = -0.8, \lambda_y = -0.6, L = 5$ m, entonces

$$k_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 \\ -0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 3: $\lambda_x = 1, \lambda_y = 0, L = 4$ m, entonces

$$k_3 = AE \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Al ensamblar estas matrices, la matriz de rigidez de la estructura se convierte en

$$K = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.405 & 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Figura 14-11

Desplazamientos y cargas. Aquí $Q = KD$ resulta en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.405 & 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ -0.025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al desarrollar la solución para los desplazamientos, ecuación 14-19, se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 \\ 0.096 & 0.405 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + AE \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene

$$0 = AE[(0.378D_1 + 0.096D_2) + 0]$$

$$0 = AE[(0.096D_1 + 0.405D_2) + 0.00833]$$

Al resolver estas ecuaciones simultáneamente da

$$D_1 = 0.00556 \text{ m}$$

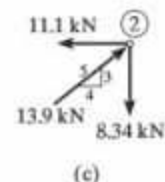
$$D_2 = -0.021875 \text{ m}$$

A pesar de que no es necesario calcular las reacciones en los soportes, si así se desea pueden encontrarse a partir de la expansión definida por la ecuación 14-20. Si se usa la ecuación 14-23 para determinar la fuerza en el elemento 2 resulta

Elemento 2: $\lambda_x = -0.8$, $\lambda_y = -0.6$, $L = 5 \text{ m}$, $AE = 8(10^3) \text{ kN}$, de modo que

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{8(10^3)}{5} [0.8 \quad 0.6 \quad -0.8 \quad -0.6] \begin{bmatrix} 0.00556 \\ -0.021875 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{8(10^3)}{5} (0.00444 - 0.0131) = -13.9 \text{ kN} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Usando el mismo procedimiento, se muestra que la fuerza en el elemento 1 es $q_1 = 8.34 \text{ kN}$ y en el elemento 3, $q_3 = 11.1 \text{ kN}$. Los resultados se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la junta ②, figura 14-11c, la cual puede comprobarse que está en equilibrio.



14.7 Coordenadas nodales

En ocasiones, una armadura puede estar soportada mediante un rodillo situado en un *plano inclinado*, y cuando esto ocurre la restricción de cero deflexión en el soporte (nodo) *no puede* definirse directamente empleando un solo sistema global de coordenadas horizontales y verticales. Por ejemplo, considere la armadura en la figura 14-12a. La condición de desplazamiento cero en el nodo ① está definida sólo a lo largo del eje y'' , y debido a que el rodillo puede desplazarse a lo largo del eje x'' , este nodo tendrá *componentes* de desplazamiento a lo largo de *ambos* ejes de coordenadas globales, x, y . Por esta razón no es posible incluir la condición de desplazamiento cero en este nodo al escribir la ecuación de rigidez global de la armadura usando los ejes x, y , sin hacer algunas modificaciones en el procedimiento del análisis matricial.

Para resolver este problema, de modo que pueda incorporarse fácilmente en un análisis de computadora, se empleará un conjunto de *coordenadas nodales* x'', y'' que se localiza en el soporte inclinado. Estos ejes están orientados de modo que las reacciones y los desplazamientos se encuentran en los soportes a lo largo de cada uno de los ejes de coordenadas, figura 14-12a. Con el fin de determinar la ecuación de rigidez global de la armadura, se vuelve necesario desarrollar las matrices de transformación de la fuerza y el desplazamiento para cada uno de los elementos conectados en este soporte, para que los resultados puedan sumarse en el mismo sistema de coordenadas global, x, y . Para mostrar cómo se hace esto, considere el elemento 1 de la armadura que se muestra en la figura 14-12b, con un sistema de coordenadas globales x, y en el nodo cercano ④, y un sistema de coordenadas nodales x'', y'' en el nodo lejano ⑤. Cuando se producen desplazamientos \mathbf{D} de manera que tengan componentes a lo largo de cada uno de estos ejes, como se muestra en la figura 14-12c, los desplazamientos \mathbf{d} en la dirección x' a lo largo de los extremos del elemento se convierten en

$$d_N = D_{Nx} \cos \theta_x + D_{Ny} \cos \theta_y$$

$$d_F = D_{Fx} \cos \theta_{x''} + D_{Fy} \cos \theta_{y''}$$

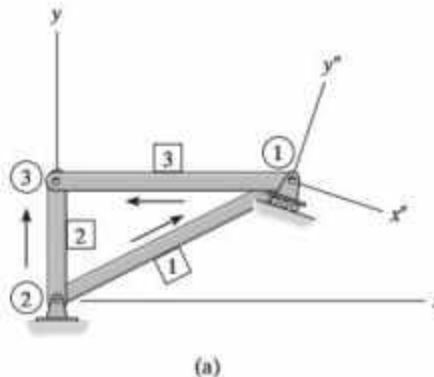


Figura 14-12

Estas ecuaciones pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{x'} & \lambda_{y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx'} \\ D_{Fy'} \end{bmatrix}$$

Del mismo modo, las fuerzas \mathbf{q} en los extremos cercano y lejano del elemento, figura 14-12d, tienen componentes \mathbf{Q} a lo largo de los ejes globales de

$$\begin{aligned} Q_{Nx} &= q_N \cos \theta_x & Q_{Ny} &= q_N \sin \theta_y \\ Q_{Fx'} &= q_F \cos \theta_{x'} & Q_{Fy'} &= q_F \sin \theta_{y'} \end{aligned}$$

las cuales pueden expresarse como

$$\begin{bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx'} \\ Q_{Fy'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_{x'} \\ 0 & \lambda_{y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix}$$

Las matrices de transformación del desplazamiento y la fuerza en las ecuaciones anteriores se usan para desarrollar la matriz de rigidez del elemento para esta situación. Al aplicar la ecuación 14-15, se tiene

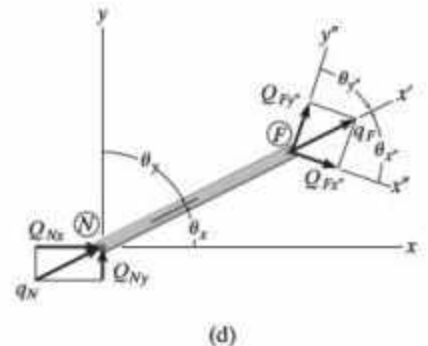
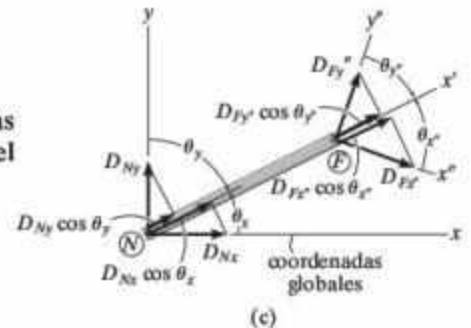
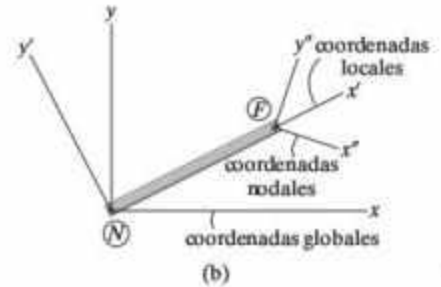
$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_{x'} \\ 0 & \lambda_{y'} \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{x'} & \lambda_{y'} \end{bmatrix}$$

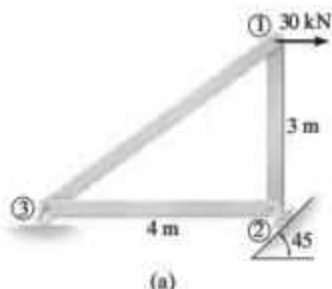
Si se realizan las operaciones matriciales, resulta

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y & -\lambda_x \lambda_{x'} & -\lambda_x \lambda_{y'} \\ \lambda_x \lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_y \lambda_{x'} & -\lambda_y \lambda_{y'} \\ -\lambda_x \lambda_{x'} & -\lambda_y \lambda_{x'} & \lambda_{x'}^2 & \lambda_{x'} \lambda_{y'} \\ -\lambda_x \lambda_{y'} & -\lambda_y \lambda_{y'} & \lambda_{x'} \lambda_{y'} & \lambda_{y'}^2 \end{bmatrix} \quad (14-24)$$

Esta matriz de rigidez se usa después para cada elemento que esté conectado a un soporte de rodillos inclinado, y el proceso para ensamblar las matrices y formar la matriz de rigidez de la estructura sigue el procedimiento acostumbrado. El siguiente problema de ejemplo ilustra su aplicación.



EJEMPLO 14.6



Determine las reacciones en los soportes para la armadura que se muestra en la figura 14-13a.

SOLUCIÓN

Notación. Como el soporte de rodillos en ② se encuentra sobre un plano inclinado, en este nodo deben usarse coordenadas nodales. Se numeran las juntas y los elementos y se establecen los ejes globales x , y , en el nodo ③, figura 14-13b. Observe que los números de código 3 y 4 están a lo largo de los ejes x'' , y'' , a fin de poder usar la condición de que $D_4 = 0$.

Matrices de rigidez de los elementos. Las matrices de rigidez de los elementos 1 y 2 deben desarrollarse mediante la ecuación 14-24, puesto que estos elementos tienen números de código en la dirección de los ejes globales y nodales. La matriz de rigidez para el elemento 3 se determina de la forma habitual.

Elemento 1. Figura 14-13c, $\lambda_x = 1$, $\lambda_y = 0$, $\lambda_{x'} = 0.707$, $\lambda_{y'} = -0.707$

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 4 \\ 0.25 & 0 & -0.17675 & 0.17675 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.17675 & 0 & 0.125 & -0.125 \\ 0.17675 & 0 & -0.125 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

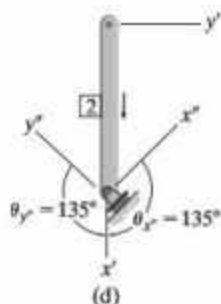
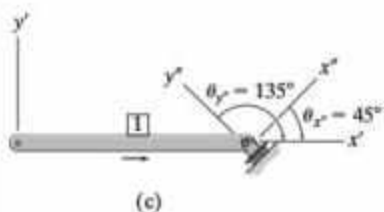
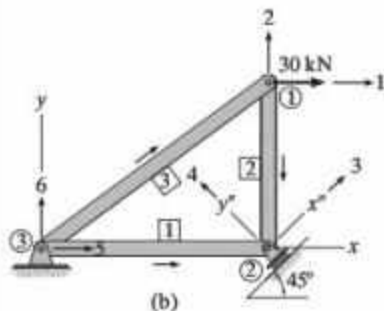


Figura 14-13

Elemento 2. Figura 14-13d, $\lambda_x = 0$, $\lambda_y = -1$, $\lambda_{x'} = -0.707$, $\lambda_{y'} = -0.707$

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & -0.2357 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 3. $\lambda_x = 0.8$, $\lambda_y = 0.6$

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 \\ 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 \\ -0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura. Al ensamblar estas matrices para determinar la matriz de rigidez de la estructura, se tiene

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.128 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.4053 & -0.2357 & -0.2357 & -0.096 & -0.072 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 & 0.0417 & -0.17675 & 0 \\ 0 & -0.2357 & 0.0417 & 0.2917 & 0.17675 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & -0.17675 & 0.17675 & 0.378 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Si se realiza la multiplicación matricial de las particiones superiores se pueden determinar los tres desplazamientos desconocidos **D** al resolver simultáneamente las ecuaciones resultantes, es decir,

$$D_1 = \frac{352.5}{AE}$$

$$D_2 = \frac{-157.5}{AE}$$

$$D_3 = \frac{-127.3}{AE}$$

Las reacciones desconocidas **Q** se obtienen al multiplicar las matrices partidas inferiores en la ecuación (1). Si se usan los desplazamientos calculados, se tiene,

$$Q_4 = 0(352.5) - 0.2357(-157.5) + 0.0417(-127.3)$$

$$= 31.8 \text{ kN}$$

Resp.

$$Q_5 = -0.128(352.5) - 0.096(-157.5) - 0.17675(-127.3)$$

$$= -7.5 \text{ kN}$$

Resp.

$$Q_6 = -0.096(352.5) - 0.072(-157.5) + 0(-127.3)$$

$$= -22.5 \text{ kN}$$

Resp.

14.8 Armaduras con cambios térmicos y errores de fabricación

Si algunos de los elementos de la armadura se someten a un aumento o disminución de su longitud debido a cambios térmicos o errores de fabricación, es necesario usar el método de superposición para obtener la solución. Lo anterior requiere tres pasos. En primer lugar, se calculan las fuerzas de extremo fijo necesarias para *evitar* el movimiento de nodos como el causado por la temperatura o los errores de fabricación. En segundo lugar, se colocan fuerzas iguales pero opuestas sobre los nodos de la armadura y se calculan los desplazamientos de los nodos mediante un análisis matricial. Por último, se determinan las fuerzas reales de los elementos y las reacciones en la armadura mediante la superposición de estos dos resultados. Por supuesto, este procedimiento sólo es necesario si la armadura es estáticamente indeterminada. Si la viga es estáticamente determinada, los desplazamientos en los nodos pueden encontrarse mediante este método; sin embargo, los cambios de temperatura y los errores de fabricación no afectarán las reacciones y las fuerzas de elemento puesto que la armadura es libre de ajustarse a los cambios de longitud.

Efectos térmicos. Si un elemento de una armadura con longitud L está sujeto a un aumento de temperatura ΔT , el elemento experimentará un aumento en su longitud de $\Delta L = \alpha \Delta T L$, donde α es el coeficiente de expansión térmica. Una fuerza de compresión q_0 aplicada al elemento causará una disminución en la longitud del elemento de $\Delta L' = q_0 L / AE$. Si se igualan estos dos desplazamientos, entonces $q_0 = AE\alpha\Delta T$. Esta fuerza mantendrá fijos los nodos del elemento, como se muestra en la figura 14-14, y entonces se tiene

$$(q_N)_0 = AE\alpha\Delta T$$

$$(q_F)_0 = -AE\alpha\Delta T$$

Observe que si ocurre una disminución de la temperatura, entonces ΔT se vuelve negativo y estas fuerzas invierten la dirección a fin de mantener el elemento en equilibrio.

Estas dos fuerzas pueden transformarse en coordenadas globales usando la ecuación 14-10, de donde se obtiene

$$\begin{bmatrix} (Q_{Nx})_0 \\ (Q_{Ny})_0 \\ (Q_{Fx})_0 \\ (Q_{Fy})_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} AE\alpha\Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = AE\alpha\Delta T \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ -\lambda_x \\ -\lambda_y \end{bmatrix} \quad (14-25)$$

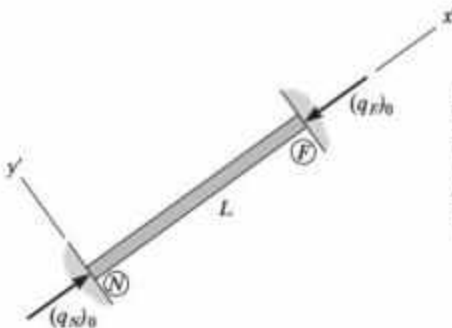


Figura 14-14

Errores de fabricación. Si un elemento de armadura se hace demasiado largo en una cantidad ΔL antes de ajustarse en la armadura, entonces la fuerza q_0 necesaria para mantener al elemento en su longitud de diseño L es $q_0 = AE\Delta L / L$, por lo que para el elemento de la figura 14-14, se tiene

$$(q_N)_0 = \frac{AE\Delta L}{L}$$

$$(q_F)_0 = -\frac{AE\Delta L}{L}$$

Si originalmente el elemento es demasiado corto, entonces ΔL se vuelve negativo y estas fuerzas se invierten.

En coordenadas globales, estas fuerzas son

$$\begin{bmatrix} (Q_{Nx})_0 \\ (Q_{Ny})_0 \\ (Q_{Fx})_0 \\ (Q_{Fy})_0 \end{bmatrix} = \frac{AE\Delta L}{L} \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ -\lambda_x \\ -\lambda_y \end{bmatrix} \quad (14-26)$$

Análisis matricial. En el caso general, si una armadura se somete a la aplicación de fuerzas, a cambios de temperatura y a errores de fabricación, la relación inicial de fuerza-desplazamiento para la armadura se convierte en

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{D} + \mathbf{Q}_0 \quad (14-27)$$

Aquí \mathbf{Q}_0 es una matriz columna para toda la armadura, de las fuerzas de extremo fijo iniciales, causadas por los cambios de temperatura y los errores de fabricación de los elementos definidos en las ecuaciones 14-25 y 14-26. Esta ecuación puede partirse en la forma siguiente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{Q}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \mathbf{D}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_k)_0 \\ (\mathbf{Q}_u)_0 \end{bmatrix}$$

Si se lleva a cabo la multiplicación, resulta

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k + (\mathbf{Q}_k)_0 \quad (14-28)$$

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k + (\mathbf{Q}_u)_0 \quad (14-29)$$

De acuerdo con el procedimiento de superposición descrito anteriormente, los desplazamientos desconocidos \mathbf{D}_u se determinan a partir de la primera ecuación al restar $\mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$ y $(\mathbf{Q}_k)_0$ en ambos lados, para después despejar \mathbf{D}_u . De esto se obtiene

$$\mathbf{D}_u = \mathbf{K}_{11}^{-1}(\mathbf{Q}_k - \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k - (\mathbf{Q}_k)_0)$$

Una vez obtenidos estos desplazamientos nodales, las fuerzas de los elementos se determinan por superposición, es decir,

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D} + \mathbf{q}_0$$

Si esta ecuación se expande para determinar la fuerza en el extremo lejano del elemento, resulta

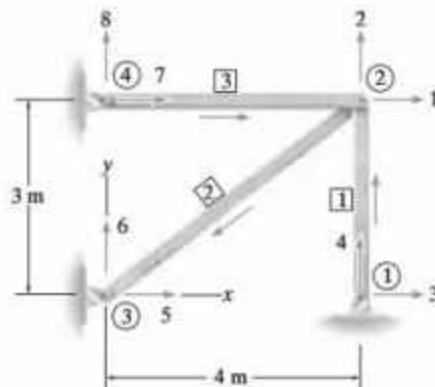
$$q_F = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -\lambda_x & -\lambda_y & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix} + (q_F)_0 \quad (14-30)$$

Este resultado es similar a la ecuación 14-23, excepto que aquí se tiene el término adicional $(q_F)_0$, lo que representa la fuerza de extremo fijo inicial debida a los cambios de temperatura y/o errores de fabricación como se definió anteriormente. Tenga en cuenta que si el resultado calculado a partir de esta ecuación es negativo, el elemento estará en compresión.

Los dos ejemplos siguientes ilustran la aplicación de este procedimiento.

EJEMPLO 14.7

Determine la fuerza en los elementos 1 y 2 del ensamble articulado que se muestra en la figura 14-15, si el elemento 2 se hizo 0.01 m más corto de lo esperado antes de ajustarlo en su lugar. Considere que $AE = 8(10^3)$ kN.

**Figura 14-15****SOLUCIÓN**

Como el elemento es corto, entonces $\Delta L = -0.01$ m y, por lo tanto, al aplicar la ecuación 14-26 en el elemento 2, con $\lambda_x = -0.8$, $\lambda_y = -0.6$, se tiene.

$$\begin{bmatrix} (Q_1)_0 \\ (Q_2)_0 \\ (Q_5)_0 \\ (Q_6)_0 \end{bmatrix} = \frac{AE(-0.01)}{5} \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \\ 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.0016 \\ 0.0012 \\ -0.0016 \\ -0.0012 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura para este ensamble ya se estableció en el ejemplo 14-5. Al aplicar la ecuación 14-27, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.405 & 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + AE \begin{bmatrix} 0.0016 \\ 0.0012 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0016 \\ -0.0012 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Si se parten las matrices de la manera que se muestra y se lleva a cabo la multiplicación para obtener las ecuaciones de los desplazamientos desconocidos, resulta

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 \\ 0.096 & 0.405 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + AE \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + AE \begin{bmatrix} 0.0016 \\ 0.0012 \end{bmatrix}$$

lo que da

$$0 = AE[0.378D_1 + 0.096D_2] + AE[0] + AE[0.0016]$$

$$0 = AE[0.096D_1 + 0.405D_2] + AE[0] + AE[0.0012]$$

Al resolver estas ecuaciones simultáneamente,

$$D_1 = -0.003704 \text{ m}$$

$$D_2 = -0.002084 \text{ m}$$

Aunque no sea necesario, las reacciones **Q** pueden determinarse al expandir la ecuación (1), siguiendo el formato de la ecuación 14-29.

A fin de determinar la fuerza en los elementos 1 y 2, debe aplicarse la ecuación 14-30, por lo tanto se tiene

Elemento 1. $\lambda_x = 0, \lambda_y = 1, L = 3 \text{ m}, AE = 8(10^3) \text{ kN}$, de modo que

$$q_1 = \frac{8(10^3)}{3} [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.003704 \\ -0.002084 \end{bmatrix} + [0]$$

$$q_1 = -5.56 \text{ kN}$$

Resp.

Elemento 2. $\lambda_x = -0.8, \lambda_y = -0.6, L = 5 \text{ m}, AE = 8(10^3) \text{ kN}$, por lo que

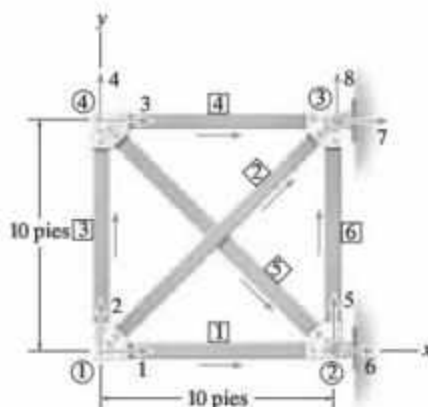
$$q_2 = \frac{8(10^3)}{5} [0.8 \quad 0.6 \quad -0.8 \quad -0.6] \begin{bmatrix} -0.003704 \\ -0.002084 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{8(10^3)(-0.01)}{5}$$

$$q_2 = 9.26 \text{ kN}$$

Resp.

EJEMPLO 14.8

El elemento 2 de la armadura que se muestra en la figura 14-16 se somete a un aumento en la temperatura de 150°F . Determine la fuerza desarrollada en el elemento 2. Considere que $\alpha = 6.5(10^{-6})/^{\circ}\text{F}$, $E = 29(10^6) \text{ lb/pulg}^2$. Cada elemento tiene un área transversal de $A = 0.75 \text{ pulg}^2$.

**Figura 14-16****SOLUCIÓN**

Como hay un aumento de temperatura, $\Delta T = +150^{\circ}\text{F}$. Al aplicar la ecuación 14-25 en el elemento 2, donde $\lambda_x = 0.7071$, $\lambda_y = 0.7071$, se tiene

$$\begin{bmatrix} (Q_1)_0 \\ (Q_2)_0 \\ (Q_7)_0 \\ (Q_8)_0 \end{bmatrix} = AE(6.5)(10^{-6})(150) \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \\ -0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.000689325 \\ 0.000689325 \\ -0.000689325 \\ -0.000689325 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez para esta armadura ya se desarrolló en el ejemplo 14-2.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.135 & 0.035 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0.035 & -0.035 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & -0.035 & -0.035 \\ 0 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0.035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & -0.035 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.035 & 0.035 & -0.035 & 0.135 & 0 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.135 & 0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.035 & 0.135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + AE \begin{bmatrix} 0.000689325 \\ 0.000689325 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.000689325 \\ -0.000689325 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad (1)$$

Si se expande para determinar las ecuaciones de los desplazamientos desconocidos, y estas ecuaciones se resuelven simultáneamente, resulta

$$D_1 = -0.002027 \text{ pies}$$

$$D_2 = -0.01187 \text{ pies}$$

$$D_3 = -0.002027 \text{ pies}$$

$$D_4 = -0.009848 \text{ pies}$$

$$D_5 = -0.002027 \text{ pies}$$

Con base en la ecuación 14-30 es posible determinar la fuerza en el elemento 2, se tiene

$$\begin{aligned}
 q_2 &= \frac{0.75[29(10^6)]}{10\sqrt{2}} [-0.707 \quad -0.707 \quad 0.707 \quad 0.707] \begin{bmatrix} -0.002027 \\ -0.01187 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.75[29(10^6)][6.5(10^{-6})](150) \\
 &= -6093 \text{ lb} = -6.09 \text{ k} \qquad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

Observe que el aumento de temperatura en el elemento 2 no causará ninguna reacción en la armadura puesto que en lo externo la armadura es estáticamente determinada. Para demostrar esto, considere la expansión de la matriz de la ecuación (1) para determinar las reacciones. Con base en los resultados de los desplazamientos, se tiene

$$\begin{aligned}
 Q_6 &= AE[-0.1(-0.002027) + 0 - 0.035(-0.002027) \\
 &\quad + 0.035(-0.009848) - 0.035(-0.002027)] + AE[0] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_7 &= AE[-0.035(-0.002027) - 0.035(-0.01187) \\
 &\quad - 0.1(-0.002027) + 0 + 0] + AE[-0.000689325] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_8 &= AE[-0.035(-0.002027) - 0.035(-0.01187) + 0 \\
 &\quad + 0 - 0.1(-0.002027)] + AE[-0.000689325] = 0
 \end{aligned}$$

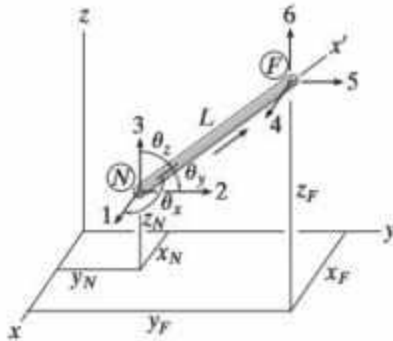


Figura 14-17

14.9 Análisis de armaduras espaciales

El análisis de las armaduras espaciales estáticamente determinadas e indeterminadas puede realizarse empleando el mismo procedimiento descrito anteriormente. Sin embargo, para tener en cuenta los aspectos tridimensionales del problema es necesario incluir elementos adicionales en la matriz de transformación T . A este respecto, considere el elemento de una armadura que se muestra en la figura 14-17. La matriz de rigidez para el elemento definida en términos de la coordenada local x' está dada por la ecuación 14-4. Aún más, por la inspección de la figura 14-17, los cosenos directores entre las coordenadas globales y locales pueden encontrarse empleando ecuaciones análogas a las ecuaciones 14-5 y 14-6, es decir,

$$\begin{aligned}\lambda_x &= \cos \theta_x = \frac{x_F - x_N}{L} \\ &= \frac{x_F - x_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2 + (z_F - z_N)^2}}\end{aligned}\quad (14-31)$$

$$\begin{aligned}\lambda_y &= \cos \theta_y = \frac{y_F - y_N}{L} \\ &= \frac{y_F - y_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2 + (z_F - z_N)^2}}\end{aligned}\quad (14-32)$$

$$\begin{aligned}\lambda_z &= \cos \theta_z = \frac{z_F - z_N}{L} \\ &= \frac{z_F - z_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2 + (z_F - z_N)^2}}\end{aligned}\quad (14-33)$$

Como resultado de la tercera dimensión, la matriz de transformación, ecuación 14-9, se convierte en

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{bmatrix}$$

Si se sustituye esta ecuación y la 14-4 en la ecuación 14-15, $\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$, resulta

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ \lambda_z & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \\ 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{bmatrix}$$

Si se lleva a cabo la multiplicación matricial se obtiene la matriz *simétrica*.

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_z & F_x & F_y & F_z \\ \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y & \lambda_x \lambda_z & -\lambda_x^2 & -\lambda_x \lambda_y & -\lambda_x \lambda_z \\ \lambda_y \lambda_x & \lambda_y^2 & \lambda_y \lambda_z & -\lambda_y \lambda_x & -\lambda_y^2 & -\lambda_y \lambda_z \\ \lambda_z \lambda_x & \lambda_z \lambda_y & \lambda_z^2 & -\lambda_z \lambda_x & -\lambda_z \lambda_y & -\lambda_z^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x \lambda_y & -\lambda_x \lambda_z & \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y & \lambda_x \lambda_z \\ -\lambda_y \lambda_x & -\lambda_y^2 & -\lambda_y \lambda_z & \lambda_y \lambda_x & \lambda_y^2 & \lambda_y \lambda_z \\ -\lambda_z \lambda_x & -\lambda_z \lambda_y & -\lambda_z^2 & \lambda_z \lambda_x & \lambda_z \lambda_y & \lambda_z^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (14-34)$$

Esta ecuación representa la *matriz de rigidez del elemento* expresada en *coordenadas globales*. Los números de código a lo largo de las filas y las columnas hacen referencia a las direcciones x, y, z en el extremo cercano, N_x, N_y, N_z , seguidos por los que están en el extremo lejano, F_x, F_y, F_z .

Si se va a programar en computadora, por lo general resulta más eficiente usar la ecuación 14-34 que llevar a cabo la multiplicación matricial $\mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$ para cada elemento. Una forma de ahorrar espacio de almacenamiento en la computadora es inicializar la matriz de rigidez de la "estructura" \mathbf{K} con todos los elementos en cero; después, a medida que se generan los términos de cada matriz de rigidez de los elementos, éstos se colocan directamente en sus respectivas posiciones en \mathbf{K} . Luego de haber desarrollado la matriz de rigidez de la estructura puede seguirse el mismo procedimiento descrito en la sección 14-6 para determinar los desplazamientos en las juntas, las reacciones en los soportes y las fuerzas internas en los elementos.



El marco estructural de este hangar para aeronaves está completamente construido con armaduras, a fin de reducir de manera significativa el peso de la estructura. (Cortesía de Bethlehem Steel Corporation).

REPASO DEL CAPÍTULO

El método de la rigidez es el preferido para analizar estructuras usando una computadora. En primer lugar, es necesario identificar la cantidad de elementos estructurales y sus nodos. Después se establecen las coordenadas globales para toda la estructura y se ubica cada uno de los sistemas coordenados locales de los elementos, de modo que su origen esté en el extremo cercano seleccionado, y de tal manera que el eje x' positivo se extienda hacia el extremo lejano.

La formulación del método requiere que primero se construya cada elemento de la matriz de rigidez \mathbf{k}' . Ésta relaciona las cargas en los extremos del elemento, \mathbf{q} , con sus desplazamientos, \mathbf{d} , donde $\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{d}$. Después, con base en la matriz de transformación \mathbf{T} , los desplazamientos locales \mathbf{d} se relacionan con los desplazamientos globales \mathbf{D} , donde $\mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{D}$. Además, las fuerzas locales \mathbf{q} se transforman en las fuerzas globales \mathbf{Q} empleando la matriz de transformación \mathbf{T} , es decir, $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}$. Cuando estas matrices se combinan, se obtiene la matriz de rigidez del elemento \mathbf{K} en coordenadas globales, $\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$. Si se ensamblan todas las matrices de rigidez de los elementos, se obtiene la matriz de rigidez \mathbf{K} para toda la estructura.

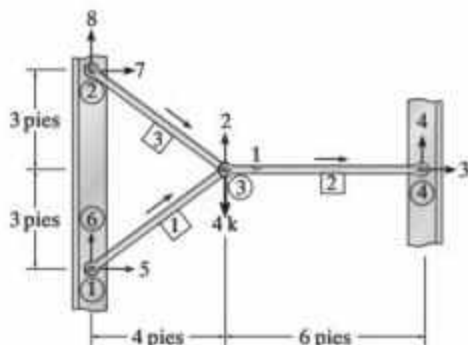
Los desplazamientos y las cargas sobre la estructura se obtienen al partir $\mathbf{Q} = \mathbf{K} \mathbf{D}$, de modo que los desplazamientos desconocidos se determinan con base en $\mathbf{D}_u = [\mathbf{K}_{11}]^{-1} \mathbf{Q}_u$, siempre que los soportes no se desplacen. Por último, las reacciones en los soportes se obtienen de $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21} \mathbf{D}_u$, y cada fuerza de elemento se encuentra a partir de $\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D}$.

PROBLEMAS

14-1. Determine la matriz de rigidez \mathbf{K} para el ensamble. Considere que $A = 0.5 \text{ pulg}^2$ y que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$ para cada elemento.

14-2. Determine los desplazamientos horizontales y verticales en la junta ③ del ensamble del problema 14-1.

14 **14-3.** Determine la fuerza en cada elemento del ensamble del problema 14-1.

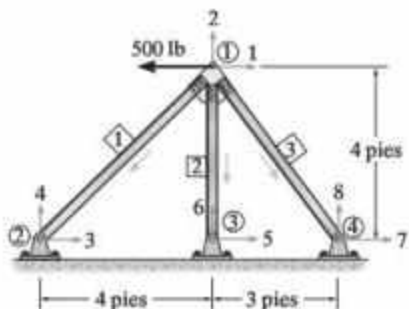


Probs. 14-1/14-2/14-3

***14-4.** Determine la matriz de rigidez \mathbf{K} para la armadura. Considere que $A = 0.75 \text{ pulg}^2$ y que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$.

14-5. Determine el desplazamiento horizontal de la junta ① y la fuerza en el elemento [2]. Considere que $A = 0.75 \text{ pulg}^2$ y que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$.

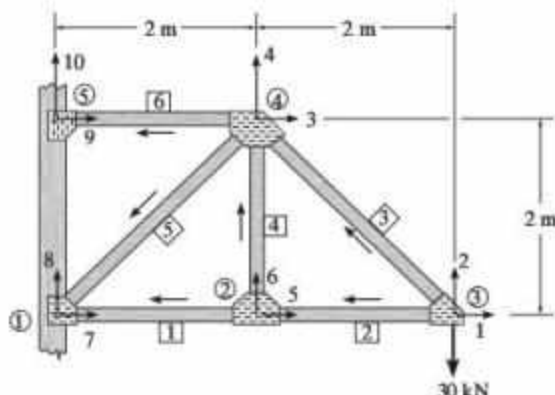
14-6. Determine la fuerza en el elemento [2] si su temperatura se incrementa en 100°F . Considere que $A = 0.75 \text{ pulg}^2$, $E = 29(10^3) \text{ ksi}$, $\alpha = 6.5(10^{-6})/^\circ\text{F}$.



Probs. 14-4/14-5/14-6

14-7. Determine la matriz de rigidez \mathbf{K} para la armadura. Considere que $A = 0.0015 \text{ m}^2$ y que $E = 200 \text{ GPa}$ para cada elemento.

***14-8.** Determine el desplazamiento vertical en la junta ② y la fuerza en el elemento [5]. Considere que $A = 0.0015 \text{ m}^2$ y que $E = 200 \text{ GPa}$.

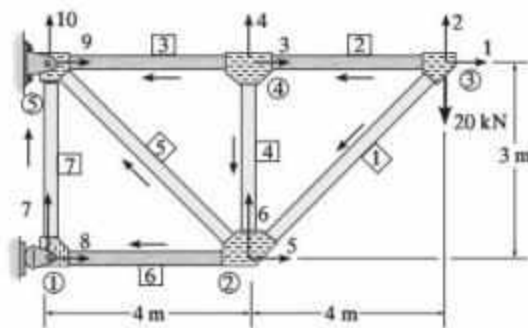


Probs. 14-7/14-8

14-9. Determine la matriz de rigidez \mathbf{K} para la armadura. Considere que $A = 0.0015 \text{ m}^2$ y que $E = 200 \text{ GPa}$ para cada elemento.

14-10. Determine la fuerza en el elemento [5]. Considere que $A = 0.0015 \text{ m}^2$ y que $E = 200 \text{ GPa}$ para cada elemento.

14-11. Determine el desplazamiento vertical del nodo ②, si el elemento [6] era 10 mm más largo de lo esperado antes de ajustarlo en la armadura. Para obtener la solución retire la carga de 20 k. Considere que $A = 0.0015 \text{ m}^2$ y que $E = 200 \text{ GPa}$ para cada elemento.

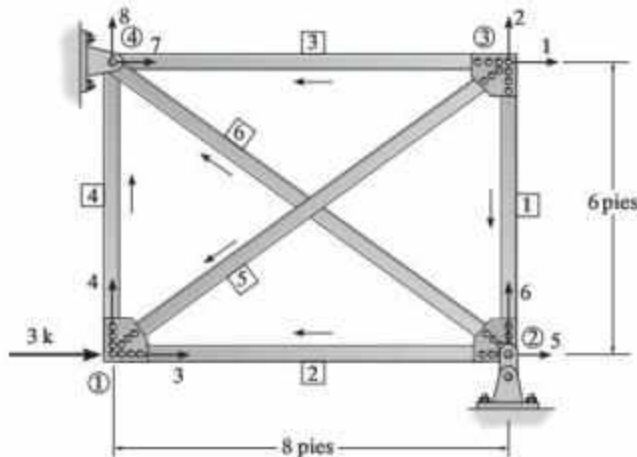


Probs. 14-9/14-10/14-11

***14-12.** Determine la matriz de rigidez \mathbf{K} para la armadura. Considere que $A = 2 \text{ pulg}^2$ y que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$.

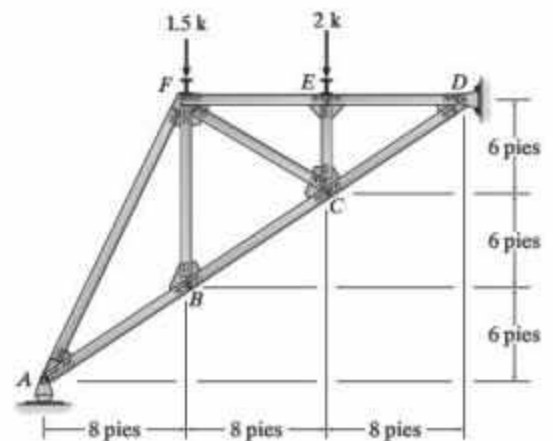
14-13. Determine el desplazamiento horizontal de la junta ② y la fuerza en el elemento [5]. Considere que $A = 2 \text{ pulg}^2$ y que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$. No tome en cuenta el eslabón corto en ②.

14-14. Determine la fuerza en el elemento [3] si el elemento era 0.025 pulgadas más corto de lo esperado antes de ajustarse en la armadura. Considere que $A = 2 \text{ pulg}^2$ y que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$. No tome en cuenta el eslabón corto en ②.



Probs. 14-12/14-13/14-14

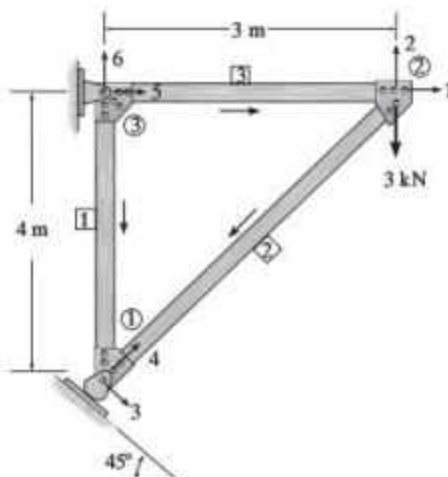
14-17. Use un programa de computadora para determinar las reacciones sobre la armadura y la fuerza en cada elemento. AE es constante.



Prob. 14-17

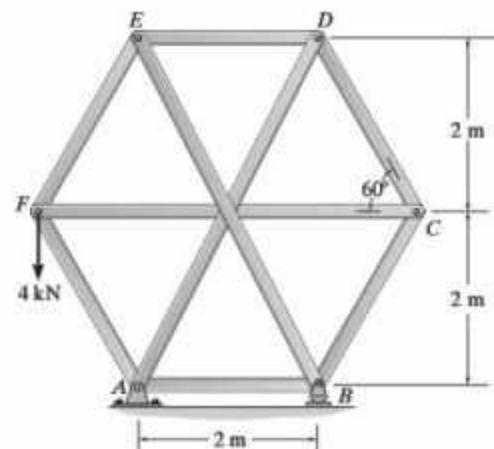
14-15. Determine la matriz de rigidez \mathbf{K} para la armadura. AE es constante.

***14-16.** Determine el desplazamiento vertical de la junta ② y las reacciones en los soportes. AE es constante.



Probs. 14-15/14-16

14-18. Use un programa de computadora para determinar las reacciones sobre la armadura y la fuerza en cada elemento. AE es constante.



Prob. 14-18



Las traveses de este puente son continuas sobre los pilotes, y las cargas estáticamente indeterminadas en ellas pueden determinarse utilizando el método de la rigidez.

Análisis de vigas utilizando el método de la rigidez

En este capítulo se extenderán los conceptos presentados en el capítulo anterior y se aplicarán al análisis de vigas. Se podrá ver que una vez desarrolladas la matriz de rigidez y la matriz de transformación del elemento, el procedimiento para su aplicación es exactamente el mismo que para las armaduras. Se prestará atención especial a los casos de asentamientos y temperaturas diferenciales.

15.1 Comentarios preliminares

Antes de mostrar cómo se aplica el método de la rigidez a las vigas, primero se analizarán algunos conceptos y definiciones preliminares relacionados con estos elementos.

Identificación del elemento y el nodo. Con el fin de aplicar el método de la rigidez a las vigas, primero debe determinarse cómo subdividir la viga en los elementos finitos que la componen. En general, cada elemento debe estar libre de carga y tener una sección prismática. Por esta razón los nodos de cada elemento se localizan en un soporte o en los puntos donde los elementos se conectan entre sí, o se aplica una fuerza externa; donde el área de la sección transversal cambia súbitamente, o donde debe determinarse el desplazamiento vertical o de rotación en un punto. Por ejemplo, considere la viga de la figura 15-1a. Si se usa el mismo esquema que para las armaduras, los cuatro nodos se especifican en forma numérica dentro de un círculo y los tres elementos se identifican numéricamente dentro de un cuadrado. Observe también que los extremos “cercano” y “lejano” de cada elemento se identifican mediante flechas escritas a lo largo de cada elemento.

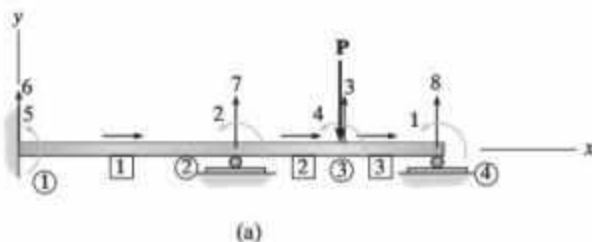


Figura 15-1

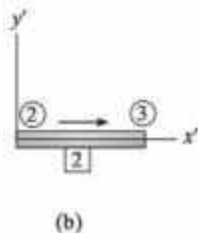


Figura 15-1

Coordenadas globales y del elemento. El sistema de coordenadas globales se identificará utilizando los ejes x, y, z , que por lo general tienen su origen en un nodo y se posicionan de modo que los nodos en otros puntos de la viga tengan coordenadas positivas, figura 15-1a. Las coordenadas locales o del elemento x', y', z' tienen su origen en el extremo "cercano" de cada elemento, y el eje positivo x' se dirige hacia el extremo "lejano". En la figura 15-1b se muestran estas coordenadas para el elemento 2. En ambos casos se ha empleado un sistema de coordenadas diestro, de modo que si los dedos de la mano derecha se cierran del eje x (x') hacia el eje y (y'), el pulgar apunta en la dirección positiva del eje z (z'), que se dirige hacia afuera de la página. Tenga en cuenta que para cada componente de la viga los ejes x y x' serán colineales y que las coordenadas globales y del elemento serán todas paralelas. Por lo tanto, a diferencia del caso de las armaduras, aquí no será necesario desarrollar matrices de transformación entre estos sistemas de coordenadas.

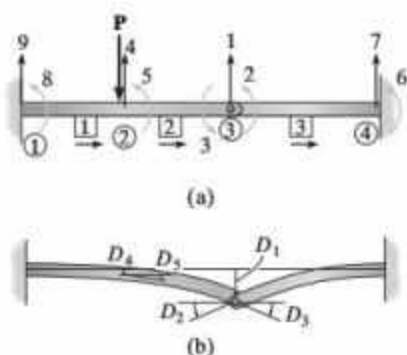


Figura 15-2

Indeterminación cinemática. Una vez que se han identificado los elementos y los nodos, y que se ha establecido el sistema de coordenadas globales, pueden determinarse los grados de libertad para la viga y su determinación cinemática. Si se toman en cuenta los efectos de la flexión y la fuerza cortante, entonces *cada nodo* en una viga puede tener dos grados de libertad; es decir, un desplazamiento vertical y una rotación. Como en el caso de las armaduras, estos desplazamientos lineales y de rotación se identifican por códigos numéricos. Los números más bajos de código se usarán para identificar los desplazamientos desconocidos (grados de libertad no restringidos), y las cifras más altas se utilizarán para identificar los desplazamientos conocidos (grados de libertad restringidos). Recuerde que la razón para elegir este método de identificación se relaciona con la consiguiente comodidad al realizar la partición de la matriz de rigidez de la estructura, de modo que los desplazamientos desconocidos puedan determinarse de la manera más directa.

Para mostrar un ejemplo de etiquetado con códigos numéricos, considere de nuevo la viga continua que se muestra en la figura 15-1a. Aquí, la viga es cinemáticamente indeterminada de cuarto grado. Hay ocho grados de libertad, por lo cual los números de código del 1 al 4 representan los desplazamientos desconocidos y los números del 5 al 8 representan los desplazamientos conocidos, que en este caso son todos iguales a cero. Como otro ejemplo, la viga de la figura 15-2a puede subdividirse en tres elementos y cuatro nodos. En particular, observe que la articulación interna en el nodo 3 se deforma en la misma cantidad para los elementos 2 y 3; sin embargo, la rotación en el extremo de cada elemento es diferente. Por eso se usan tres números de código para mostrar estas deflexiones. Aquí hay nueve grados de libertad, cinco de los cuales son desconocidos, como se muestra en la figura 15-2b, y cuatro conocidos; de nuevo, todos son iguales a cero. Por último, tenga en cuenta el mecanismo deslizante usado en la viga de la figura 15-3a. Aquí la deflexión de la viga se muestra en la figura 15-3b y, por lo tanto, hay cinco componentes desconocidos de deflexión etiquetados con los números de código más bajos. La viga es cinemáticamente indeterminada de quinto grado.

El desarrollo del método de la rigidez para las vigas sigue un procedimiento similar al utilizado para las armaduras. En primer lugar debe establecerse la matriz de rigidez de cada elemento, después estas matrices se combinan para formar la matriz de rigidez de la viga o de la estructura. Si se usa la ecuación matricial de la estructura, entonces puede pro-

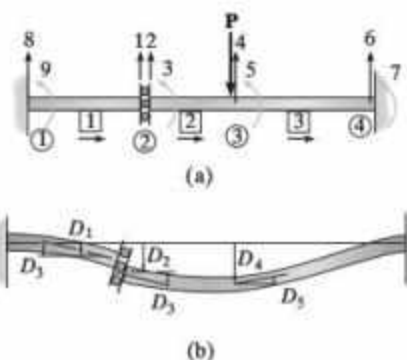


Figura 15-3

cederse a determinar los desplazamientos desconocidos en los nodos y de esta forma determinar las reacciones sobre la viga y la fuerza cortante y el momento internos en los nodos.

15.2 Matriz de rigidez de la viga-elemento

En esta sección se desarrollará la matriz de rigidez para un componente de viga o un elemento que tenga una sección transversal constante y esté referenciado al sistema de coordenadas locales x' , y' , z' , figura 15-4. El origen de las coordenadas se localiza en el extremo "cercano" N , y el eje x' positivo se extiende hacia el extremo "lejano" F . Hay dos reacciones en cada extremo del elemento, que consisten en las fuerzas cortantes $q_{Ny'}$ y $q_{Fy'}$ y en los momentos flectores $q_{Nz'}$ y $q_{Fz'}$. Estas cargas actúan en las direcciones coordenadas positivas. En particular, los momentos $q_{Nz'}$ y $q_{Fz'}$ son positivos en sentido antihorario, puesto que por la regla de la mano derecha los vectores de momento están dirigidos a lo largo del eje z' positivo, el cual se dirige hacia afuera de la página.

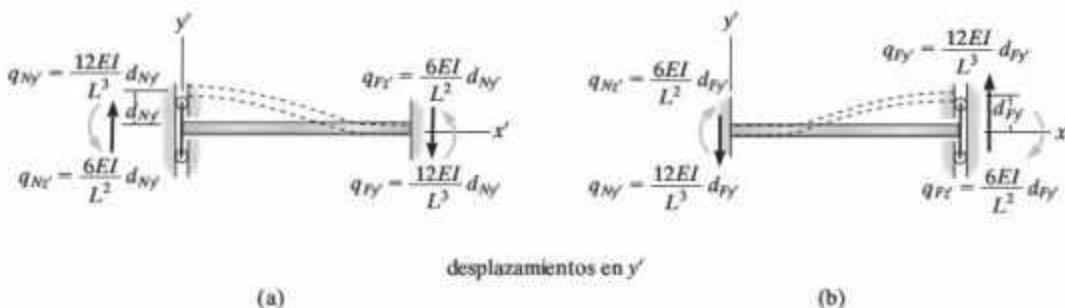
Los desplazamientos lineales y angulares asociados con estas cargas también siguen esta misma convención de signos positivos. Ahora se impondrán cada uno de estos desplazamientos por separado y después se determinarán las cargas que actúan sobre el elemento, causadas por cada desplazamiento.



convención de signos positivos

Figura 15-4

Desplazamientos en y' . Cuando se impone un desplazamiento positivo $d_{Ny'}$ mientras se evitan otros posibles desplazamientos, se crean fuerzas cortantes y momentos de flexión resultantes como los que se muestran en la figura 15-5a. En particular, el momento se ha desarrollado en la sección 11.2 como la ecuación 11.5. Del mismo modo, cuando se impone $d_{Fy'}$, las fuerzas cortantes y momentos flexionantes necesarios son como se muestra en la figura 15-5b.



desplazamientos en y'

Figura 15-5

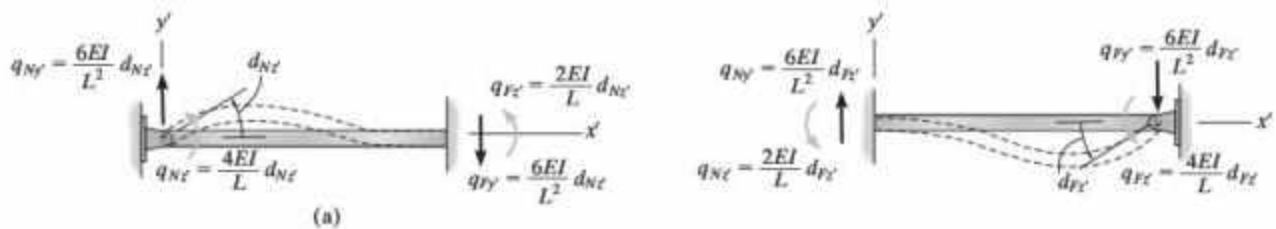


Figura 15-6

Rotaciones en z' . Si se impone una rotación positiva $d_{Nz'}$ mientras se evitan todos los otros desplazamientos posibles, las fuerzas cortantes y los momentos requeridos para la deformación se muestran en la figura 15-6a. En particular, el momento resultante se desarrolló en la sección 11-2 como las ecuaciones 11-1 y 11-2. Del mismo modo, cuando se impone $d_{Fz'}$, las cargas resultantes son como se muestra en la figura 15-6b.

Por superposición, si se suman los resultados anteriores de las figuras 15-5 y 15-6, las cuatro relaciones de carga-desplazamiento resultantes para el elemento pueden expresarse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fy'} \\ d_{Fz'} \end{bmatrix} \quad (15-1)$$

Estas ecuaciones también pueden escribirse de manera abreviada como

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} \mathbf{d} \quad (15-2)$$

La matriz simétrica \mathbf{k} en la ecuación 15-1 se conoce como la *matriz de rigidez del elemento*. Los 16 coeficientes de influencia k_{ij} que la componen representan los desplazamientos del elemento por la fuerza cortante y por el momento flexionante. Físicamente, estos coeficientes representan la carga sobre el elemento cuando éste experimenta un desplazamiento unitario específico. Por ejemplo, si $d_{Ny'} = 1$, figura 15-5a, mientras que todos los otros desplazamientos son iguales a cero, el elemento estará sometido únicamente a las cuatro cargas indicadas en la primera columna de la matriz \mathbf{k} . De manera similar, las otras columnas de la matriz \mathbf{k} son las cargas de elemento para los desplazamientos unitarios identificados mediante los números de código de los grados de libertad que aparecen arriba de las columnas. Con base en el desarrollo se han satisfecho tanto el equilibrio como la compatibilidad de los desplazamientos. Además, debe hacerse notar que esta matriz es la *misma* en coordenadas locales y en coordenadas globales puesto que los ejes x' , y' , z' son paralelos a los ejes x , y , z ; por lo tanto, no se requieren matrices de transformación entre las coordenadas.

15.3 Matriz de rigidez de la viga-estructura

Una vez que se han encontrado todas las matrices de rigidez de los elementos, es necesario ensamblarlas en la matriz de rigidez de la estructura **K**. Este proceso depende de conocer primero la ubicación de cada término de la matriz de rigidez de los elementos. Aquí las filas y columnas de cada matriz **k** (ecuación 15-1) se identifican por los dos números de código en el extremo cercano del elemento (N_y, N_z), seguidos por los del otro extremo (F_y, F_z). Por lo tanto, al ensamblar las matrices cada elemento debe colocarse en la misma ubicación de la matriz **K**. De esta manera, **K** tendrá un orden que será igual al número de código mayor asignado a la viga, puesto que éste representa el total de grados de libertad. También, cuando hay varios elementos conectados a un nodo, sus coeficientes de influencia de la rigidez del elemento tendrán la misma posición en la matriz **K** y por lo tanto deben sumarse algebraicamente para determinar el coeficiente de influencia de la rigidez nodal para la estructura. Esto es necesario porque cada coeficiente representa la resistencia de la estructura nodal en una dirección particular (y' o z') cuando se produce un desplazamiento unitario (y' o z'), ya sea en el mismo nodo o en otro. Por ejemplo, K_{23} representa la carga en la dirección y en la ubicación del número de código "2" cuando ocurre un desplazamiento unitario en la dirección z en la ubicación del número de código "3".

15

15.4 Aplicación del método de la rigidez al análisis de vigas

Después de determinar la matriz de rigidez de la estructura, las cargas en los nodos de la viga pueden relacionarse con los desplazamientos si se utiliza la ecuación de rigidez de la estructura

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

Aquí **Q** y **D** son matrices columna que representan tanto las cargas conocidas y desconocidas como los desplazamientos. Al hacer la partición de la matriz de rigidez en los elementos conocidos y desconocidos de la carga y el desplazamiento, se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{Q}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \mathbf{D}_k \end{bmatrix}$$

que al expandirla genera las dos ecuaciones

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k \quad (15-3)$$

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k \quad (15-4)$$

Los desplazamientos desconocidos \mathbf{D}_u se determinan a partir de la primera de estas ecuaciones. Si se usan estos valores, pueden calcularse las reacciones de apoyo \mathbf{Q}_u para la segunda ecuación.

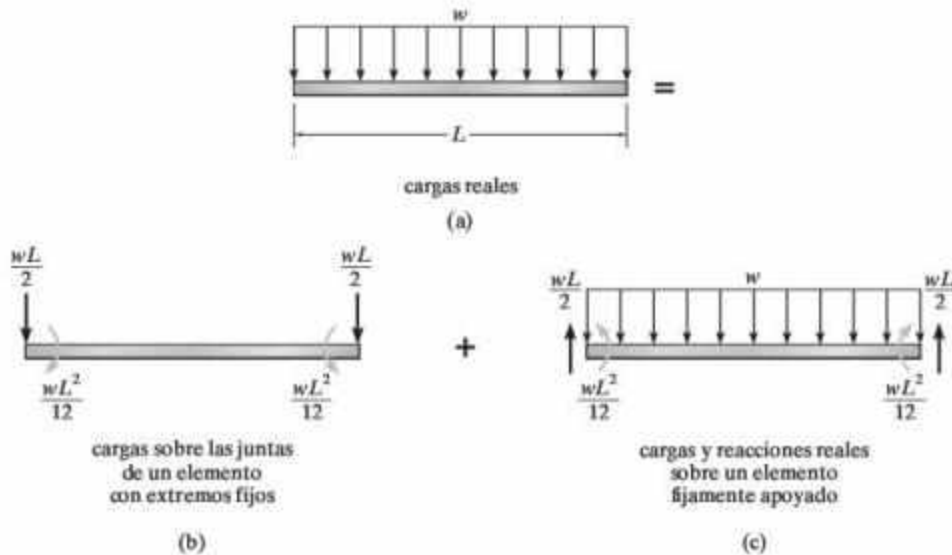


Figura 15-7

Cargas intermedias. Para su aplicación, es importante que los elementos de la viga estén libres de carga en toda su longitud. Esto es necesario puesto que la matriz de rigidez de cada elemento se desarrolló solamente para cargas aplicadas en sus extremos. (Vea la figura 15-4.) Sin embargo, es frecuente que las vigas soporten una carga distribuida y esta condición requiere modificaciones para poder realizar el análisis matricial.

Para manejar este caso, se usará el principio de superposición de una manera similar a la empleada para las armaduras que se estudiaron en la sección 14-8. Para mostrar su aplicación, considere el elemento de viga con longitud L de la figura 15-7a, el cual está sometido a la carga uniforme distribuida w . Primero se aplicarán los momentos de extremo fijo y las reacciones sobre el elemento, los cuales se usarán en el método de la rigidez, figura 15-7b. Se hará referencia a estas cargas como una matriz columna $-q_0$. Después se aplicarán las cargas distribuidas y sus reacciones, figura 15-7c. Las cargas reales en la viga se determinan al sumar estos dos resultados. Las reacciones de extremo fijo para otros casos de carga se dan en el interior de la contraportada. Además de resolver problemas que implican cargas laterales de este tipo, este método también puede usarse para resolver problemas relacionados con los cambios de temperatura o errores de fabricación.

Fuerzas del elemento. La fuerza cortante y el momento en los extremos de cada elemento de la viga pueden determinarse a partir de la ecuación 15-2 y al añadir cualesquier reacciones de extremo fijo q_0 , si el elemento está sometido a una carga intermedia. Se tiene

$$q = kd + q_0 \quad (15-5)$$

Si los resultados son negativos, esto indica que la carga actúa en dirección opuesta a la mostrada en la figura 15-4.

Procedimiento de análisis

El siguiente método proporciona un medio para determinar los desplazamientos, las reacciones en los soportes y las cargas internas de los miembros o elementos finitos de una viga estáticamente determinada o estáticamente indeterminada.

Notación

- Divida la viga en elementos finitos e identifique arbitrariamente cada elemento y sus nodos. Use un número escrito dentro de un círculo para un nodo y un número escrito dentro de un cuadro para un miembro. Por lo general, un elemento se extiende entre los puntos de apoyo, los puntos de cargas concentradas y las juntas, o en los puntos donde deben determinarse las cargas internas o los desplazamientos. Además, los valores de E e I para los elementos que deben ser constantes.
- Especifique en forma simbólica los extremos cercano y lejano de cada elemento al dirigir una flecha a lo largo del elemento, con la punta dirigida hacia el extremo lejano.
- En cada punto nodal, especifique numéricamente los números de código y y z . En todos los casos, use los *números de código más bajos* para identificar todos los grados de libertad no restringidos, seguidos por el resto de los números más altos para identificar los grados de libertad que están restringidos.
- Con base en el problema, establezca los desplazamientos conocidos \mathbf{D}_k y las cargas externas conocidas \mathbf{Q}_k . Incluya cualesquier cargas de extremo fijo *invertidas*, si un elemento soporta una carga intermedia.

Matriz de rigidez de la estructura

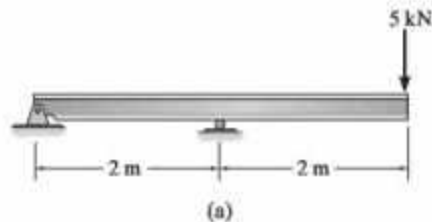
- Aplique la ecuación 15-1 para determinar la matriz de rigidez para cada elemento expresada en coordenadas globales.
- Después de determinar la matriz de rigidez de cada elemento, y cuando las filas y columnas estén identificadas con los números de código adecuados, ensamble las matrices para determinar la matriz de rigidez de la estructura \mathbf{K} . Como una comprobación parcial, las matrices de rigidez de todos los elementos y la matriz de rigidez de la estructura deben ser *simétricas*.

Desplazamientos y cargas

- Parta la ecuación de rigidez de la estructura y realice la multiplicación matricial con el fin de determinar los desplazamientos desconocidos \mathbf{D}_u y las reacciones en los soportes desconocidas \mathbf{Q}_u .
- La fuerza cortante y el momento internos \mathbf{q} en los extremos de cada elemento de viga pueden determinarse a partir de la ecuación 15-5, tomando en cuenta las cargas de extremo fijo adicionales.

EJEMPLO 15.1

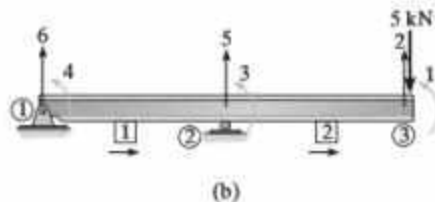
Determine las reacciones en los soportes de la viga que se muestra en la figura 15-8a. EI es constante.

**Figura 15-8****SOLUCIÓN**

Notación. La viga tiene dos elementos y tres nodos, que se identifican en la figura 15-8b. Los números de código del 1 al 6 se indican de forma que los números más bajos 1-4 identifican los grados de libertad no restringidos.

Las matrices de la carga y el desplazamiento conocidos son

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}$$



Matrices de rigidez de los elementos. Cada una de las dos matrices de rigidez de los elementos se determina a partir de la ecuación 15-1. Observe con cuidado cómo se establecen los números de código para cada columna y fila.

$$\mathbf{k}_1 = EI \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 3 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{matrix} \quad \mathbf{k}_2 = EI \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Desplazamientos y cargas. Ahora es posible ensamblar estos elementos en la matriz de rigidez de la estructura. Por ejemplo, el elemento $K_{11} = 0 + 2 = 2$, $K_{55} = 1.5 + 1.5 = 3$, etcétera. Por lo tanto,

$$Q = KD$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 2 & -1.5 & 1 & 0 & 1.5 & 0 \\ -1.5 & 1.5 & -1.5 & 0 & -1.5 & 0 \\ 1 & -1.5 & 4 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1.5 & 1.5 \\ \hline 1.5 & -1.5 & 0 & -1.5 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices se parten de la manera que se muestra. Si se realiza la multiplicación para las primeras cuatro filas, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= 2D_1 - 1.5D_2 + D_3 + 0 \\ -\frac{5}{EI} &= -1.5D_1 + 1.5D_2 - 1.5D_3 + 0 \\ 0 &= D_1 - 1.5D_2 + 4D_3 + D_4 \\ 0 &= 0 + 0 + D_3 + 2D_4 \end{aligned}$$

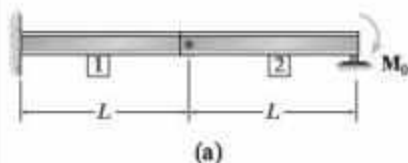
Resolviendo,

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{16.67}{EI} \\ D_2 &= -\frac{26.67}{EI} \\ D_3 &= -\frac{6.67}{EI} \\ D_4 &= \frac{3.33}{EI} \end{aligned}$$

Con base en estos resultados y al multiplicar las dos últimas filas, resulta

$$\begin{aligned} Q_5 &= 1.5EI \left(-\frac{16.67}{EI} \right) - 1.5EI \left(-\frac{26.67}{EI} \right) + 0 - 1.5EI \left(\frac{3.33}{EI} \right) \\ &= 10 \text{ kN} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

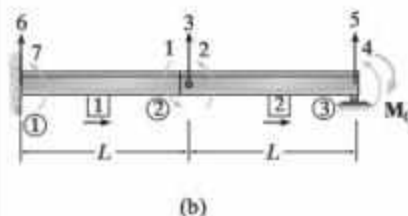
$$\begin{aligned} Q_6 &= 0 + 0 + 1.5EI \left(-\frac{6.67}{EI} \right) + 1.5EI \left(\frac{3.33}{EI} \right) \\ &= -5 \text{ kN} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 15.2

Determine la fuerza cortante y el momento en el miembro 1 de la viga compuesta que se muestra en la figura 15-9a. EI es constante.

SOLUCIÓN

Notación. Cuando la viga se deforma, el pasador interno permitirá una sola deflexión, sin embargo, la pendiente de cada miembro conectado será diferente. Además, se presentará una pendiente en el rodillo. Estos cuatro grados de libertad desconocidos se etiquetan con los números de código 1, 2, 3 y 4, figura 15-9b.

**Figura 15-9**

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

Matrices de rigidez de los miembros. Si se aplica la ecuación 15-1 a cada miembro, de acuerdo con los números de código que se muestran en la figura 15-9b, se tiene

$$\mathbf{k}_1 = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \quad \mathbf{k}_2 = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{matrix}$$

Desplazamientos y cargas. La matriz de rigidez de la estructura se forma al ensamblar los elementos de las matrices de rigidez de los miembros. Si se aplica la ecuación matricial de la estructura, resulta que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{D}$$

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -M_0 \\
 Q_5 \\
 Q_6 \\
 Q_7
 \end{bmatrix}
 = EI
 \begin{bmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 \frac{4}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\
 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 \\
 -\frac{6}{L^2} & \frac{6}{L^2} & \frac{24}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\
 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & 0 \\
 \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & 0 & 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\
 \frac{2}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 D_1 \\
 D_2 \\
 D_3 \\
 D_4 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7
 \end{array}$$

Al multiplicar las cuatro primeras filas para determinar el desplazamiento se obtiene

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{4}{L}D_1 - \frac{6}{L^2}D_3 \\
 0 &= \frac{4}{L}D_2 + \frac{6}{L^2}D_3 + \frac{2}{L}D_4 \\
 0 &= -\frac{6}{L^2}D_1 + \frac{6}{L^2}D_2 + \frac{24}{L^3}D_3 + \frac{6}{L^2}D_4 \\
 -M_0 &= \frac{2}{L}D_2 + \frac{6}{L^2}D_3 + \frac{4}{L}D_4
 \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{M_0 L}{2EI} \\
 D_2 &= -\frac{M_0 L}{6EI} \\
 D_3 &= \frac{M_0 L^2}{3EI} \\
 D_4 &= -\frac{2M_0 L}{3EI}
 \end{aligned}$$

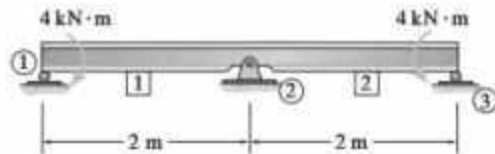
Con base en estos resultados, la reacción Q_5 se obtiene de la multiplicación de la quinta fila.

$$\begin{aligned}
 Q_5 &= -\frac{6EI}{L^2} \left(-\frac{M_0 L}{6EI} \right) - \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{M_0 L^2}{3EI} \right) - \frac{6EI}{L^2} \left(-\frac{2M_0 L}{3EI} \right) \\
 Q_5 &= \frac{M_0}{L} \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

Este resultado puede comprobarse fácilmente si se aplica la estática al miembro [2].

EJEMPLO 15.3

La viga de la figura 15-10a está sometida a los dos momentos de par. Si el soporte central ② se asienta 1.5 mm, determine las reacciones en los soportes. Suponga que los soportes de rodillo en ① y ③ pueden jalar o empujar la viga. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$ y que $I = 22 (10^{-6}) \text{ m}^4$.

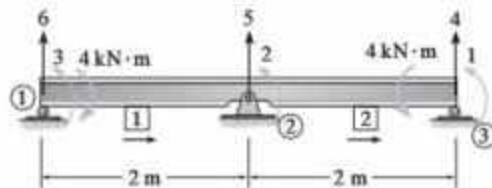


(a)

Figura 15-10**SOLUCIÓN**

Notación. La viga tiene dos elementos y tres grados de libertad desconocidos. Éstos se etiquetan con los números de código más bajo, figura 15-10b. Aquí las matrices de carga y desplazamiento conocidos son

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0015 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$



(b)

Matrices de rigidez de los miembros. Las matrices de rigidez de los miembros se determinan mediante la ecuación 15-1, de acuerdo con los números de código y las direcciones de los miembros que se muestran en la figura 15-10b. Se tiene,

$$\mathbf{k}_1 = EI \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 & 2 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = EI \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{matrix}$$

Desplazamientos y cargas. Si se ensambla la matriz de rigidez de la estructura y se escribe la ecuación de rigidez de la estructura, resulta

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1.5 & 1.5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1.5 & 1.5 \\ -1.5 & -1.5 & 0 & 1.5 & -1.5 & 0 \\ 1.5 & 0 & -1.5 & -1.5 & 3 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 0 & -1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ -0.0015 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver los desplazamientos desconocidos,

$$\frac{4}{EI} = 2D_1 + D_2 + 0D_3 - 1.5(0) + 1.5(-0.0015) + 0$$

$$0 = 1D_1 + 4D_2 + 1D_3 - 1.5(0) + 0 + 0$$

$$\frac{-4}{EI} = 0D_1 + 1D_2 + 2D_3 + 0 - 1.5(-0.0015) + 0$$

Si se sustituye $EI = 200(10^6)(22)(10^6)$ y se resuelve,

$$D_1 = 0.001580 \text{ rad}, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = -0.001580 \text{ rad}$$

Por lo tanto, con base en estos resultados, las reacciones en los soportes son

$$Q_4 = 200(10^6)22(10^6)[-1.5(0.001580) - 1.5(0) + 0 + 1.5(0) - 1.5(-0.0015) + 0] = -0.525 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$Q_5 = 200(10^6)22(10^6)[1.5(0.001580) + 0 - 1.5(-0.001580) - 1.5(0) + 3(-0.0015) - 1.5(0)] = 1.05 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$Q_6 = 200(10^6)22(10^6)[0 + 1.5(0) + 1.5(-0.001580) + 0 - 1.5(-0.0015) + 1.5(0)] = -0.525 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 15.4

Determine el momento desarrollado en el soporte *A* de la viga que se muestra en la figura 15-11a. Suponga que los soportes de rodillo pueden jalar o empujar la viga. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi y que $I = 510$ pulg⁴.

SOLUCIÓN

Notación. Aquí, la viga tiene dos grados de libertad no restringidos, identificados por los números de código 1 y 2.

El análisis matricial requiere que la carga externa se aplique en los nodos y, por lo tanto, las cargas distribuidas y concentradas se reemplazan por sus momentos de extremo fijo equivalentes, los cuales se determinan a partir de la tabla que aparece en el interior de la contraportada. (Vea el ejemplo 11.2.) Observe que no hay cargas externas colocadas en ① y no hay fuerzas externas verticales ubicadas en ②, puesto que las reacciones en los números de código 3, 4 y 5 *deben ser desconocidos* en la matriz de carga. Si se usa superposición, los resultados del análisis matricial para las cargas de la figura 15-11b se modificarán posteriormente con las cargas de la figura 15-11c. A partir de la figura 15-11b, las matrices del desplazamiento conocido y la carga conocida son

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 144 \\ 1008 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Matrices de rigidez de los miembros. Cada una de las dos matrices de rigidez de los miembros se determina a partir de la ecuación 15-1.

Elemento 1:



$$\begin{aligned} \frac{12EI}{L^3} &= \frac{12(29)(10^3)(510)}{[24(12)]^3} = 7.430 \\ \frac{6EI}{L^2} &= \frac{6(29)(10^3)(510)}{[24(12)]^2} = 1069.9 \\ \frac{4EI}{L} &= \frac{4(29)(10^3)(510)}{24(12)} = 205\,417 \\ \frac{2EI}{L} &= \frac{2(29)(10^3)(510)}{24(12)} = 102\,708 \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 7.430 & 1069.9 & -7.430 & 1069.9 \\ 1069.9 & 205\,417 & -1069.9 & 102\,708 \\ -7.430 & -1069.9 & 7.430 & -1069.9 \\ 1069.9 & 102\,708 & -1069.9 & 205\,417 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}$$

Elemento 2:



$$\begin{aligned} \frac{12EI}{L^3} &= \frac{12(29)(10^3)(510)}{[8(12)]^3} = 200.602 \\ \frac{6EI}{L^2} &= \frac{6(29)(10^3)(510)}{[8(12)]^2} = 9628.91 \end{aligned}$$

Figura 15-11

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(29)(10^3)(510)}{8(12)} = 616\,250$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(29)(10^3)(510)}{8(12)} = 308\,125$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} & 5 & 2 & 6 & 1 \\ \begin{bmatrix} 200.602 & 9628.91 & -200.602 & 9628.91 \\ 9628.91 & 616\,250 & -9628.91 & 308\,125 \\ -200.602 & -9628.91 & 200.602 & -9628.91 \\ 9628.91 & 308\,125 & -9628.91 & 616\,250 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Desplazamientos y cargas. Se requiere

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

$$\begin{bmatrix} 144 \\ 1008 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{bmatrix} 616\,250 & 308\,125 & 0 & 0 & 9628.91 & -9628.91 \\ 308\,125 & 821\,667 & 102\,708 & 1069.9 & 8559.01 & -9628.91 \\ 0 & 102\,708 & 205\,417 & 1069.9 & -1069.9 & 0 \\ 0 & 1069.9 & 1069.9 & 7.430 & -7.430 & 0 \\ 9628.91 & 8559.01 & -1069.9 & -7.430 & 208.03 & -200.602 \\ -9628.91 & -9628.91 & 0 & 0 & -200.602 & 200.602 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Resolviendo de la manera usual,

$$144 = 616\,250D_1 + 308\,125D_2$$

$$1008 = 308\,125D_1 + 821\,667D_2$$

$$D_1 = -0.4673(10^{-3}) \text{ pulg}$$

$$D_2 = 1.40203(10^{-3}) \text{ pulg}$$

Por lo tanto,

$$Q_3 = 0 + 102\,708(1.40203)(10^{-3}) = 144 \text{ k} \cdot \text{pie} = 12 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

El momento real en A debe incluir la *reacción* fijamente apoyada de +96 k · pie que se muestra en la figura 15-11c, junto con el resultado calculado para Q_3 . Por tanto,

$$M_{AB} = 12 \text{ k} \cdot \text{pie} + 96 \text{ k} \cdot \text{pie} = 108 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

Este resultado se compara con el determinado en el ejemplo 11-2.

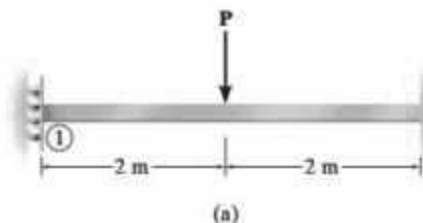
Aunque no es necesario aquí, puede determinarse el momento interno y la fuerza corte interna en B al considerar, por ejemplo, el miembro 1 y el nodo 2, figura 15-11b. El resultado requiere expandir

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{k}_1 \mathbf{d} + (\mathbf{q}_0)_1$$

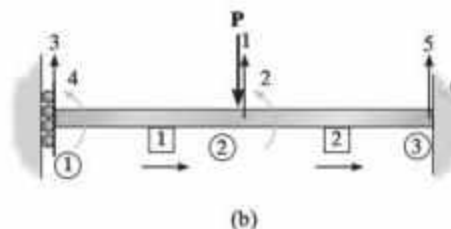
$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 4 & 3 & 5 & 2 \\ \begin{bmatrix} 7.430 & 1069.9 & -7.430 & 1069.9 \\ 1069.9 & 205\,417 & -1069.9 & 102\,708 \\ -7.430 & -1069.9 & 7.430 & -1069.9 \\ 1069.9 & 102\,708 & -1069.9 & 205\,417 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.40203 \end{bmatrix} (10^{-3}) + \begin{bmatrix} 24 \\ 1152 \\ 24 \\ -1152 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 15.5

Determine la deflexión en ① y las reacciones sobre la viga que se muestra en la figura 15-12a. EI es constante.

**Figura 15-12****SOLUCIÓN**

Notación. La viga se divide en dos elementos y los nodos y los miembros se identifican siguiendo las direcciones desde el extremo cercano hasta el extremo lejano, figura 15-12b. Las deflexiones desconocidas se muestran en la figura 15-12c. En particular, tenga en cuenta que no ocurre un desplazamiento de rotación D_4 debido a la restricción de rodillos.



Matrices de rigidez de los miembros. Como EI es constante y los miembros son de igual longitud, las matrices de rigidez de los miembros son idénticas. Usando números de código para identificar cada fila y columna, de acuerdo con la ecuación 15-1 y la figura 15-12b, se tiene

$$k_1 = EI \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$k_2 = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Desplazamientos y cargas. Al ensamblar las matrices de rigidez de los miembros en la matriz de rigidez de la estructura, y al aplicar la ecuación matricial de rigidez de la estructura, resulta

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

$$\begin{bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1.5 & -1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 0 & 4 & 1.5 & 1 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 0 & 0 \\ -1.5 & 1 & 1.5 & 2 & 0 & 0 \\ -1.5 & -1.5 & 0 & 0 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si se despejan los desplazamientos se obtiene

$$-\frac{P}{EI} = 3D_1 + 0D_2 - 1.5D_3$$

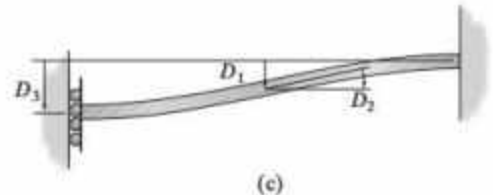
$$0 = 0D_1 + 4D_2 + 1.5D_3$$

$$0 = -1.5D_1 + 1.5D_2 + 1.5D_3$$

$$D_1 = -\frac{1.667P}{EI}$$

$$D_2 = \frac{P}{EI}$$

$$D_3 = -\frac{2.667P}{EI}$$



(c)

Resp.

Observe que los signos de los resultados coinciden con las direcciones de las flechas mostradas en la figura 15-12c. Por lo tanto, a partir de estos resultados, las reacciones son

$$Q_4 = -1.5EI \left(-\frac{1.667P}{EI} \right) + 1EI \left(\frac{P}{EI} \right) + 1.5EI \left(-\frac{2.667P}{EI} \right)$$

$$= -0.5P$$

Resp.

$$Q_5 = -1.5EI \left(-\frac{1.667P}{EI} \right) - 1.5EI \left(\frac{P}{EI} \right) + 0 \left(-\frac{2.667P}{EI} \right)$$

$$= P$$

Resp.

$$Q_6 = 1.5EI \left(-\frac{1.667P}{EI} \right) + 1EI \left(\frac{P}{EI} \right) + 0 \left(-\frac{2.667P}{EI} \right)$$

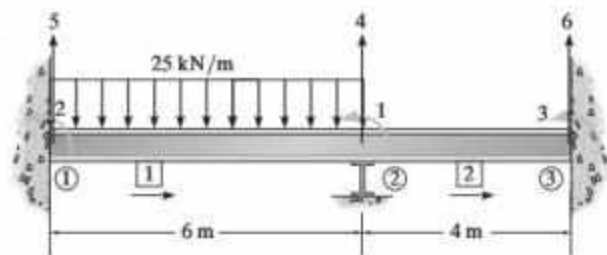
$$= -1.5P$$

Resp.

PROBLEMAS

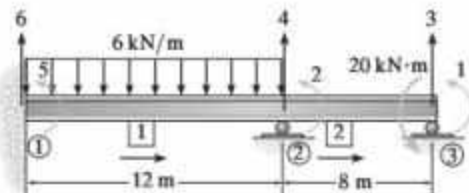
15-1. Determine los momentos en ① y ③. Suponga que ② es un rodillo y que ① y ③ están fijos. EI es constante.

15-2. Determine los momentos en ① y ③ si el soporte ② se mueve 5 mm hacia arriba. Suponga que ② es un rodillo y que ① y ③ están fijos. $EI = 60(10^6) \text{ N} \cdot \text{m}^2$.



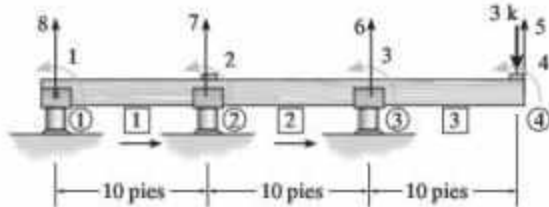
Probs. 15-1/15-2

15-3. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que los rodillos pueden empujar o jalar la viga. EI es constante.



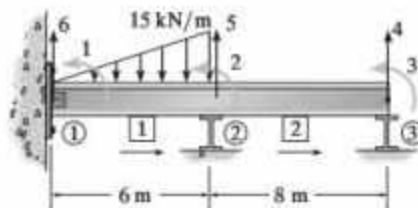
Prob. 15-3

***15-4.** Determine las reacciones en los soportes. Supongamos que ① es un pasador y que ② y ③ son rodillos que pueden empujar o jalar la viga. EI es constante.



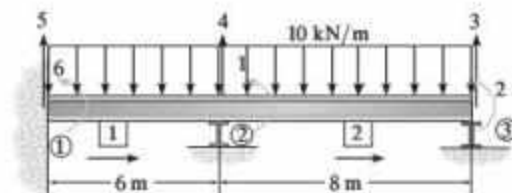
Prob. 15-4

15-5. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que ② y ③ son rodillos y que ① es un pasador. EI es constante.



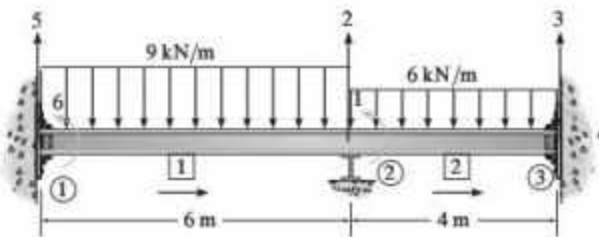
Prob. 15-5

15-6. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que ① está fijo y que ② y ③ son rodillos. EI es constante.



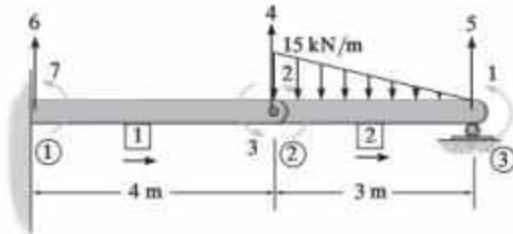
Prob. 15-6

15-7. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que ① y ③ están fijos y que ② es un rodillo. EI es constante.



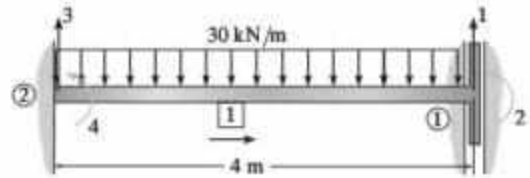
Prob. 15-7

***15-8.** Determine las reacciones en los soportes. EI es constante.



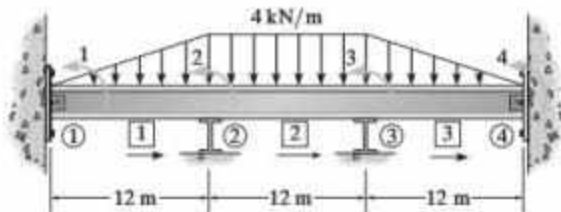
Prob. 15-8

15-11. Determine las reacciones en los soportes. Hay un deslizador liso en ①. EI es constante.



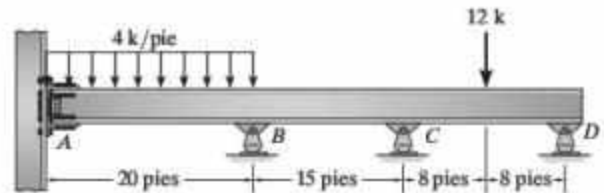
Prob. 15-11

15-9. Determine los momentos en ② y ③. EI es constante. Suponga que ①, ② y ③ son rodillos y que ④ está articulado.



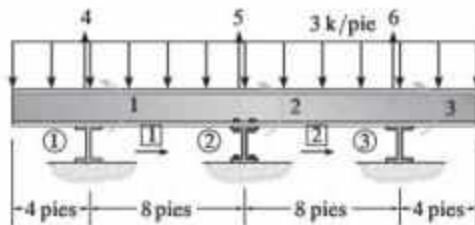
Prob. 15-9

***15-12.** Use un programa de computadora para determinar las reacciones sobre la viga. Suponga que A está fijo. EI es constante.



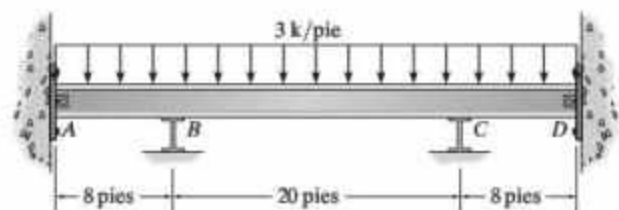
Prob. 15-12

15-10. Determine las reacciones en los soportes. Suponga que ② está articulado y que ① y ③ son rodillos. EI es constante.



Prob. 15-10

15-13. Use un programa de computadora para determinar las reacciones sobre la viga. Suponga que A y D son pasadores y que B y C son rodillos. EI es constante.



Prob. 15-13



El marco de este edificio es estáticamente indeterminado. El análisis de fuerzas puede realizarse utilizando el método de la rigidez.

Análisis de marcos planos utilizando el método de la rigidez

Los conceptos presentados en los capítulos anteriores sobre armaduras y vigas se extenderán en este capítulo y se aplicarán al análisis de marcos. Se verá que el procedimiento para obtener una solución es parecido al de las vigas, pero se requiere el uso de matrices de transformación puesto que los elementos de los marcos están orientados en diferentes direcciones.

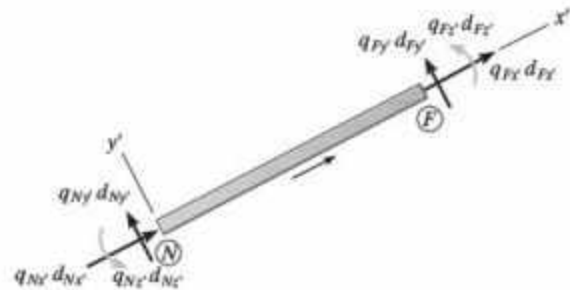
16.1 Matriz de rigidez del marco-elemento

En esta sección se desarrollará la matriz de rigidez para un elemento de marco prismático con referencia al sistema de coordenadas locales x' , y' , z' , figura 16-1. Aquí, el elemento está sometido a las cargas axiales $q_{Nx'}$, $q_{Fx'}$, a las cargas cortantes $q_{Ny'}$, $q_{Fy'}$, y a los momentos flexionantes $q_{Nz'}$, $q_{Fz'}$ en sus extremos cercano y lejano, respectivamente. Estas cargas actúan en las direcciones coordenadas positivas, junto con sus desplazamientos asociados. Como en el caso de las vigas, los momentos $q_{Nz'}$ y $q_{Fz'}$ son positivos en sentido antihorario, ya que por la regla de la mano derecha los vectores de momento se dirigen a lo largo del eje z' positivo, que está fuera de la página.

En los capítulos anteriores se ha considerado cada una de las relaciones carga-desplazamiento causada por estas cargas. La carga axial se analizó con referencia a la figura 14-2, la carga cortante en relación con la figura 15-5, y el momento flexionante con referencia a la figura 15-6. Por superposición, al sumar estos resultados, las seis relaciones resultan-



Este puente peatonal tiene la forma de una "armadura Vendree". Si bien, en sentido estricto, no es una armadura porque no hay diagonales, forma un marco de caja estáticamente indeterminado, que puede analizarse empleando el método de la rigidez.



convención de signos positivos

Figura 16-1

tes de carga-desplazamiento para el elemento se pueden expresar en forma matricial como

$$\begin{matrix} N_x & N_y & N_x & F_x & F_y & F_x \\ \left[\begin{matrix} q_{Nx} \\ q_{Ny} \\ q_{Nx} \\ q_{Fx} \\ q_{Fy} \\ q_{Fx} \end{matrix} \right] & = & \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} & \left[\begin{matrix} d_{Nx} \\ d_{Ny} \\ d_{Nx} \\ d_{Fx} \\ d_{Fy} \\ d_{Fx} \end{matrix} \right]
 \end{matrix}$$

(16-1)

o en forma abreviada como

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{d} \quad (16-2)$$

La matriz de rigidez del elemento \mathbf{k}' se compone de treinta y seis coeficientes de influencia que representan físicamente la carga sobre el elemento cuando éste se encuentra sometido a un desplazamiento unitario especificado. En concreto, cada columna de la matriz representa las cargas de los elementos para desplazamientos unitarios identificados por la codificación de grados de libertad que se enlista encima de las columnas. Con base en el ensamble, se han satisfecho el equilibrio y la compatibilidad de desplazamientos.

16.2 Matrices de transformación del desplazamiento y de las fuerzas

Como en el caso de las armaduras, se debe tener la capacidad de transformar las cargas internas del elemento \mathbf{q} y las deformaciones \mathbf{d} , de las coordenadas locales x', y', z' a las coordenadas globales x, y, z . Por esta razón se requieren matrices de transformación.

Matriz de transformación del desplazamiento. Considere el elemento de un marco que se muestra en la figura 16-2a. Aquí se observa que un desplazamiento en coordenadas globales D_{Nx} crea desplazamientos en coordenadas locales

$$d_{Nx'} = D_{Nx} \cos \theta_x \quad d_{Ny'} = -D_{Nx} \cos \theta_y$$

Asimismo, un desplazamiento en coordenadas globales D_{Ny} , figura 16-2b, crea los siguientes desplazamientos en coordenadas locales

$$d_{Nx'} = D_{Ny} \cos \theta_y \quad d_{Ny'} = D_{Ny} \cos \theta_x$$

Por último, como los ejes z' y z son coincidentes, es decir, están dirigidos hacia afuera de la página, una rotación D_{Nz} respecto a z genera una rotación correspondiente $d_{Nz'}$ alrededor de z' . Por lo tanto,

$$d_{Nz'} = D_{Nz}$$

De manera similar, si sobre el extremo lejano del elemento se imponen desplazamientos globales D_{Fx} en la dirección x , D_{Fy} en la dirección y y una rotación D_{Fz} , las ecuaciones de transformación resultantes son, respectivamente,

$$\begin{aligned} d_{Fx'} &= D_{Fx} \cos \theta_x & d_{Fy'} &= -D_{Fx} \cos \theta_y \\ d_{Fx'} &= D_{Fy} \cos \theta_y & d_{Fy'} &= D_{Fy} \cos \theta_x \\ d_{Fz'} &= D_{Fz} \end{aligned}$$

Si se considera que $\lambda_x = \cos \theta_x$, $\lambda_y = \cos \theta_y$, representan los cosenos directores de los elementos, puede escribirse la superposición de los desplazamientos en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} d_{Nx'} \\ d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fx'} \\ d_{Fy'} \\ d_{Fz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Nz} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \\ D_{Fz} \end{bmatrix} \quad (16-3)$$

o bien

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{D} \quad (16-4)$$

Por inspección, \mathbf{T} transforma los seis desplazamientos \mathbf{D} globales x, y, z en los seis desplazamientos \mathbf{d} locales x', y', z' . Por tanto, \mathbf{T} se conoce como la *matriz de transformación del desplazamiento*.

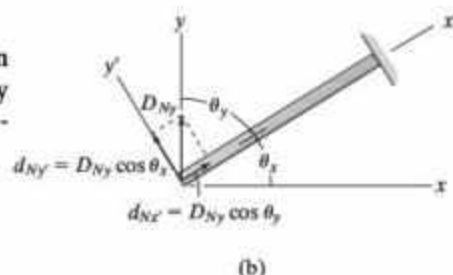
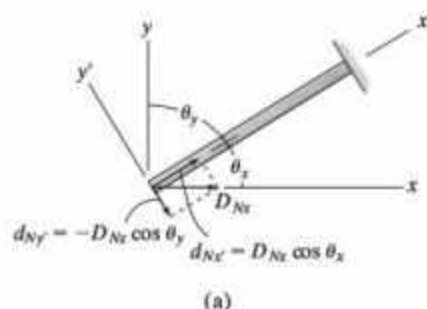


Figura 16-2

Matriz de transformación de la fuerza. Si ahora se aplica cada componente de carga sobre el extremo cercano del elemento, es posible determinar la forma de transformar los componentes de carga de las coordenadas locales a las globales. Al aplicar $q_{Nx'}$, figura 16-3a, se puede ver que

$$Q_{Nx} = q_{Nx'} \cos \theta_x \quad Q_{Ny} = q_{Nx'} \cos \theta_y$$

Si se aplica $q_{Ny'}$, figura 16-3b, entonces sus componentes son

$$Q_{Nx} = -q_{Ny'} \cos \theta_y \quad Q_{Ny} = q_{Ny'} \cos \theta_x$$

Por último, como $q_{Nz'}$ es colineal con Q_{Nz} , se tiene

$$Q_{Nz} = q_{Nz'}$$

De manera similar, las cargas en los extremos de $q_{Fx'}$, $q_{Fy'}$, $q_{Fz'}$ generarán los siguientes componentes respectivos:

$$Q_{Fx} = q_{Fx'} \cos \theta_x \quad Q_{Fy} = q_{Fx'} \cos \theta_y$$

$$Q_{Fx} = -q_{Fy'} \cos \theta_y \quad Q_{Fy} = q_{Fy'} \cos \theta_x$$

$$Q_{Fz} = q_{Fz'}$$

Al ensamblar estas ecuaciones en forma matricial con $\lambda_x = \cos \theta_x$, $\lambda_y = \cos \theta_y$, se obtiene

$$\begin{bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Nz} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \\ Q_{Fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & -\lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & -\lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{Nx'} \\ q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fx'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{bmatrix} \quad (16-5)$$

o bien

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{q} \quad (16-6)$$

Aquí, como se dijo antes, \mathbf{T}^T transforma las seis cargas de elemento expresadas con coordenadas locales en las seis cargas expresadas con coordenadas globales.

16.3 Matriz de rigidez global del marco-elemento

Los resultados de la sección anterior se combinarán ahora con el fin de determinar la matriz de rigidez de un elemento que relacione las cargas globales \mathbf{Q} con los desplazamientos globales \mathbf{D} . Para ello, se sustituye la ecuación 16-4 ($\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{D}$) en la ecuación 16-2 ($\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{d}$). Se tiene

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D} \quad (16-7)$$

Aquí las fuerzas \mathbf{q} de los elementos están relacionadas con los desplazamientos globales \mathbf{D} . Al sustituir este resultado en la ecuación 16-6 ($\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{q}$) se obtiene el resultado final,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D} \quad (16-8)$$

o bien

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{D}$$

donde

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T} \quad (16-9)$$

Aquí \mathbf{k} representa la matriz de rigidez global del elemento. Su valor puede obtenerse en forma general utilizando las ecuaciones 16-5, 16-1 y 16-3 y al realizar las operaciones matriciales. Con esto se obtiene el resultado final,

$$\mathbf{k} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_x & N_y & N_z & F_x & F_y & F_z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2 \right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2 \right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2 \right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2 \right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2 \right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2 \right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2 \right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2 \right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} \end{array} \right] \begin{array}{c} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{array} \end{array} \quad (16-10)$$

Observe que esta matriz de 6×6 es *simétrica*. Además, la ubicación de cada elemento se asocia con la codificación en el extremo cercano, N_x , N_y , N_z , seguida por la del extremo lejano, F_x , F_y , F_z , la cual aparece en la parte superior de las columnas y a lo largo de las filas. Al igual que en la matriz \mathbf{k}' , cada columna de la matriz \mathbf{k} representa las cargas coordinadas sobre los nodos del elemento que son necesarias para resistir un desplazamiento unitario en la dirección definida por el código de la columna. Por ejemplo, la primera columna de \mathbf{k} representa las cargas en coordenadas globales sobre los extremos lejano y cercano causadas por un *desplazamiento unitario* en el extremo cercano en la dirección x , es decir, D_{N_x} .

16.4 Aplicación del método de la rigidez para el análisis de marcos

Una vez que se han establecido las matrices de rigidez de los elementos, éstas pueden ensamblarse en la matriz de rigidez de la estructura en la forma habitual. Si se escribe la ecuación matricial de la estructura, es posible determinar los desplazamientos en los nodos restringidos, seguidos de las reacciones y las cargas internas en los nodos. Las cargas laterales que actúan sobre un elemento, los errores de fabricación, los cambios de temperatura, los soportes inclinados y los soportes internos se manejan de la misma manera que se indicó para las armaduras y las vigas.

Procedimiento de análisis

El siguiente método proporciona un medio para encontrar los desplazamientos, las reacciones en los soportes y las cargas internas de los elementos que forman marcos estáticamente determinados e indeterminados.

Notación

- Divida la estructura en elementos finitos e identifique arbitrariamente cada elemento y sus nodos. Por lo general, los elementos se extienden entre puntos de apoyo, puntos donde se aplican cargas concentradas, esquinas o juntas o entre los puntos donde deben determinarse las cargas internas o los desplazamientos.
- Establezca el sistema global de coordenadas x, y, z , por lo general situado convenientemente con el origen en un punto nodal sobre uno de los elementos y los ejes ubicados de modo que todos los nodos tengan coordenadas positivas.
- En cada punto nodal del marco, especifique numéricamente los tres componentes de codificación x, y, z . En todos los casos use los *números de código más bajos* para identificar todos los *grados de libertad no restringidos*, seguidos por el resto de los *números de código más altos* para identificar los *grados de libertad restringidos*.
- Con base en el problema, establezca los desplazamientos conocidos D_k y las cargas externas conocidas Q_k . Al definir Q_k , asegúrese de incluir cualquier carga de extremo fijo *invertida* si un elemento soporta una carga intermedia.

Matriz de rigidez de la estructura

- Aplique la ecuación 16-10 para determinar la matriz de rigidez para cada elemento expresada en coordenadas globales. En particular, los cosenos directores λ_x y λ_y se determinan a partir de las coordenadas x, y de los extremos del elemento, ecuaciones 14-5 y 14-6.
- Después de escribir cada matriz de rigidez de los elementos, y luego de identificar las seis filas y columnas con los números de código cercanos y lejanos, las matrices se unen para formar la matriz de rigidez de la estructura K . Como una comprobación parcial, todas las matrices de rigidez de los elementos y de la estructura deben ser *simétricas*.

Desplazamientos y cargas

- Haga una partición de la matriz de rigidez, como lo indica la ecuación 14-18. Una expansión posterior conduce a

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$$

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k$$

Los desplazamientos desconocidos \mathbf{D}_u se determinan a partir de la primera de estas ecuaciones. Con base en estos valores, las reacciones en los soportes \mathbf{Q}_u se calculan a partir de la segunda ecuación. Por último, las cargas internas \mathbf{q} en los extremos de los elementos pueden calcularse a partir de la ecuación 16-7, es decir,

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D}$$

Si los resultados de cualesquier incógnitas se calculan como cantidades negativas, esto indica que actúan en las direcciones coordenadas negativas.

EJEMPLO 16.1

Determine las cargas en las juntas de la estructura de dos elementos que se muestra en la figura 16-4a. Considere que $I = 500 \text{ pulg}^4$, $A = 10 \text{ pulg}^2$, y $E = 29(10^3) \text{ ksi}$ para ambos elementos.

SOLUCIÓN

Notación. Por inspección, el marco tiene dos elementos y tres nodos, que se identifican como se muestra en la figura 16-4b. El origen del sistema global de coordenadas se encuentra en ①. Los números de código en los nodos se especifican *numerando en primer lugar los grados de libertad no restringidos*. A partir de las restricciones en ① y ③, y de la carga aplicada, se tiene

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de la estructura. Los siguientes términos son comunes a ambas matrices de rigidez de los elementos:

$$\frac{AE}{L} = \frac{10[29(10^3)]}{20(12)} = 1208.3 \text{ k/pulg}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12[29(10^3)(500)]}{[20(12)]^3} = 12.6 \text{ k/pulg}$$

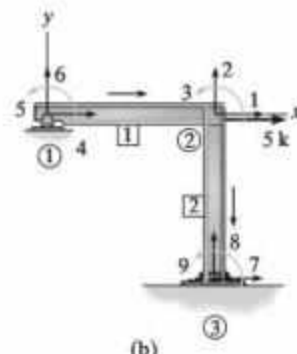
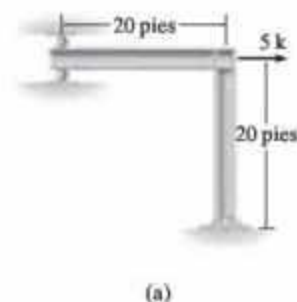


Figura 16-4

EJEMPLO 16.1 (Continuación)

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6[29(10^3)(500)]}{[20(12)]^2} = 1510.4 \text{ k}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4[29(10^3)(500)]}{20(12)} = 241.7(10^3) \text{ k} \cdot \text{pulg}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2[29(10^3)(500)]}{20(12)} = 120.83(10^3) \text{ k} \cdot \text{pulg}$$

Elemento 1:

$$\lambda_x = \frac{20 - 0}{20} = 1 \quad \lambda_y = \frac{0 - 0}{20} = 0$$

Al sustituir los datos en la ecuación 16-10, se tiene

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1208.3 & 0 & 0 & -1208.3 & 0 & 0 \\ 0 & 12.6 & 1510.4 & 0 & -12.6 & 1510.4 \\ 0 & 1510.4 & 241.7(10^3) & 0 & -1510.4 & 120.83(10^3) \\ -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 & 0 \\ 0 & -12.6 & -1510.4 & 0 & 12.6 & -1510.4 \\ 0 & 1510.4 & 120.83(10^3) & 0 & -1510.4 & 241.7(10^3) \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Las filas y las columnas de esta matriz de 6×6 se identifican por los tres números de código x, y, z , primero en el extremo cercano y después en el extremo lejano, es decir, 4, 6, 5, 1, 2, 3, respectivamente, figura 16-4b. Esto se hace para el ensamble posterior de los elementos.

Elemento 2:

$$\lambda_x = \frac{20 - 20}{20} = 0 \quad \lambda_y = \frac{-20 - 0}{20} = -1$$

Al sustituir los datos en la ecuación 16-10 resulta

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 12.6 & 0 & 1510.4 & -12.6 & 0 & 1510.4 \\ 0 & 1208.3 & 0 & 0 & -1208.3 & 0 \\ 1510.4 & 0 & 241.7(10^3) & -1510.4 & 0 & 120.83(10^3) \\ -12.6 & 0 & -1510.4 & 12.6 & 0 & -1510.4 \\ 0 & -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 \\ 1510.4 & 0 & 120.83(10^3) & -1510.4 & 0 & 241.7(10^3) \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Como es usual, la identificación de columnas y filas se hace con referencia a los tres números de código en la secuencia x, y, z para los extremos cercano y lejano, respectivamente; es decir, 1, 2, 3 y después 7, 8, 9, figura 16-4b.

La matriz de rigidez de la estructura se determina al ensamblar k_1 y k_2 . El resultado, que se muestra partido como $Q = KD$, es

$$\begin{bmatrix} 5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1220.9 & 0 & 1510.4 & -1208.3 & 0 & 0 & -12.6 & 0 & 1510.4 \\ 0 & 1220.9 & -1510.4 & 0 & -1510.4 & -12.6 & 0 & -1208.3 & 0 \\ 1510.4 & -1510.4 & 483.3(10^3) & 0 & 120.83(10^3) & 1510.4 & -1510.4 & 0 & 120.83(10^3) \\ -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1510.4 & 120.83(10^3) & 0 & 241.7(10^3) & 1510.4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -12.6 & 1510.4 & 0 & 1510.4 & 12.6 & 0 & 0 & 0 \\ -12.6 & 0 & -1510.4 & 0 & 0 & 0 & 12.6 & 0 & -1510.4 \\ 0 & -1208.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 \\ 1510.4 & 0 & 120.83(10^3) & 0 & 0 & 0 & -1510.4 & 0 & 241.7(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Desplazamientos y cargas. Si se expande para determinar los desplazamientos resulta

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1220.9 & 0 & 1510.4 & -1208.3 & 0 \\ 0 & 1220.9 & -1510.4 & 0 & -1510.4 \\ 1510.4 & -1510.4 & 483.3(10^3) & 0 & 120.83(10^3) \\ -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 \\ 0 & -1510.4 & 120.83(10^3) & 0 & 241.7(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver, se obtiene

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.696 \text{ pulg} \\ -1.55(10^{-3}) \text{ pulg} \\ -2.488(10^{-3}) \text{ rad} \\ 0.696 \text{ pulg} \\ 1.234(10^{-3}) \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Con base en estos resultados, las reacciones en los soportes se determinan a partir de la ecuación (1) de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -12.6 & 1510.4 & 0 & 1510.4 \\ -12.6 & 0 & -1510.4 & 0 & 0 \\ 0 & -1208.3 & 0 & 0 & 0 \\ 1510.4 & 0 & 120.83(10^3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.696 \\ -1.55(10^{-3}) \\ -2.488(10^{-3}) \\ 0.696 \\ 1.234(10^{-3}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.87 \text{ k} \\ -5.00 \text{ k} \\ 1.87 \text{ k} \\ 750 \text{ k} \cdot \text{pulg} \end{bmatrix} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 16.1 (Continuación)

Las cargas internas en el nodo ② pueden determinarse al aplicar la ecuación 16-7 en el elemento 1. Aquí k'_1 se define mediante la ecuación 16-1 y T_1 por medio de la ecuación 16-3. Así,

$$q_1 = k_1 T_1 D = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1208.3 & 0 & 0 & -1208.3 & 0 & 0 \\ 0 & 12.6 & 1510.4 & 0 & -12.6 & 1510.4 \\ 0 & 1510.4 & 241.7(10^3) & 0 & -1510.4 & 120.83(10^3) \\ -1208.3 & 0 & 0 & 1208.3 & 0 & 0 \\ 0 & -12.6 & -1510.4 & 0 & 12.6 & -1510.4 \\ 0 & 1510.4 & 120.83(10^3) & 0 & -1510.4 & 241.7(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.696 \\ 0 \\ 1.234(10^{-3}) \\ 0.696 \\ -1.55(10^{-3}) \\ -2.488(10^{-3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tenga en cuenta la disposición adecuada de los elementos en las matrices como lo indican los números de código a lo largo de las columnas y las filas. Al resolver se obtiene

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_6 \\ q_5 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.87 \text{ k} \\ 0 \\ 0 \\ 1.87 \text{ k} \\ -450 \text{ k} \cdot \text{pulg} \end{bmatrix} \quad \text{Resp.}$$

Los resultados anteriores se muestran en la figura 16-4c. Las direcciones de estos vectores están en concordancia con las direcciones positivas definidas en la figura 16-1. Además, el origen de los ejes locales x' , y' , z' se encuentra en el extremo cercano del elemento. De manera similar, el diagrama de cuerpo libre del elemento 2 es como se muestra en la figura 16-4d.

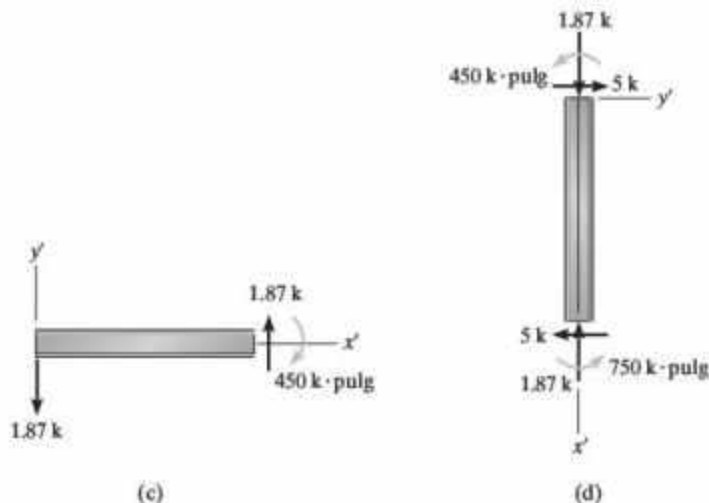


Figura 16-4

EJEMPLO 16.2

Determine las cargas en los extremos de cada elemento de la estructura que se muestra en la figura 16-5a. Considere que $I = 600 \text{ pulg}^4$, $A = 12 \text{ pulg}^2$ y $E = 29(10^3) \text{ ksi}$ para cada elemento.

SOLUCIÓN

Notación. Para llevar a cabo un análisis matricial, la carga distribuida que actúa sobre el elemento horizontal será reemplazada por momentos y fuerzas cortantes equivalentes en los extremos calculados con base en la estática y en la tabla que se encuentra en el interior de la contraportada. (Tenga en cuenta que no hay ninguna fuerza externa de 30 k o momento de 1200 k · pulg ubicados en ③ puesto que las reacciones en los números de código 8 y 9 *deben ser desconocidos* en la matriz de carga.) Después, mediante superposición, los resultados obtenidos para el marco de la figura 16-5b se modificarán para este elemento con base en las cargas mostradas en la figura 16-5c.

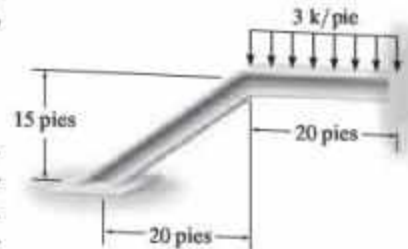
Como se muestra en la figura 16-5b, los nodos y los elementos están numerados y el origen del sistema de coordenadas globales se coloca en el nodo ①. Como de costumbre, los números de código se especifican con números asignados primero a los grados de libertad no restringidos. Por lo tanto,

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \quad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -1200 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

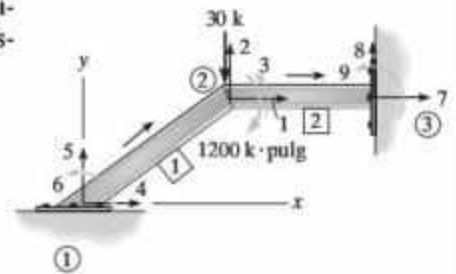
Matriz de rigidez de la estructura

Elemento 1:

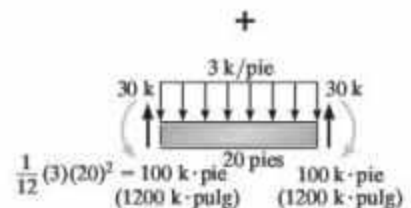
$$\begin{aligned} \frac{AE}{L} &= \frac{12[29(10^3)]}{25(12)} = 1160 \text{ k/pulg} \\ \frac{12EI}{L^3} &= \frac{12[29(10^3)]600}{[25(12)]^3} = 7.73 \text{ k/pulg} \\ \frac{6EI}{L^2} &= \frac{6[29(10^3)]600}{[25(12)]^2} = 1160 \text{ k} \\ \frac{4EI}{L} &= \frac{4[29(10^3)]600}{25(12)} = 232(10^3) \text{ k} \cdot \text{pulg} \\ \frac{2EI}{L} &= \frac{2[29(10^3)]600}{25(12)} = 116(10^3) \text{ k} \cdot \text{pulg} \\ \lambda_x &= \frac{20 - 0}{25} = 0.8 \quad \lambda_y = \frac{15 - 0}{25} = 0.6 \end{aligned}$$



(a)

Figura 16-5

(b)



(c)

EJEMPLO 16.2 (Continuación)

Al aplicar la ecuación 16-10, se tiene

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 745.18 & 553.09 & -696 & -745.18 & -553.09 & -696 \\ 553.09 & 422.55 & 928 & -553.09 & -422.55 & 928 \\ -696 & 928 & 232(10^3) & 696 & -928 & 116(10^3) \\ -745.18 & -553.09 & 696 & 745.18 & 553.09 & 696 \\ -553.09 & -422.55 & -928 & 553.09 & 422.55 & -928 \\ -696 & 928 & 116(10^3) & 696 & -928 & 232(10^3) \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Elemento 2:

$$\frac{AE}{L} = \frac{12[29(10^3)]}{20(12)} = 1450 \text{ k/pulg}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12[29(10^3)]600}{[20(12)]^3} = 15.10 \text{ k/pulg}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6[29(10^3)]600}{[20(12)]^2} = 1812.50 \text{ k}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4[29(10^3)]600}{20(12)} = 2.90(10^5) \text{ k} \cdot \text{pulg}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2[29(10^3)]600}{[20(12)]} = 1.45(10^5) \text{ k} \cdot \text{pulg}$$

$$\lambda_x = \frac{40 - 20}{20} = 1 \quad \lambda_y = \frac{15 - 15}{20} = 0$$

Por lo tanto, la ecuación 16-10 se convierte en

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 1450 & 0 & 0 & -1450 & 0 & 0 \\ 0 & 15.10 & 1812.50 & 0 & -15.10 & 1812.50 \\ 0 & 1812.50 & 290(10^3) & 0 & -1812.50 & 145(10^3) \\ -1450 & 0 & 0 & 1450 & 0 & 0 \\ 0 & -15.10 & -1812.50 & 0 & 15.10 & -1812.50 \\ 0 & 1812.50 & 145(10^3) & 0 & -1812.50 & 290(10^3) \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura, incluida en $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$, se convierte en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -1200 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2195.18 & 553.09 & 696 & -745.18 & -553.09 & 696 & -1450 & 0 & 0 \\ 553.09 & 437.65 & 884.5 & -553.09 & -422.55 & 928 & 0 & -15.10 & 1812.50 \\ 696 & 884.5 & 522(10^3) & -696 & 928 & 116(10^3) & 0 & -1812.50 & 145(10^3) \\ -745.18 & -553.09 & -696 & 745.18 & 553.09 & -696 & 0 & 0 & 0 \\ -553.09 & -422.55 & 928 & 553.09 & 422.55 & 928 & 0 & 0 & 0 \\ 696 & 928 & 116(10^3) & -696 & 928 & 232(10^3) & 0 & 0 & 0 \\ -1450 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1450 & 0 & 0 \\ 0 & -15.10 & -1812.50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15.10 & -1812.50 \\ 0 & 1812.50 & 145(10^3) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1812.50 & 290(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Desplazamientos y cargas. Si se expande para determinar los desplazamientos, y se resuelve, resulta

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2195.18 & 553.09 & 696 \\ 553.09 & 437.65 & 884.5 \\ 696 & 884.5 & 522(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0247 \text{ pulg} \\ -0.0954 \text{ pulg} \\ -0.00217 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

A partir de estos resultados, las reacciones en los soportes se determinan con base en la ecuación (1) de la siguiente manera:

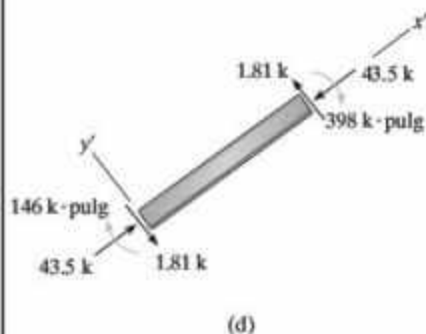
$$\begin{bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -745.18 & -553.09 & -696 \\ -553.09 & -422.55 & 928 \\ 696 & -928 & 116(10^3) \\ -1450 & 0 & 0 \\ 0 & -15.10 & -1812.50 \\ 0 & 1812.50 & 145(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0247 \\ -0.0954 \\ -0.00217 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.85 \text{ k} \\ 24.63 \text{ k} \\ -145.99 \text{ k} \cdot \text{pulg} \\ -35.85 \text{ k} \\ 5.37 \text{ k} \\ -487.60 \text{ k} \cdot \text{pulg} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 16.2 (Continuación)

Las cargas internas pueden determinarse desde la ecuación 16-7 aplicada a los elementos 1 y 2. En el caso del elemento 1, $\mathbf{q} = \mathbf{k}'_1 \mathbf{T}_1 \mathbf{D}$, donde \mathbf{k}'_1 se determina a partir de la ecuación 16-1 y \mathbf{T}_1 con base en la ecuación 16-3. Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1160 & 0 & 0 & -1160 & 0 & 0 \\ 0 & 7.73 & 1160 & 0 & -7.73 & 1160 \\ 0 & 1160 & 232(10^3) & 0 & -1160 & 116(10^3) \\ -1160 & 0 & 0 & 1160 & 0 & 0 \\ 0 & -7.73 & -1160 & 0 & 7.73 & -1160 \\ 0 & 1160 & 116(10^3) & 0 & -1160 & 232(10^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0247 \\ -0.0954 \\ -0.00217 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Aquí los números de código indican las filas y columnas de los extremos cercano y lejano de los elementos, respectivamente; es decir, 4, 5, 6, y después 1, 2, 3, figura 16-5b. Entonces,



$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43.5 \text{ k} \\ -1.81 \text{ k} \\ -146 \text{ k} \cdot \text{pulg} \\ -43.5 \text{ k} \\ 1.81 \text{ k} \\ -398 \text{ k} \cdot \text{pulg} \end{bmatrix}$$

Resp.

Estos resultados se muestran en la figura 16-5d.

Para el elemento 2 se realiza un análisis similar. Los resultados se muestran en la parte izquierda de la figura 16-5e. Para este elemento es necesario superponer las cargas de la figura 16-5c, de modo que los resultados finales del elemento 2 se muestran a la derecha.

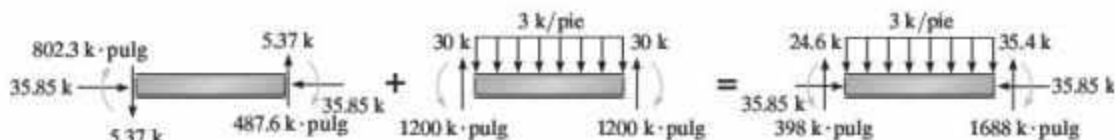
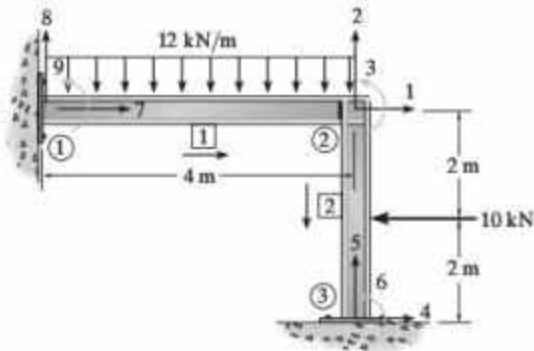


Figura 16-5

PROBLEMAS

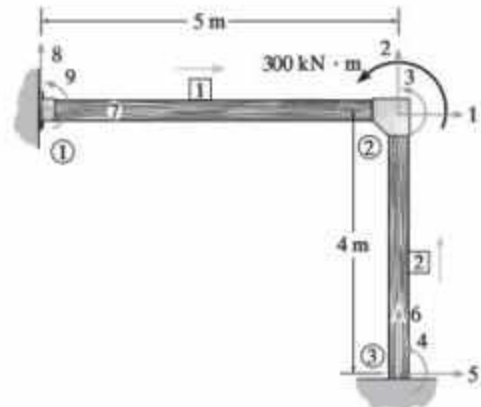
16-1. Determine la matriz de rigidez de la estructura **K** para el marco. Suponga que ① y ③ están fijos. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 300(10^6) \text{ mm}^4$ y $A = 10(10^3) \text{ mm}^2$ para cada elemento.

16-2. Determine las reacciones en los soportes fijos ① y ③. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 300(10^6) \text{ mm}^4$ y $A = 10(10^3) \text{ mm}^2$ para cada elemento.



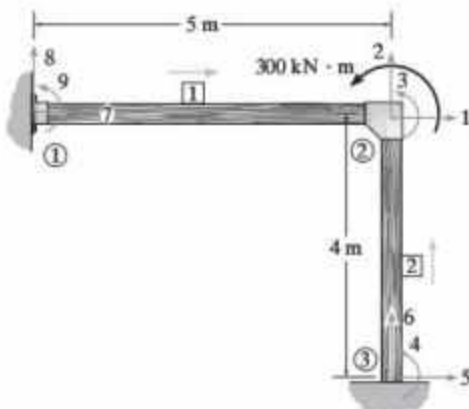
Probs. 16-1/16-2

***16-4.** Determine las reacciones en los soportes ① y ③. Considere que $E = 200 \text{ MPa}$, $I = 300(10^6) \text{ mm}^4$ y $A = 21(10^3) \text{ mm}^2$ para cada elemento.



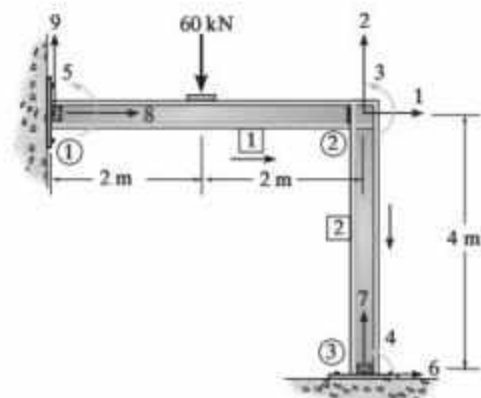
Prob. 16-4

16-3. Determine la matriz de rigidez de la estructura **K** para el marco. Suponga que ③ está articulado y que ① está fijo. Considere que $E = 200 \text{ MPa}$, $I = 300(10^6) \text{ mm}^4$ y $A = 21(10^3) \text{ mm}^2$ para cada elemento.



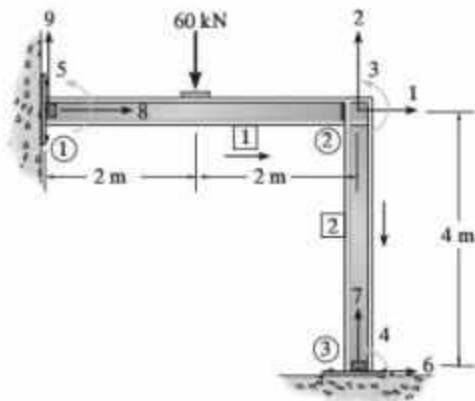
Prob. 16-3

16-5. Determine la matriz de rigidez de la estructura **K** para el marco. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 350(10^6) \text{ mm}^4$ y $A = 15(10^3) \text{ mm}^2$ para cada elemento. Las juntas en ① y ③ están articuladas.



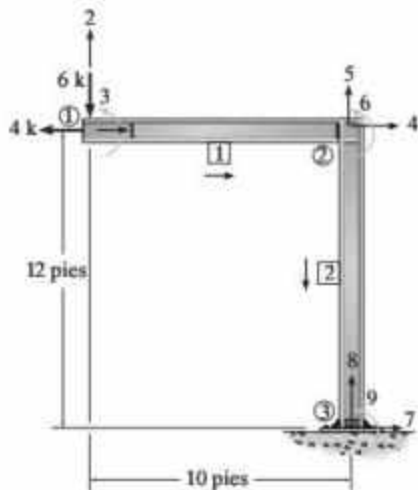
Prob. 16-5

16-6. Determine las reacciones en los soportes articulados ① y ③. Considere que $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 350(10^6) \text{ mm}^4$ y $A = 15(10^3) \text{ mm}^2$ para cada elemento.



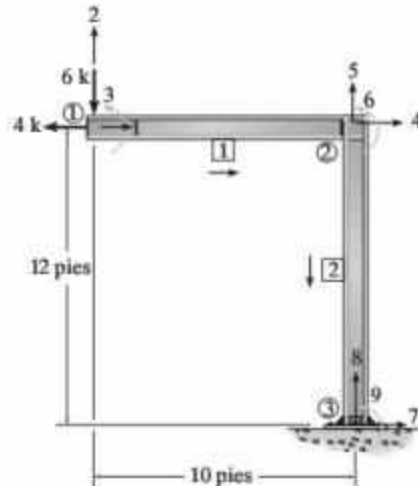
Prob. 16-6

16-7. Determine la matriz de rigidez de la estructura \mathbf{K} para el marco. Considere que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$, $I = 650 \text{ pulg}^4$, $A = 20 \text{ pulg}^2$ para cada elemento.



Prob. 16-7

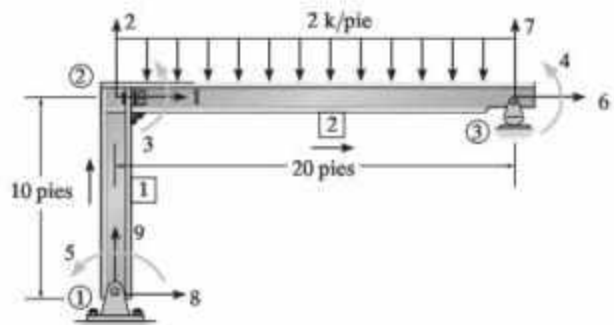
***16-8.** Determine los componentes de los desplazamientos en ①. Considere que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$, $I = 650 \text{ pulg}^4$ y $A = 20 \text{ pulg}^2$ para cada elemento.



Prob. 16-8

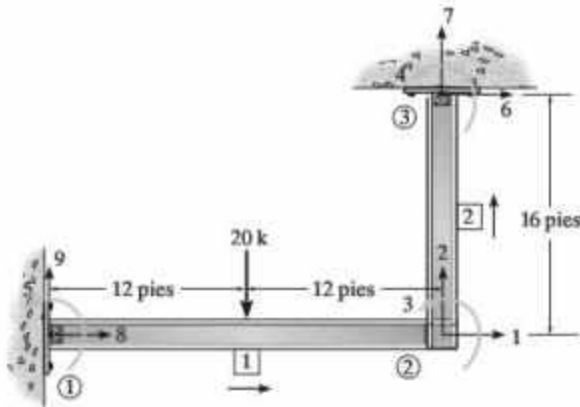
16-9. Determine la matriz de rigidez \mathbf{K} para el marco. Considere que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$, $I = 300 \text{ pulg}^4$ y $A = 10 \text{ pulg}^2$ para cada elemento.

16-10. Determine las reacciones en los soportes ① y ③. Considere que $E = 29(10^3) \text{ ksi}$, $I = 300 \text{ pulg}^4$ y $A = 10 \text{ pulg}^2$ para cada elemento.



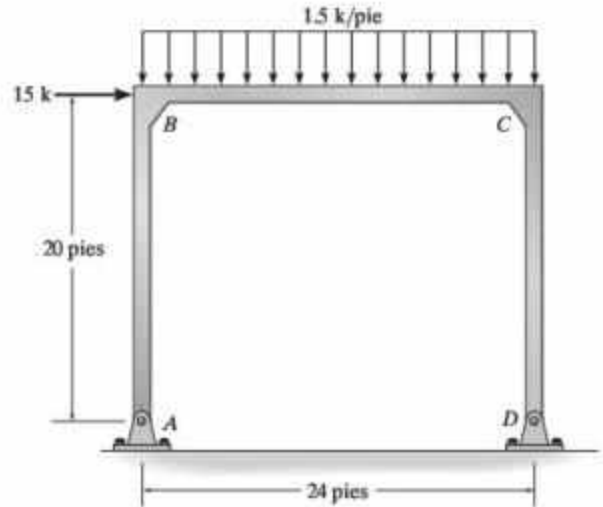
Probs. 16-9/16-10

16-11. Determine la matriz de rigidez de la estructura **K** para el marco. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 700$ pulg⁴ y $A = 20$ pulg² para cada elemento.



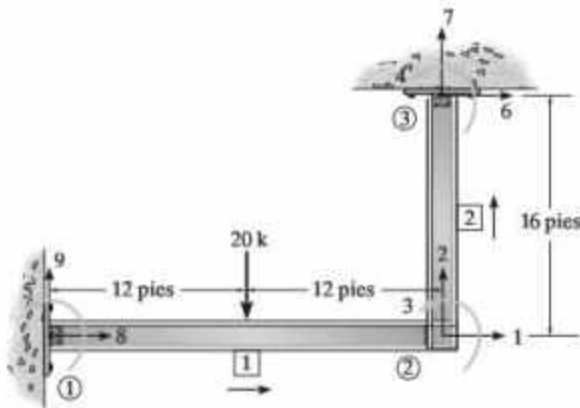
Prob. 16-11

16-13. Use un programa de computadora para determinar las reacciones en el marco. AE y EI son constantes.



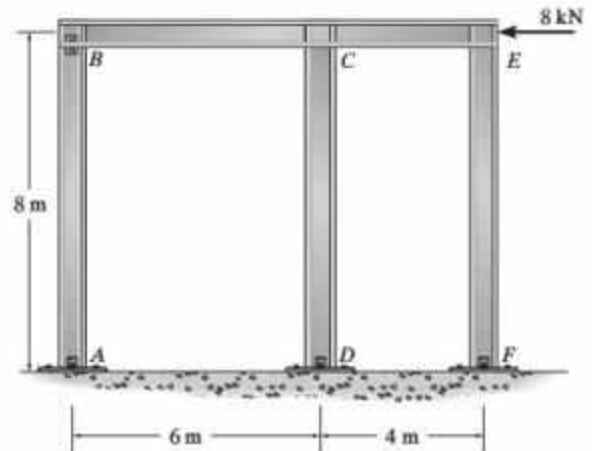
Prob. 16-13

***16-12.** Determine las reacciones en los soportes articulados ① y ③. Considere que $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 700$ pulg⁴ y $A = 20$ pulg² para cada elemento.



Prob. 16-12

16-14. Use un programa de computadora para determinar las reacciones en el marco. Suponga que A , B , D y F están articuladas. Además AE y EI son constantes.



Prob. 16-14

Álgebra matricial para el análisis estructural

A.1 Definiciones básicas y tipos de matrices

Con la accesibilidad de las computadoras de escritorio, se ha generalizado la aplicación del álgebra matricial para el análisis de las estructuras. El álgebra matricial proporciona una herramienta adecuada para este tipo de análisis, puesto que la solución es relativamente fácil de formular de una manera concisa, para después realizar las manipulaciones necesarias en la matriz real mediante una computadora. Por esta razón, es importante que el ingeniero estructural esté familiarizado con las operaciones fundamentales de este tipo de matemáticas.

Matriz. Una *matriz* es un arreglo rectangular de números que tienen m filas y n columnas. Los números, que se denominan *elementos*, se ensamblan entre corchetes. Por ejemplo, la matriz **A** se escribe como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se dice que esta matriz tiene un *orden* de $m \times n$ (m por n). Observe que el primer subíndice de un elemento indica la posición de su fila y el segundo subíndice indica la posición de su columna. Entonces, en general, a_{ij} es el elemento situado en la i -ésima fila y en la j -ésima columna.

Matriz fila. Si la matriz se compone sólo de elementos en una sola fila, se denomina *matriz fila*. Por ejemplo, una matriz fila de $1 \times n$ se escribe como

$$\mathbf{A} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$$

Aquí se usa un solo subíndice para denotar un elemento, puesto que se entiende que el subíndice de fila siempre será igual a 1, es decir, $a_1 = a_{11}$, $a_2 = a_{12}$, y así sucesivamente.

Columna matriz. Una matriz con elementos apilados en una sola columna se llama *matriz columna*. La matriz columna de $m \times 1$ es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Aquí la notación de los subíndices simboliza $a_1 = a_{11}$, $a_2 = a_{21}$, y así sucesivamente.

Matriz cuadrada. Cuando en una matriz el número de filas es igual al número de columnas, se dice que es una *matriz cuadrada*. Una matriz cuadrada de $n \times n$ sería

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal. Cuando todos los elementos de una matriz cuadrada son iguales a cero, excepto a lo largo de la diagonal principal, que desciende de izquierda a derecha, la matriz se denomina *matriz diagonal*. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz unitaria o identidad. La *matriz unitaria* o *identidad* es una matriz diagonal, donde todos los elementos de la diagonal son iguales a la unidad. Por ejemplo,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica. Una *matriz cuadrada* es simétrica siempre que $a_{ij} = a_{ji}$. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

A.2 Operaciones matriciales

Igualdad de matrices. Se dice que las matrices **A** y **B** son iguales si son del mismo orden y cada uno de sus elementos correspondientes son iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

entonces $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Adición y sustracción de matrices. Dos matrices pueden sumarse entre sí o restar una de la otra si son del mismo orden. El resultado se obtiene al sumar o restar los elementos correspondientes. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Multiplicación por un escalar. Cuando una matriz se multiplica por un escalar, cada elemento de la matriz se multiplica por el escalar. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \quad k = -6$$

entonces

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -24 & -6 \\ -36 & 12 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices. Dos matrices **A** y **B** pueden multiplicarse entre sí sólo si son *conformables*. Esta condición se cumple si el número de *columnas* de **A** es igual al número de *filas* de **B**. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

entonces es posible determinar \mathbf{AB} , puesto que **A** tiene dos columnas y **B** tiene dos filas. Observe, sin embargo, que \mathbf{BA} no puede obtenerse. ¿Por qué?

Si la matriz **A** que tiene un orden de $(m \times n)$ se multiplica por la matriz **B** que tiene un orden de $(n \times q)$, se obtendrá una matriz **C** que tendrá un orden de $(m \times q)$, es decir,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} \\ (m \times n) & (n \times q) & & (m \times q) \end{array}$$

Los elementos de la matriz **C** se encuentran usando los elementos a_{ij} en **A** y b_{ij} en **B** de la siguiente manera:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (\text{A-2})$$

La metodología de esta fórmula puede explicarse mediante algunos ejemplos sencillos. Considere que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Por inspección, es posible obtener el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ puesto que las matrices son conformables, es decir, **A** tiene tres columnas y **B** tiene tres filas. A partir de la ecuación A-2, la multiplicación generará una matriz **C** que tendrá dos filas y una columna. Los resultados se obtienen de la siguiente manera:

c_{11} : Multiplique los elementos de la primera fila de **A** por los elementos correspondientes en la columna de **B** y sume los resultados; es decir,

$$c_{11} = c_1 = 2(2) + 4(6) + 3(7) = 49$$

c_{21} : Multiplique los elementos de la segunda fila de **A** por los elementos correspondientes en la columna de **B** y sume los resultados;

$$c_{21} = c_2 = -1(2) + 6(6) + 1(7) = 41$$

Así

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 49 \\ 41 \end{bmatrix}$$

Como segundo ejemplo, considere

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Una vez más, es posible encontrar el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ puesto que \mathbf{A} tiene dos columnas y \mathbf{B} tiene dos filas. La matriz \mathbf{C} resultante tiene tres filas y dos columnas. Los elementos se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 5(2) + 3(-3) = 1 && \text{(primera fila de } \mathbf{A} \text{ por la primera columna de } \mathbf{B}) \\ c_{12} &= 5(7) + 3(4) = 47 && \text{(primera fila de } \mathbf{A} \text{ por la segunda columna de } \mathbf{B}) \\ c_{21} &= 4(2) + 1(-3) = 5 && \text{(segunda fila de } \mathbf{A} \text{ por la primera columna de } \mathbf{B}) \\ c_{22} &= 4(7) + 1(4) = 32 && \text{(segunda fila de } \mathbf{A} \text{ por la segunda columna de } \mathbf{B}) \\ c_{31} &= -2(2) + 8(-3) = -28 && \text{(tercera fila de } \mathbf{A} \text{ por la primera columna de } \mathbf{B}) \\ c_{32} &= -2(7) + 8(4) = 18 && \text{(tercera fila de } \mathbf{A} \text{ por la segunda columna de } \mathbf{B}) \end{aligned}$$

El esquema para la multiplicación sigue la aplicación de la ecuación A-2. Por lo tanto,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 47 \\ 5 & 32 \\ -28 & 18 \end{bmatrix}$$

Observe además que \mathbf{BA} no existe, puesto que escritas de esta manera las matrices no son conformables.

Las siguientes reglas son aplicables a la multiplicación de matrices.

1. En general, el producto de dos matrices no es conmutativo:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (\text{A-3})$$

2. La ley distributiva es válida:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad (\text{A-4})$$

3. La ley asociativa es válida:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (\text{A-5})$$

Matriz transpuesta. Una matriz puede transponerse al intercambiar sus filas y columnas. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$$

Entonces

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Tenga en cuenta que \mathbf{AB} no es conformable por lo que el producto no existe. (\mathbf{A} tiene tres columnas y \mathbf{B} tiene una fila.) De manera alternativa, la multiplicación \mathbf{AB}^T es posible porque aquí las matrices son conformables (\mathbf{A} tiene tres columnas y \mathbf{B}^T tiene tres filas). Las matrices transpuestas tienen las siguientes propiedades:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \quad (\text{A-6})$$

$$(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T \quad (\text{A-7})$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (\text{A-8})$$

Esta última identidad se ilustrará mediante un ejemplo. Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Entonces, a partir de la ecuación A-8,

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right)^T &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ \left(\begin{bmatrix} 28 & 28 \\ -2 & -12 \end{bmatrix} \right)^T &= \begin{bmatrix} 28 & -2 \\ 28 & -12 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 28 & -2 \\ 28 & -12 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 28 & -2 \\ 28 & -12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Partición de matrices. Una matriz puede subdividirse en submatrices al efectuar una partición. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Aquí las submatrices son

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= [a_{11}] & \mathbf{A}_{12} &= [a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14}] \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las reglas del álgebra matricial son aplicables a las matrices particionadas siempre que la partición sea conformable. Por ejemplo, las submatrices correspondientes de **A** y **B** pueden sumarse o restarse siempre y cuando tengan el mismo número de filas y columnas. Del mismo modo, la multiplicación de matrices es posible siempre que el respectivo número de columnas y filas de **A** y **B** y sus submatrices sean iguales. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -5 \\ \hline 6 & 3 & 8 \end{array} \right] \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 0 & 8 \\ \hline 7 & 4 \end{array} \right]$$

entonces el producto **AB** existe, puesto que el número de columnas de **A** es igual al número de filas de **B** (tres). Del mismo modo, las matrices particionadas son conformables para la multiplicación dado que **A** se subdivide en dos columnas y **B** se subdivide en dos filas, es decir,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} \end{bmatrix}$$

Al multiplicar las submatrices se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} &= \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -35 & -20 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} &= \begin{bmatrix} 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} &= \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 & 32 \end{bmatrix} \\ \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -35 & -20 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 56 & 32 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -39 & -18 \\ 68 & 50 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A.3 Determinantes

En la siguiente sección se analizará cómo invertir una matriz. Como esta operación requiere una evaluación del determinante de la matriz, ahora se expondrán algunas de las propiedades básicas de los determinantes.

Un determinante es un arreglo cuadrado de números encerrado entre barras verticales. Por ejemplo, un determinante de orden n -ésimo, con n filas y n columnas, es

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{A-9})$$

La evaluación de este determinante conduce a un solo valor numérico que puede determinarse mediante la *expansión de Laplace*. Este método hace uso de los menores y cofactores del determinante. En específico, cada elemento a_{ij} de un determinante de orden n tiene un *menor* M_{ij} que es un determinante de orden $n - 1$. Este determinante (menor) es lo que queda cuando se cancelan la i -ésima fila y la j -ésima columna que contienen al elemento a_{ij} . Si el menor se multiplica por $(-1)^{i+j}$ se obtiene el *cofactor* de a_{ij} , el cual se denota como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (\text{A-10})$$

Por ejemplo, considere el determinante de tercer orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Los cofactores para los elementos de la primera fila son

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ C_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ C_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

La expansión de Laplace para un determinante de orden n , ecuación A-9, establece que el valor numérico representado por el determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier fila o columna por sus respectivos cofactores, es decir,

$$\begin{aligned} D &= a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \cdots + a_{ni}C_{ni} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \text{o} \\ D &= a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

Para su aplicación, se observa que debido a los cofactores el número D se define en términos de n determinantes (cofactores), cada uno de orden $n - 1$. Estos determinantes pueden reevaluarse de manera independiente empleando la misma fórmula, por lo que es necesario evaluar $(n - 1)$ determinantes de orden $(n - 2)$, y así sucesivamente. El proceso de evaluación continúa hasta que los determinantes restantes para ser evaluados se reducen al segundo orden, en el que los cofactores de los elementos son elementos individuales de D . Considere, por ejemplo, el siguiente determinante de segundo orden

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

D puede evaluarse a lo largo de la fila superior de los elementos, de donde resulta

$$D = 3(-1)^{1+1}(2) + 5(-1)^{1+2}(-1) = 11$$

O, por ejemplo, si se usa la segunda columna de los elementos, se tiene

$$D = 5(-1)^{1+2}(-1) + 2(-1)^{2+2}(3) = 11$$

En vez de usar las ecuaciones A-11, quizá sea más fácil darse cuenta que la evaluación de un determinante de segundo orden puede llevarse a cabo al multiplicar los elementos de la diagonal, desde el elemento superior izquierdo hacia abajo a la derecha, y restar de esto el producto de los elementos desde el elemento superior derecho hacia abajo a la izquierda, es decir, siga la flecha

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2) - 5(-1) = 11$$

Considere ahora el determinante de tercer orden

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Con base en la ecuación A-11, $|D|$ puede evaluarse empleando los elementos ubicados, ya sea a lo largo de la fila superior, o bien en la primera columna, esto es

$$\begin{aligned} D &= (1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1(4 - 0) - 3(8 + 6) - 1(0 + 2) = -40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 1(4 - 0) - 4(6 - 0) - 1(18 + 2) = -40 \end{aligned}$$

Como un ejercicio, trate de evaluar $|D|$ usando los elementos a lo largo de la segunda fila.

A.4 Inversa de una matriz

Considere el siguiente conjunto de tres ecuaciones lineales:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3$$

que pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A-12})$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{C} \quad (\text{A-13})$$

Podría pensarse que es posible determinar una solución para x al dividir C entre A ; sin embargo, la división no es posible en el álgebra matricial. En su lugar, se multiplica por el inverso de la matriz. La inversa de la matriz A es otra matriz del mismo orden, la cual se escribe simbólicamente como A^{-1} y tiene la siguiente propiedad,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

donde I es una matriz identidad. Al multiplicar ambos lados de la ecuación A-13 por A^{-1} , se obtiene

$$A^{-1}Ax = A^{-1}C$$

Como $A^{-1}Ax = Ix = x$, se tiene

$$x = A^{-1}C \quad (A-14)$$

Siempre que se pueda obtener A^{-1} será posible encontrar una solución para x .

Para el cálculo manual, el método usado para formular A^{-1} puede desarrollarse empleando la regla de Cramer. El desarrollo no se presentará aquí, sólo se proporcionan los resultados.* este respecto, los elementos en las matrices de la ecuación A-14 pueden escribirse como

$$x = A^{-1}C$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (A-15)$$

Aquí $|A|$ es una evaluación del determinante de la matriz de coeficientes A , que se determina mediante la expansión de Laplace analizada en la sección A.3. La matriz cuadrada que contiene los cofactores C_{ij} se llama la *matriz adjunta*. Por comparación, se observa que la matriz inversa A^{-1} se obtiene a partir de A al remplazar primero cada elemento a_{ij} por su cofactor C_{ij} , después se transpone la matriz resultante, resultando la matriz adjunta y, finalmente, se multiplica la matriz adjunta por $1/|A|$.

Para ilustrar numéricamente cómo se obtiene A^{-1} , se considerará la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5 \end{aligned} \quad (A-16)$$

Aquí

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

*Vea Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York.

La matriz de cofactores de **A** es

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Si se evalúan los determinantes y se toma la transpuesta, la matriz adjunta es

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Puesto que

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

Por lo tanto, la inversa de **A** es

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver las ecuaciones A-16 se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -\frac{1}{6}[(-4)(-1) + 0(-1) + (-2)(5)] = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{6}[(-1)(-1) + (-3)(-1) + (-2)(5)] = 1$$

$$x_3 = -\frac{1}{6}[(-3)(-1) + (-3)(-1) + (0)(5)] = -1$$

Por supuesto, los cálculos numéricos se extienden mucho más para grandes conjuntos de ecuaciones. Por esta razón, en el análisis estructural se usan computadoras para determinar la inversa de las matrices.

A.5 Método de Gauss para resolver ecuaciones simultáneas

Cuando hay que resolver muchas ecuaciones lineales simultáneas, puede usarse el método de eliminación de Gauss debido a su eficiencia numérica. La aplicación de este método requiere resolver una ecuación de un conjunto de n ecuaciones para una incógnita, por ejemplo, x_1 , en términos de todas las otras incógnitas, x_2, x_3, \dots, x_n . Al sustituir esta ecuación llamada *ecuación pivote* en las ecuaciones restantes deja un conjunto de $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas. Si se repite el proceso resolviendo una de estas ecuaciones para x_2 en términos de las $n - 2$ incógnitas restantes, x_3, x_4, \dots, x_n , se forma la segunda ecuación pivote. Después, esta ecuación se sustituye en las otras ecuaciones, dejando un conjunto de $n - 3$ ecuaciones con $n - 3$ incógnitas. El proceso se repite hasta que queda una ecuación pivote con una incógnita, que después se resuelve. Las demás incógnitas se determinan al sustituir sucesivamente hacia atrás en las ecuaciones pivote restante. Para mejorar la precisión de la solución, en el desarrollo de cada ecuación pivote se recomienda seleccionar siempre la ecuación de la serie que tenga el mayor coeficiente numérico para una incógnita que se está tratando de eliminar. El proceso se ilustrará con un ejemplo.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones mediante la eliminación de Gauss:

$$-2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 2 \quad (\text{A-17})$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad (\text{A-18})$$

$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4 \quad (\text{A-19})$$

Se iniciará con la eliminación de x_1 . El mayor coeficiente de x_1 está en la ecuación A-19; por consiguiente, se tomará como la ecuación pivote. Si se resuelve para x_1 , se tiene

$$x_1 = 1 + 1.25x_2 - 0.75x_3 \quad (\text{A-20})$$

Al sustituir en las ecuaciones A-17 y A-18, para después simplificar, resulta

$$2.75x_2 + 1.75x_3 = 2 \quad (\text{A-21})$$

$$1.5x_2 - 0.5x_3 = 0 \quad (\text{A-22})$$

A continuación se elimina x_2 . Se elige la ecuación A-21 como ecuación pivote porque el coeficiente de x_2 es mayor ahí. Se tiene

$$x_2 = 0.727 - 0.636x_3 \quad (\text{A-23})$$

Si se sustituye esta ecuación en la ecuación A-22 y se simplifica, resulta la ecuación pivote final, que puede resolverse para x_3 . De esto se obtiene $x_3 = 0.75$. Al sustituir este valor en la ecuación pivote A-23 da $x_2 = 0.25$. Finalmente, a partir de la ecuación pivote A-20 se tiene que $x_1 = 0.75$.

PROBLEMAS

A-1. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, determine

$2\mathbf{A} - \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

A-2. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$,

determine $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ y $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$.

A-3. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, determine \mathbf{AB} .

***A-4.** Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, determine \mathbf{AB} .

A-5. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -5 \end{bmatrix}$, determine \mathbf{AB} .

A-6. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, demuestre que

$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

A-7. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, determine $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$.

A-8. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, determine \mathbf{AA}^T .

A-9. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, determine \mathbf{AA}^T .

A-10. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$,

determine \mathbf{AB} .

A-11. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$,

determine \mathbf{AB} .

***A-12.** Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$,

determine \mathbf{AB} .

A-13. Demuestre que la ley distributiva es válida, es

decir, $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A-14. Demuestre que la ley asociativa es válida, es decir,

$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

A-15. Evalúe los determinantes $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

***A-16.** Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, determine \mathbf{A}^{-1} .

A-17. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, determine \mathbf{A}^{-1} .

A-18. Resuelva las ecuaciones $4x_1 + x_2 + x_3 = -1$, $-5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4$, $x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$ usando la ecuación matricial $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$.

A-19. Resuelva las ecuaciones del problema A-18 usando el método de eliminación de Gauss.

***A-20.** Resuelva las ecuaciones $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5$, $x_1 - x_2 + x_3 = -1$, $x_1 - x_2 - x_3 = 1$ usando la ecuación matricial $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$.

A-21. Resuelva las ecuaciones del problema A-20 usando el método de eliminación de Gauss.

Procedimiento general para usar el software de análisis estructural

En la actualidad existen programas populares de software para análisis estructural como STAAD, RISA, SAP, etcétera; todos ellos basados en el método de análisis de la matriz de rigidez, que se describe en los capítulos 13 a 15.* Aunque cada programa tiene una interfaz un poco diferente, todos requieren que el operador introduzca datos relacionados con la estructura.

A continuación se describe un procedimiento general para usar cualquiera de estos programas.

Pasos preliminares. Antes de emplear cualquier programa, es necesario primero identificar numéricamente los elementos y articulaciones, llamadas nodos, de la estructura y establecer los sistemas de coordenadas globales y locales con el fin de especificar la geometría de la estructura y la carga. Para ello, quizá desee hacer un bosquejo de la estructura y especificar cada elemento con un número encerrado en un cuadrado, y usar un número dentro de un círculo para identificar los nodos. En algunos programas también deben identificarse los extremos “cercano” y “lejano” de los elementos. Esto se hace mediante una flecha trazada a lo largo del elemento, con la punta de la flecha dirigida hacia el extremo lejano. En las figuras B-1, B-2 y B-3 se muestra la identificación de los elementos, los nodos y la “dirección” para una armadura plana, una viga, y un marco plano. En la figura B1, el nodo ② está en el “extremo cercano” del elemento ④ y el nodo ③ está en su “extremo lejano”. Estas asignaciones pueden hacerse arbitrariamente. Sin embargo, observe que los nodos de la armadura siempre están en las articulaciones, puesto que es donde se aplican las cargas y donde deben determinarse los desplazamientos y las fuerzas en los elementos. Para las vigas y los marcos, los nodos se encuentran en los soportes, en una esquina o junta, en un pasador interno, o en un punto donde debe determinarse el desplazamiento lineal o de rotación, figuras B-2 y B-3.

Como las cargas y los desplazamientos son cantidades vectoriales, es necesario establecer un sistema de coordenadas a fin de precisar el sentido correcto de la dirección. Aquí deben usarse dos tipos de sistemas de coordenadas.

Coordenadas globales. Un solo sistema de coordenadas globales o de la estructura, que usa los ejes derechos x , y , z , se emplea para especificar la ubicación de cada nodo con respecto al origen y para identificar el sentido de cada una de las cargas externas y de los componentes del desplazamiento en los nodos. Resulta conveniente ubicar el origen en un nodo, de modo que todos los demás nodos tengan coordenadas positivas. Vea cada una de las figuras.

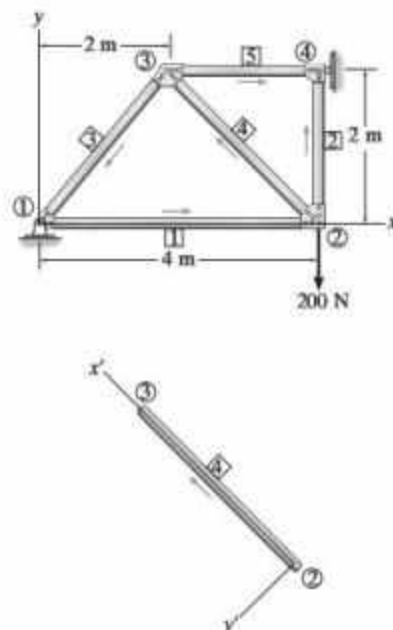


Figura B-1

*Los libros relacionados con el análisis matricial presentan una cobertura más completa de este método, incluidos los efectos de la torsión en marcos tridimensionales.

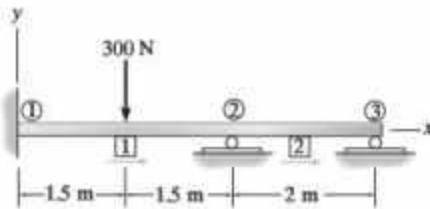
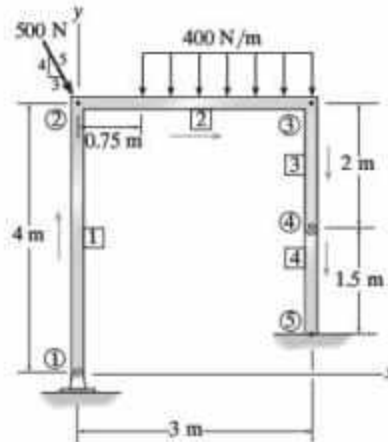


Figura B-2



Coordenadas locales. Un sistema de coordenadas locales o del elemento se usa para especificar la ubicación y dirección de las cargas externas que actúan sobre los elementos de la viga y el marco o de cualquier otra estructura, a fin de proporcionar una forma de interpretar los resultados calculados para las cargas internas que actúan en los nodos de cada elemento. Este sistema puede identificarse usando los ejes derechos x' , y' , z' con el origen en el nodo “cercano” y el eje x' extendiéndose a lo largo del elemento hacia el nodo “lejano”. En las figuras B-1 y B-3, respectivamente, se muestra un ejemplo para el elemento 4 de una armadura y el elemento 3 de un marco.

Operación del programa. Cuando un programa se ejecuta, debe aparecer un menú que permita varias selecciones para introducir los datos y obtener los resultados. A continuación se explican los componentes usados para los datos de entrada. Para cualquier problema, asegúrese de usar un conjunto consistente de unidades para las cantidades numéricas.

Información de la estructura general. Por lo general, este componente debe seleccionarse en primer lugar a fin de asignarle un título al problema e identificar el tipo de estructura a analizar: armadura, viga o marco.

Datos del nodo. Introducir uno a uno el número de cada nodo y las coordenadas globales de sus extremos cercano y lejano.

Datos del elemento. Introducir uno a uno el número de cada elemento, los números de los nodos cercano y lejano, y las propiedades del elemento, E (módulo de elasticidad), A (área de la sección transversal) e/o I (el momento de inercia y/o el momento polar de inercia u otro tipo de constante de torsión adecuada necesaria para los marcos tridimensionales*). Si estas propiedades del elemento son desconocidas, entonces siempre que la estructura sea estáticamente determinada, estos valores pueden establecerse iguales a uno. Si la estructura es estáticamente indeterminada entonces la estructura no debe tener asentamiento en los

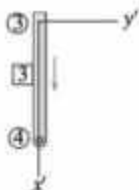


Figura B-3

*Con mucha frecuencia puede seleccionarse forma estructural dada, por ejemplo un perfil de ala ancha o W, si el programa tiene una base de datos con sus propiedades geométricas.

soportes y los elementos deben tener la misma área en su sección transversal y estar hechos del mismo material. Entonces, los resultados calculados proporcionarán las reacciones correctas y las fuerzas internas, pero no el desplazamiento correcto.

Si una articulación interna o un pasador conecta a dos elementos de una viga o un marco, entonces debe especificarse la liberación del momento en ese nodo. Por ejemplo, el elemento 3 del marco que se muestra en la figura B-3 tiene un pasador en el nodo lejano, 4. Del mismo modo, este pasador también puede identificarse en el nodo cercano del elemento 4.

Datos del soporte. Se introducen uno a uno los nodos ubicados en un soporte, indicando las direcciones de las coordenadas globales en donde se producen las restricciones. Por ejemplo, dado que el nodo 5 del marco de la figura B-3 es un soporte fijo, se introduce un cero en las direcciones (de rotación) x , y y z ; sin embargo, si este soporte se asienta 0.003 m hacia abajo, entonces el valor introducido para y debería ser -0.003 .

Datos de la carga. Las cargas se especifican, ya sea en los nodos o en los elementos. Introduzca los valores algebraicos de las *cargas nodales* en relación con las *coordenadas globales*. Por ejemplo, para la armadura de la figura B-1, la carga en el nodo 2 está en la dirección y y tiene un valor de -200 . Para los *elementos* de vigas y marcos, las cargas y su ubicación se referencian usando las *coordenadas locales*. Por ejemplo, la carga distribuida sobre el elemento 2 de la estructura mostrada en la figura B-3 se especifica con una intensidad de -400 N/m ubicada a 0.75 m del nodo 2 y -400 N/m ubicada a 3 m de este nodo.

Resultados. Una vez que se introducen todos los datos, entonces es posible resolver el problema. Se obtienen las reacciones externas sobre la estructura y los desplazamientos y cargas internas en cada nodo. Como una comprobación parcial de los resultados, con frecuencia se da una verificación estática en cada uno de los nodos. Es muy importante que no confíe totalmente en los resultados obtenidos. En vez de ello, sería conveniente realizar un análisis estructural intuitivo para controlar aún más las respuestas. Después de todo, el ingeniero estructural debe asumir toda la responsabilidad, tanto del modelado como del cálculo de los resultados finales.

Soluciones parciales y respuestas a los problemas fundamentales

Capítulo 2

F2-1. $\downarrow + \Sigma M_A = 0;$ $60 - F_{BC}\left(\frac{3}{4}\right)(4) = 0$ $F_{BC} = 25.0 \text{ kN}$
 $\downarrow + \Sigma M_B = 0;$ $60 - A_y(4) = 0$ $A_y = 15.0 \text{ kN}$ Resp.
 $\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $A_x - 25.0\left(\frac{4}{5}\right) = 0$ $A_x = 20.0 \text{ kN}$ Resp.
 $B_x = C_x = 25.0\left(\frac{4}{5}\right) = 20.0 \text{ kN}$ $B_y = C_y = 25.0\left(\frac{3}{4}\right) = 15.0 \text{ kN}$ Resp.

F2-2. $\downarrow + \Sigma M_A = 0;$ $F_{BC} \sin 45^\circ(4) - 10(4)(2) = 0$ $F_{BC} = \frac{20}{\sin 45^\circ} \text{ kN}$
 $\downarrow + \Sigma M_B = 0;$ $10(4)(2) - A_y(4) = 0$ $A_y = 20.0 \text{ kN}$ Resp.
 $\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $A_x - \left(\frac{20}{\sin 45^\circ}\right)(\cos 45^\circ) = 0$ $A_x = 20.0 \text{ kN}$ Resp.
 $B_x = C_x = \left(\frac{20}{\sin 45^\circ}\right)(\cos 45^\circ) = 20.0 \text{ kN}$ Resp.
 $B_y = C_y = \left(\frac{20}{\sin 45^\circ}\right)(\sin 45^\circ) = 20.0 \text{ kN}$ Resp.

F2-3. $\downarrow + \Sigma M_A = 0;$ $F_{BC} \sin 60^\circ(4) - 10(2)(1) = 0$ $F_{BC} = \frac{5}{\sin 60^\circ} \text{ kN}$
 $\downarrow + \Sigma M_B = 0;$ $10(2)(3) - A_y(4) = 0$ $A_y = 15.0 \text{ kN}$ Resp.
 $\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $\left(\frac{5}{\sin 60^\circ}\right)(\cos 60^\circ) - A_x = 0$ $A_x = 2.89 \text{ kN}$ Resp.
 $B_x = C_x = \left(\frac{5}{\sin 60^\circ}\right)(\cos 60^\circ) = 2.89 \text{ kN}$ Resp.
 $B_y = C_y = \left(\frac{5}{\sin 60^\circ}\right)(\sin 60^\circ) = 5.00 \text{ kN}$ Resp.

F2-4. Elemento AC
 $\downarrow + \Sigma M_C = 0;$ $10(3) - N_A(4) = 0$ $N_A = 7.50 \text{ kN}$ Resp.
 $\downarrow + \Sigma M_A = 0;$ $C_y(4) - 10(1) = 0$ $C_y = 2.50 \text{ kN}$

Elemento BC

$\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $B_x = 0$ Resp.
 $\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $B_y - 2.50 - 8(2) = 0$ $B_y = 18.5 \text{ kN}$ Resp.
 $\downarrow + \Sigma M_B = 0;$ $2.50(2) + 8(2)(1) - M_B = 0$ $M_B = 21.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$ Resp.

$$\text{F2-5.} \quad \downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad F_{BC} \left(\frac{3}{5}\right)(4) + F_{BC} \left(\frac{4}{5}\right)(3) - 300(2) = 0 \quad F_{BC} = 125 \text{ lb}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x - 125 \left(\frac{4}{5}\right) = 0 \quad A_x = 100 \text{ lb}$$

Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y + 125 \left(\frac{3}{5}\right) - 300 = 0 \quad A_y = 225 \text{ lb}$$

Resp.

$$B_x = C_x = 125 \left(\frac{4}{5}\right) = 100 \text{ lb}$$

Resp.

$$B_y = C_y = 125 \left(\frac{3}{5}\right) = 75.0 \text{ lb}$$

Resp.

$$\text{F2-6.} \quad \downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad 6(2) + 2(2) - N_A(4) = 0 \quad N_A = 4.00 \text{ kN}$$

Resp.

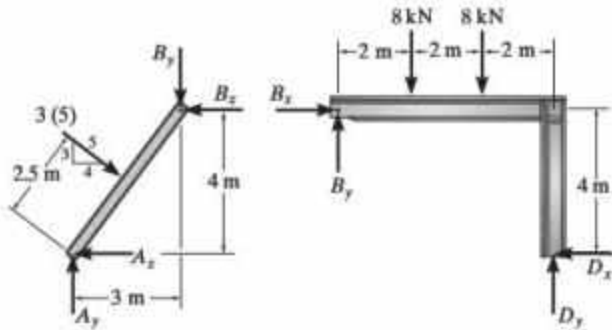
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad C_x - 2 = 0 \quad C_x = 2.00 \text{ kN}$$

Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad C_y + 4.00 - 6 = 0 \quad C_y = 2.00 \text{ kN}$$

Resp.

F2-7.



Elemento AB

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad B_x(4) - B_y(3) - 3(5)(2.5) = 0$$

Elemento BCD

$$\downarrow + \Sigma M_D = 0; \quad 8(2) + 8(4) - B_x(4) - B_y(6) = 0$$

$$B_x = 10.25 \text{ kN}$$

$$B_y = 1.167 \text{ kN} = 1.17 \text{ kN}$$

Resp.

Elemento AB

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad -A_x + 3(5) \left(\frac{3}{5}\right) - 10.25 = 0 \quad A_x = 1.75 \text{ kN}$$

Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - (3)(5) \left(\frac{4}{5}\right) - 1.167 = 0 \quad A_y = 10.167 \text{ kN} = 10.2 \text{ kN}$$

Resp.

Elemento BCD

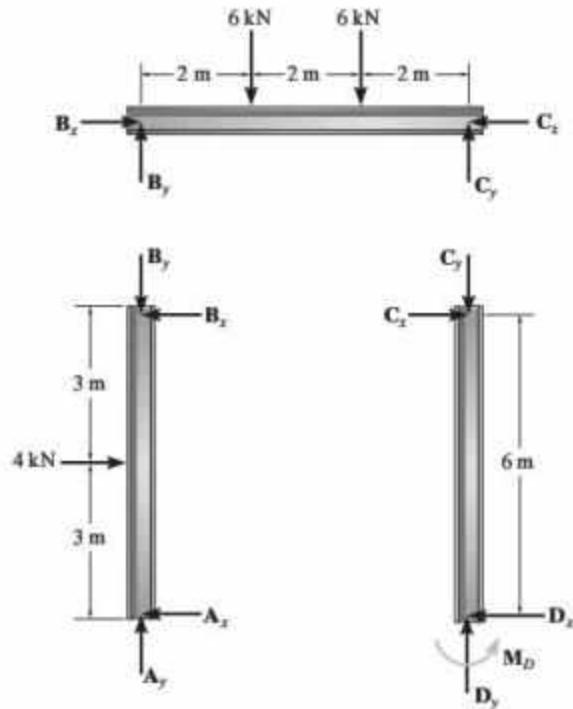
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 10.25 - D_x = 0 \quad D_x = 10.25 \text{ kN}$$

Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad D_y + 1.167 - 8 - 8 = 0 \quad D_y = 14.833 \text{ kN} = 14.8 \text{ kN}$$

Resp.

F2-8.



Elemento AB

$$\sum \circlearrowleft M_A = 0; \quad B_x(6) - 4(3) = 0 \quad B_x = 2.00 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\sum \circlearrowright M_B = 0; \quad 4(3) - A_x(6) = 0 \quad A_x = 2.00 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Elemento BC

$$\sum \rightarrow F_x = 0; \quad 2.00 - C_x = 0 \quad C_x = 2.00 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\sum \circlearrowleft M_C = 0; \quad 6(2) + 6(4) - B_y(6) = 0 \quad B_y = 6.00 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\sum \circlearrowright M_B = 0; \quad C_y(6) - 6(2) - 6(4) = 0 \quad C_y = 6.00 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Elemento AB

$$\sum \uparrow F_y = 0; \quad A_y - 6.00 = 0 \quad A_y = 6.00 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

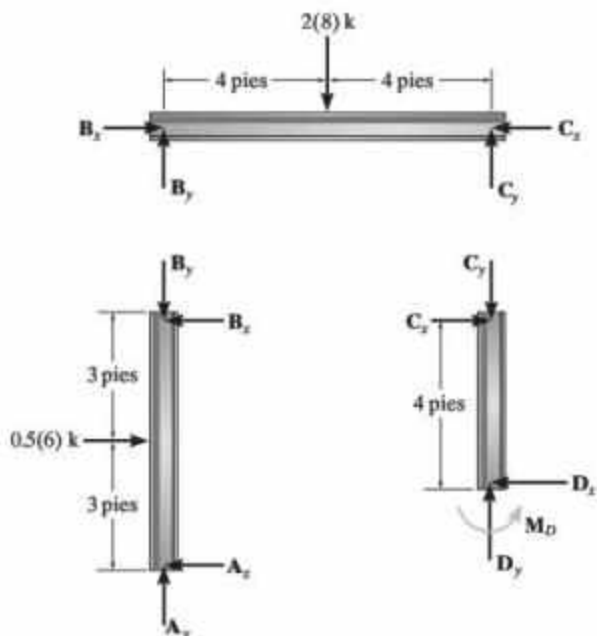
Elemento CD

$$\sum \rightarrow F_x = 0; \quad 2.00 - D_x = 0 \quad D_x = 2.00 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\sum \uparrow F_y = 0; \quad D_y - 6.00 = 0 \quad D_y = 6.00 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\sum \circlearrowleft M_D = 0; \quad M_D - 2.00(6) = 0 \quad M_D = 12.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

F2-9.



Elemento AB

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad B_x(6) - 0.5(6)(3) = 0 \quad B_x = 1.50 \text{ k}$$

Resp.

$$\zeta + \Sigma M_B = 0; \quad 0.5(6)(3) - A_x(6) = 0 \quad A_x = 1.50 \text{ k}$$

Resp.

Elemento BC

$$\zeta + \Sigma M_C = 0; \quad 2(8)(4) - B_y(8) = 0 \quad B_y = 8.00 \text{ k}$$

Resp.

$$\zeta + \Sigma M_B = 0; \quad C_y(8) - 2(8)(4) = 0 \quad C_y = 8.00 \text{ k}$$

Resp.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 1.50 - C_x = 0 \quad C_x = 1.50 \text{ k}$$

Resp.

Elemento AB

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 8.00 = 0 \quad A_y = 8.00 \text{ k}$$

Resp.

Elemento CD

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 1.50 - D_x = 0 \quad D_x = 1.50 \text{ k}$$

Resp.

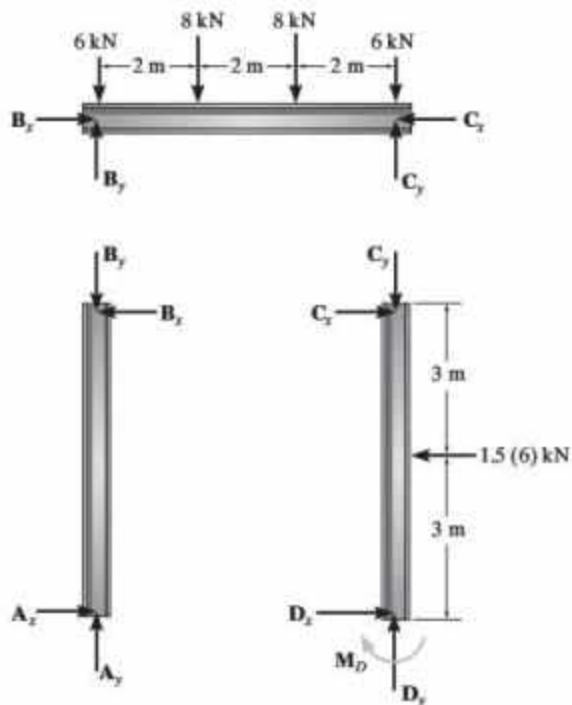
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad D_y - 8.00 = 0 \quad D_y = 8.00 \text{ k}$$

Resp.

$$\zeta + \Sigma M_D = 0; \quad M_D - 1.50(4) = 0 \quad M_D = 6.00 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Resp.

F2-10.

Elemento BC

$$\downarrow + \sum M_B = 0; \quad C_y(6) - 8(2) - 8(4) - 6(6) = 0 \quad C_y = 14.0 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \sum M_C = 0; \quad 8(2) + 8(4) + 6(6) - B_y(6) = 0 \quad B_y = 14.0 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Elemento AB

$$\downarrow + \sum M_A = 0; \quad B_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0; \quad A_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0; \quad A_y - 14.0 = 0 \quad A_y = 14.0 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Elemento BC

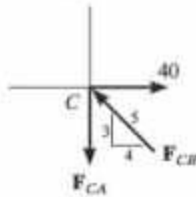
$$\rightarrow + \sum F_x = 0; \quad C_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

Elemento CD

$$\rightarrow + \sum F_x = 0; \quad D_x - 1.5(6) = 0 \quad D_x = 9.00 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0; \quad D_y - 14.0 = 0 \quad D_y = 14.0 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \sum M_D = 0; \quad 1.5(6)(3) - M_D = 0 \quad M_D = 27.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

F3-1. Junta C

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0;$$

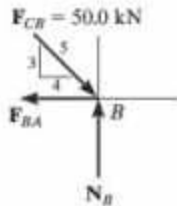
$$40 - F_{CB}\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \quad F_{CB} = 50.0 \text{ kN (C)}$$

Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$50.0\left(\frac{3}{5}\right) - F_{CA} = 0 \quad F_{CA} = 30.0 \text{ kN (T)}$$

Resp.

Junta B

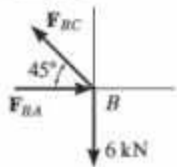
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0;$$

$$50.0\left(\frac{4}{5}\right) - F_{BA} = 0 \quad F_{BA} = 40.0 \text{ kN (T)}$$

Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$N_B - 50.0\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \quad N_B = 30.0 \text{ kN}$$

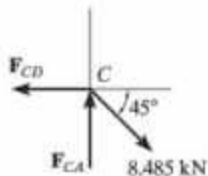
F3-2. Junta B

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$F_{BC} \sin 45^\circ - 6 = 0 \quad F_{BC} = 8.485 \text{ kN (T)} = 8.49 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0;$$

$$F_{BA} - 8.485 \cos 45^\circ = 0 \quad F_{BA} = 6.00 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.}$$

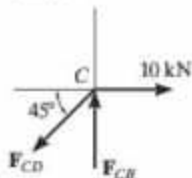
Junta C

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0;$$

$$8.485 \cos 45^\circ - F_{CD} = 0 \quad F_{CD} = 6.00 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$F_{CA} - 8.485 \sin 45^\circ = 0 \quad F_{CA} = 6.00 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.}$$

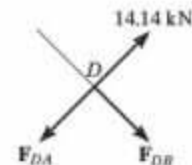
F3-3. Junta C

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0;$$

$$10 - F_{CD} \cos 45^\circ = 0 \quad F_{CD} = 14.14 \text{ kN (T)} = 14.1 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$F_{CB} - 14.14 \sin 45^\circ = 0 \quad F_{CB} = 10.0 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.}$$

Junta D

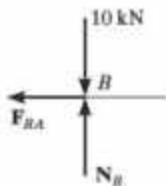
$$+\nearrow \Sigma F_x = 0;$$

$$14.14 - F_{DA} = 0 \quad F_{DA} = 14.14 \text{ kN (T)} = 14.1 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$

$$\nwarrow \Sigma F_y = 0;$$

$$F_{DB} = 0 \quad \text{Resp.}$$

Junta B



$$\pm \Sigma F_x = 0;$$

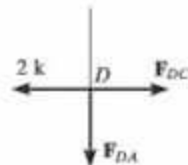
$$F_{BA} = 0$$

Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$N_B - 10.0 = 0 \quad N_D = 10.0 \text{ kN}$$

F3-4. Junta D



$$\pm \Sigma F_x = 0;$$

$$F_{DC} - 2 = 0 \quad F_{DC} = 2.00 \text{ k (T)}$$

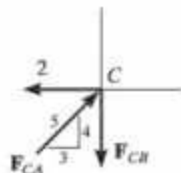
Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$F_{DA} = 0$$

Resp.

Junta C



$$\pm \Sigma F_x = 0;$$

$$F_{CA}(\frac{3}{5}) - 2 = 0 \quad F_{CA} = 3.333 \text{ k (C)} = 3.33 \text{ k (C)}$$

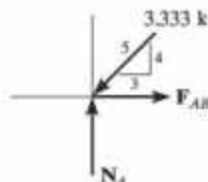
Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$3.333(\frac{4}{5}) - F_{CB} = 0 \quad F_{CB} = 2.667 \text{ k (T)} = 2.67 \text{ k (T)}$$

Resp.

Junta A



$$\pm \Sigma F_x = 0;$$

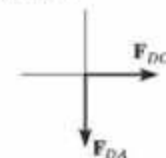
$$F_{AB} - 3.333(\frac{3}{5}) = 0 \quad F_{AB} = 2.00 \text{ k (T)}$$

Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$N_A - 3.333(\frac{4}{5}) = 0 \quad N_A = 2.667 \text{ k}$$

F3-5. Junta D



$$\pm \Sigma F_x = 0;$$

$$F_{DC} = 0$$

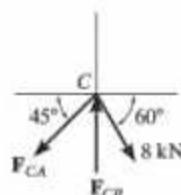
Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$F_{DA} = 0$$

Resp.

Junta C



$$\pm \Sigma F_x = 0;$$

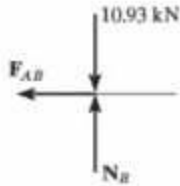
$$8 \cos 60^\circ - F_{CA} \cos 45^\circ = 0 \quad F_{CA} = 5.657 \text{ kN (T)} = 5.66 \text{ kN (T)}$$

Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{CB} - 5.657 \sin 45^\circ - 8 \sin 60^\circ = 0 \quad F_{CB} = 10.93 \text{ kN (C)} = 10.9 \text{ kN (C)}$$

Resp.

Junta B



$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; \\ +\uparrow \Sigma F_y &= 0; \end{aligned}$$

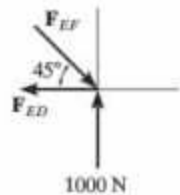
$$\begin{aligned} F_{AB} &= 0 \\ N_B &= 10.93 \text{ kN} \end{aligned}$$

Resp.

F3-6. Toda la armadura

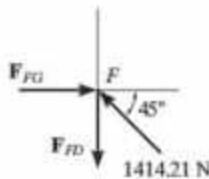
$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad E_y(8) - 600(2) - 800(4) - 600(6) = 0 \quad E_y = 1000 \text{ N}$$

Junta E



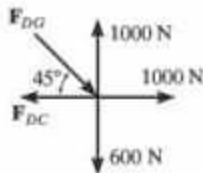
$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & 1000 - F_{EF} \sin 45^\circ &= 0 & F_{EF} &= 1414.21 \text{ N (C)} = 1.41 \text{ kN (C)} \text{ Resp.} \\ \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & 1414.21 \cos 45^\circ - F_{ED} &= 0 & F_{ED} &= 1000 \text{ N (T)} = 1.00 \text{ kN (T)} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

Junta F



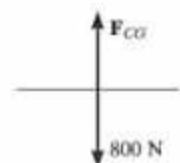
$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & F_{FG} - 1414.21 \cos 45^\circ &= 0 & F_{FG} &= 1000 \text{ N (C)} = 1.00 \text{ kN (C)} \text{ Resp.} \\ +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & 1414.21 \sin 45^\circ - F_{FD} &= 0 & F_{FD} &= 1000 \text{ N (T)} = 1.00 \text{ kN (T)} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

Junta D



$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & 1000 - 600 - F_{DG} \sin 45^\circ &= 0 & F_{DG} &= 565.69 \text{ N (C)} = 566 \text{ N (C)} \text{ Resp.} \\ \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & 1000 + 565.69 \cos 45^\circ - F_{DC} &= 0 & F_{DC} &= 1400 \text{ N (T)} = 1.40 \text{ kN (T)} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

Junta C



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{CG} - 800 = 0 \quad F_{CG} = 800 \text{ N (T)} \quad \text{Resp.}$$

Debido a la simetría,

$$\begin{aligned} F_{BC} &= F_{DC} = 1.40 \text{ kN (T)} & F_{BG} &= F_{DG} = 566 \text{ N (C)} & F_{HG} &= F_{FG} = 1.00 \text{ kN (C)} \text{ Resp.} \\ F_{HB} &= F_{FD} = 1.00 \text{ kN (T)} & F_{AH} &= F_{EF} = 1.41 \text{ kN (C)} & F_{AB} &= F_{ED} = 1.00 \text{ kN (T)} \text{ Resp.} \end{aligned}$$

F3-7. Para toda la armadura

$$\downarrow + \Sigma M_E = 0; \quad 2(5) + 2(10) + 2(15) - A_y(20) = 0 \quad A_y = 3.00 \text{ k}$$

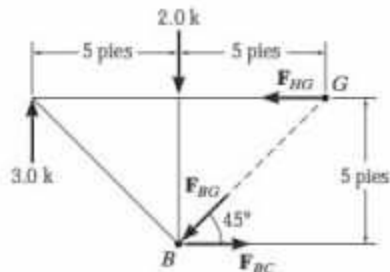
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$$

Para el segmento izquierdo

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 3.00 - 2 - F_{BG} \sin 45^\circ = 0 \quad F_{BG} = 1.41 \text{ k (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad F_{HG}(5) - 3(5) = 0 \quad F_{HG} = 3.00 \text{ k (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_G = 0; \quad F_{BC}(5) + 2(5) - 3.00(10) = 0 \quad F_{BC} = 4.00 \text{ k (T)} \quad \text{Resp.}$$

**F3-8.** Para toda la armadura

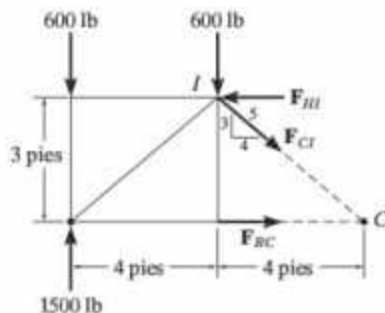
$$\downarrow + \Sigma M_E = 0; \quad 600(16) + 600(12) + 600(8) + 600(4) - A_y(16) = 0 \quad A_y = 1500 \text{ lb}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$$

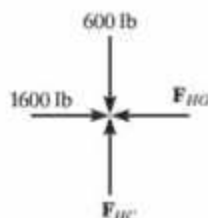
Para el segmento izquierdo

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad F_{HI}(3) + 600(4) + 600(8) - 1500(8) = 0 \quad F_{HI} = 1600 \text{ lb (C)}$$

$$\downarrow + \Sigma M_I = 0; \quad F_{BC}(3) + 600(4) - 1500(4) = 0 \quad F_{BC} = 1200 \text{ lb (T)} \quad \text{Resp.}$$



Junta H



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0;$$

$$1600 - F_{HG} = 0 \quad F_{HG} = 1600 \text{ lb (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$F_{HC} - 600 = 0 \quad F_{HC} = 600 \text{ lb (C)} \quad \text{Resp.}$$

F3-9. Para toda la armadura

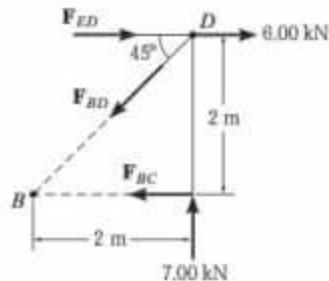
$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad N_C(4) - 8(2) - 6(2) = 0 \quad N_C = 7.00 \text{ kN}$$

Considere el segmento derecho

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 7.00 - F_{BD} \sin 45^\circ = 0 \quad F_{BD} = 9.899 \text{ kN (T)} = 9.90 \text{ kN (T)} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad 7.00(2) - 6(2) - F_{ED}(2) = 0 \quad F_{ED} = 1.00 \text{ kN (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_D = 0; \quad 0 - F_{BC}(2) = 0 \quad F_{BC} = 0 \quad \text{Resp.}$$

**F3-10.** Para toda la armadura

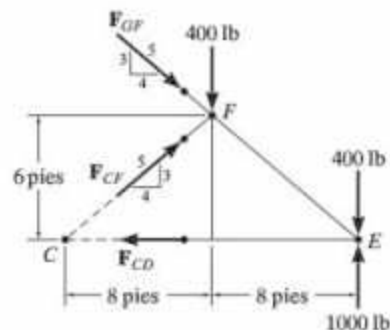
$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad N_E(32) - 400(8) - 400(16) - 400(24) - 400(32) = 0 \quad N_E = 1000 \text{ lb}$$

Considere el segmento derecho

$$\downarrow + \Sigma M_E = 0; \quad 400(8) - F_{CF}\left(\frac{3}{5}\right)(16) = 0 \quad F_{CF} = 333.33 \text{ lb (C)} = 333 \text{ lb (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad 1000(16) - 400(16) - 400(8) - F_{GF}\left(\frac{3}{5}\right)(16) = 0 \quad F_{GF} = 666.67 \text{ lb (C)} = 667 \text{ lb (C)} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_F = 0; \quad 1000(8) - 400(8) - F_{CD}(6) = 0 \quad F_{CD} = 800 \text{ lb (T)} \quad \text{Resp.}$$



F3-11. Para toda la armadura

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0;$$

$$N_D(6) - 2(6) - 4(3) = 0 \quad N_D = 4.00 \text{ kN}$$

Considere el segmento derecho

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$4.00 - 2 - F_{FC} \sin 45^\circ = 0 \quad F_{FC} = 2.828 \text{ kN (C)} = 2.83 \text{ kN (C)}$$

Resp.

$$\downarrow + \Sigma M_F = 0;$$

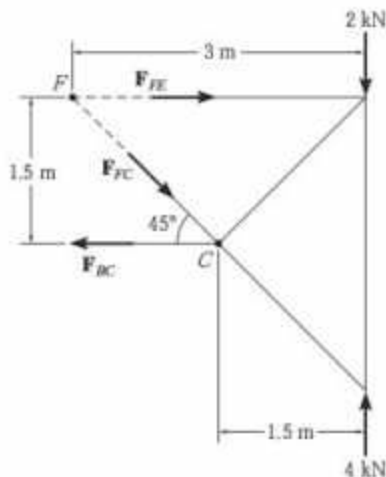
$$4.00(3) - 2(3) - F_{BC}(1.5) = 0 \quad F_{BC} = 4.00 \text{ kN (T)}$$

Resp.

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0;$$

$$4.00(1.5) - 2(1.5) - F_{FE}(1.5) = 0 \quad F_{FE} = 2.00 \text{ kN (C)}$$

Resp.

**F3-12.** Para toda la armadura

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0;$$

$$N_E(16) - 500(4) - 500(8) - 500(12) = 0 \quad N_E = 750 \text{ lb}$$

Considere el segmento derecho

$$\downarrow + \Sigma M_F = 0;$$

$$750(4) - F_{CD}(3) = 0 \quad F_{CD} = 1000 \text{ lb (T)}$$

Resp.

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0;$$

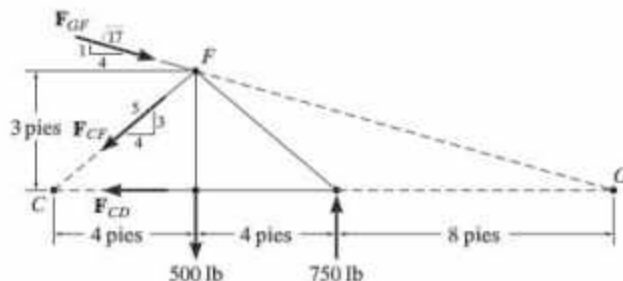
$$750(8) - 500(4) - F_{GF}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)(16) = 0 \quad F_{GF} = 1030.78 \text{ lb} = 1.03 \text{ k (C)}$$

Resp.

$$\downarrow + \Sigma M_O = 0;$$

$$F_{CF}\left(\frac{3}{5}\right)(16) + 500(12) - 750(8) = 0 \quad F_{CF} = 0$$

Resp.



- F4-1.** $\downarrow + \Sigma M_A = 0;$ $B_y(2) + 20 - 10(4) = 0$ $B_y = 10.0 \text{ kN}$
 Segmento CB
 $\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $N_C = 0$ *Resp.*
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $V_C + 10 - 10 = 0$ $V_C = 0$ *Resp.*
 $\downarrow + \Sigma M_C = 0;$ $-M_C + 10(1) - 10(3) = 0$ $M_C = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$ *Resp.*
- F4-2.** $\downarrow + \Sigma M_A = 0;$ $B_y(3) - 4(1.5)(0.75) - 8(1.5)(2.25) = 0$ $B_y = 10.5 \text{ kN}$
 Segmento CB
 $\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $N_C = 0$ *Resp.*
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $V_C + 10.5 - 8(1.5) = 0$ $V_C = 1.50 \text{ kN}$ *Resp.*
 $\downarrow + \Sigma M_C = 0;$ $10.5(1.5) - 8(1.5)(0.75) - M_C = 0$ $M_C = 6.75 \text{ kN} \cdot \text{m}$ *Resp.*
- F4-3.** $\downarrow + \Sigma M_B = 0;$ $\frac{1}{2}(6)(6)(3) - A_y(6) = 0$ $A_y = 9.00 \text{ kN}$
 $\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $A_x = 0$
 Segmento AC
 $\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $N_C = 0$ *Resp.*
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $9.00 - \frac{1}{2}(3)(1.5) - V_C = 0$ $V_C = 6.75 \text{ kN}$ *Resp.*
 $\downarrow + \Sigma M_C = 0;$ $M_C + \frac{1}{2}(3)(1.5)(0.5) - 9.00(1.5) = 0$ $M_C = 12.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ *Resp.*
- F4-4.** $\downarrow + \Sigma M_B = 0;$ $300(3)(1.5) - \frac{1}{2}(300)(3)(1) - A_y(3) = 0$ $A_y = 300 \text{ lb}$
 $\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $A_x = 0$
 Segmento AC
 $\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $N_C = 0$ *Resp.*
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $300 - 300(1.5) - V_C = 0$ $V_C = -150 \text{ lb}$ *Resp.*
 $\downarrow + \Sigma M_C = 0;$ $M_C + 300(1.5)(0.75) - 300(1.5) = 0$ $M_C = 112.5 \text{ lb}$ *Resp.*
- F4-5.** Reacciones
 $\downarrow + \Sigma M_A = 0;$ $F_B \sin 45^\circ(3) - 5(6)(3) = 0$ $F_B = 42.43 \text{ kN}$
 $\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $42.43 \cos 45^\circ - A_x = 0$ $A_x = 30.0 \text{ kN}$
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $42.43 \sin 45^\circ - 5(6) - A_y = 0$ $A_y = 0$
 Segmento AC
 $\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $N_C - 30.0 = 0$ $N_C = 30.0 \text{ kN}$ *Resp.*
 $+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $-5(1.5) - V_C = 0$ $V_C = -7.50 \text{ kN}$ *Resp.*
 $\downarrow + \Sigma M_C = 0;$ $M_C + 5(1.5)(0.75) = 0$ $M_C = -5.625 \text{ kN} \cdot \text{m}$ *Resp.*

F4-6. Reacciones

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad B_y(15) - 150(9)(10.5) - 600(6) - 800(3) = 0 \quad B_y = 1345 \text{ lb}$$

Segmento CB

$$\rightarrow + \Sigma F_x = 0; \quad N_C = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_C + 1345 - 150(6) = 0 \quad V_C = -445 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad 1345(6) - 150(6)(3) - M_C = 0 \quad M_C = 5370 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 5.37 \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

F4-7. Segmento izquierdo

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -6 - \frac{1}{2} \left(\frac{18}{3} x \right) (x) - V = 0 \quad V = \{-3x^2 - 6\} \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_O = 0; \quad M + \frac{1}{2} \left(\frac{18}{3} x \right) (x) \left(\frac{x}{3} \right) + 6x = 0 \quad M = \{-x^3 - 6x\} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

F4-8. Reacción

$$\downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad \frac{1}{2}(12)(6)(2) - A_y(6) = 0 \quad A_y = 12.0 \text{ kN}$$

Segmento izquierdo

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 12.0 - \frac{1}{2} \left(\frac{12}{6} x \right) (x) - V = 0 \quad V = \{12.0 - x^2\} \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_O = 0; \quad M + \frac{1}{2} \left(\frac{12}{6} x \right) (x) \left(\frac{x}{3} \right) - 12.0x = 0 \quad M = \left\{ 12.0x - \frac{1}{3}x^3 \right\} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

F4-9. Reacciones

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad B_y(8) - 8(4)(6) = 0 \quad B_y = 24.0 \text{ kN}$$

$$\downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad 8(4)(2) - A_y(8) = 0 \quad A_y = 8.00 \text{ kN}$$

Segmento izquierdo, $0 \leq x < 4$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 8.00 - V = 0 \quad V = \{8\} \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_O = 0; \quad M - 8.00x = 0 \quad M = \{8x\} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Segmento derecho, $4 \text{ m} < x < 8 \text{ m}$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V + 24.0 - 8(8 - x) = 0 \quad V = \{40 - 8x\} \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_O = 0; \quad 24.0(8 - x) - 8(8 - x) \left(\frac{8 - x}{2} \right) - M = 0 \quad M = \{-4x^2 + 40x - 64\} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

F4-10. $0 \leq x < 2 \text{ m}$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_O = 0; \quad M + 20 = 0 \quad M = -20 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

 $2 \text{ m} < x \leq 4 \text{ m}$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -5(x - 2) - V = 0 \quad V = \{10 - 5x\} \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_O = 0; \quad M + 5(x - 2) \left(\frac{x - 2}{2} \right) + 15 + 20 = 0 \quad M = \left\{ -\frac{5}{2}x^2 + 10x - 45 \right\} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

F4-11. Reacciones

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 5(2) - 15 = 0 \quad A_y = 25.0 \text{ kN}$$

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad M_A - 5(2)(1) - 15(4) = 0 \quad M_A = 70.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Segmento izquierdo, $0 \leq x < 2 \text{ m}$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 25.0 - 5x - V = 0 \quad V = \{25 - 5x\} \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad M + 5x\left(\frac{x}{2}\right) + 70.0 - 25.0x = 0 \quad M = \left\{-\frac{5}{2}x^2 + 25x - 70\right\} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Segmento derecho, $2 \text{ m} < x \leq 4 \text{ m}$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V - 15 = 0 \quad V = 15 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad -M - 15(4 - x) = 0 \quad M = \{15x - 60\} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

F4-12. Reacciones en los soportes

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad B_y(24) - 2(12)(6) - 18(12) = 0 \quad B_y = 15.0 \text{ k}$$

$$\zeta + \Sigma M_B = 0; \quad 18(12) + 2(12)(18) - A_y(24) = 0 \quad A_y = 27.0 \text{ k}$$

Segmento izquierdo, $0 \leq x < 12 \text{ pies}$

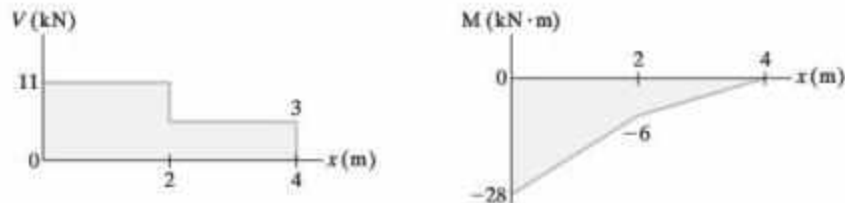
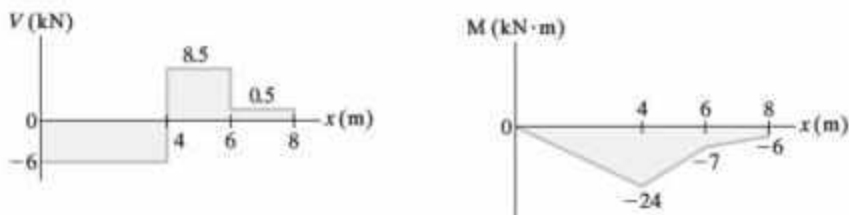
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 27.0 - 2x - V = 0 \quad V = \{27 - 2x\} \text{ k} \quad \text{Resp.}$$

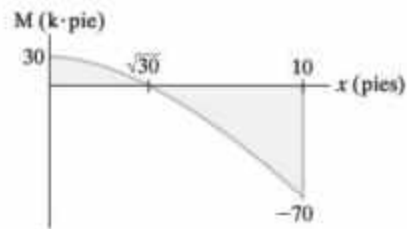
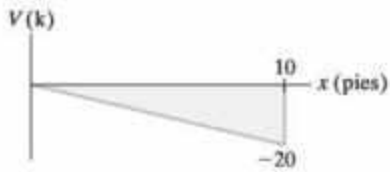
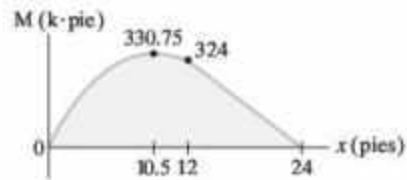
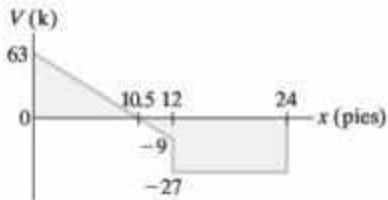
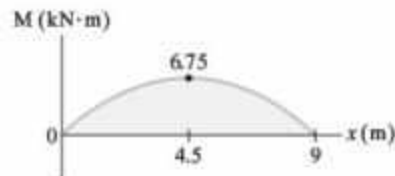
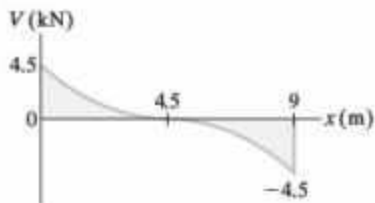
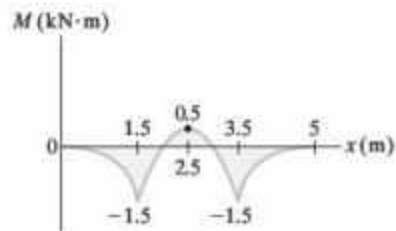
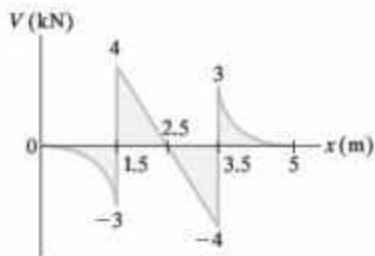
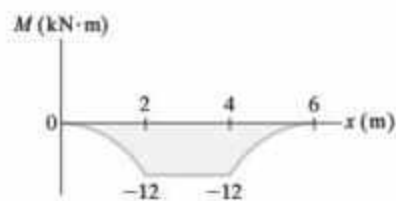
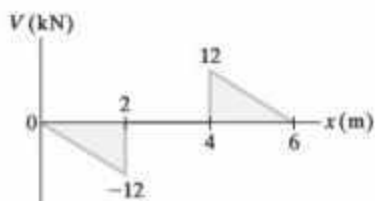
$$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad M + 2x\left(\frac{x}{2}\right) - 27.0x = 0 \quad M = \{-x^2 + 27x\} \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

Segmento derecho, $12 \text{ pies} < x \leq 24 \text{ pies}$

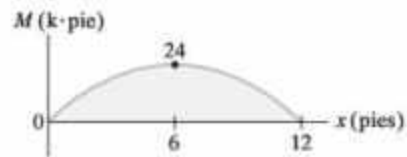
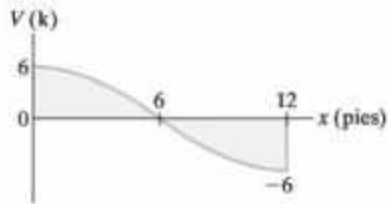
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V + 15.0 = 0 \quad V = \{-15 \text{ k}\} \quad \text{Resp.}$$

$$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad 15.0(24 - x) - M = 0 \quad M = \{-15x + 360\} \text{ k} \cdot \text{pie} \quad \text{Resp.}$$

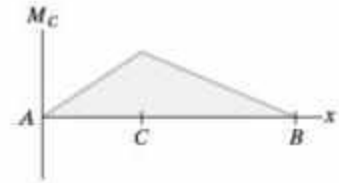
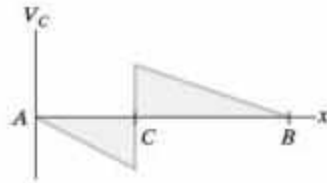
F4-13.**F4-14.**

F4-15.**F4-16.****F4-17.****F4-18.****F4-19.**

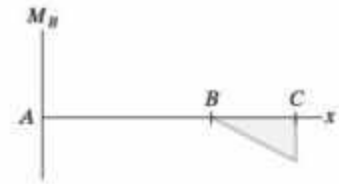
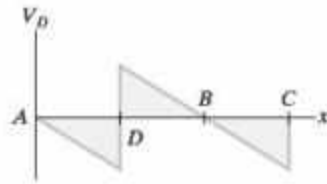
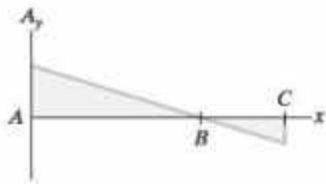
F4-20.



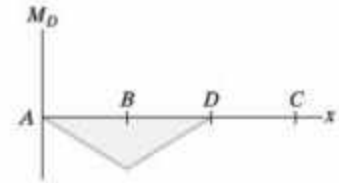
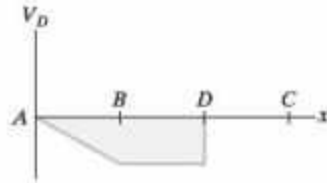
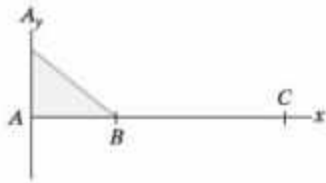
F6-1.



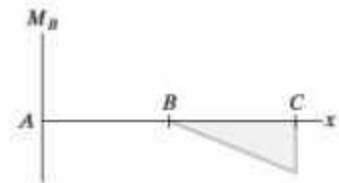
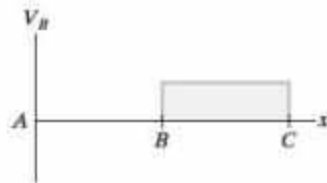
F6-2.



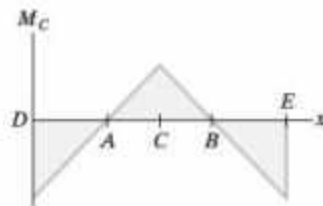
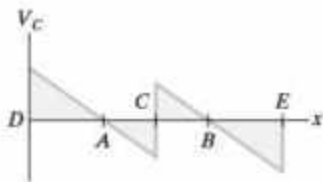
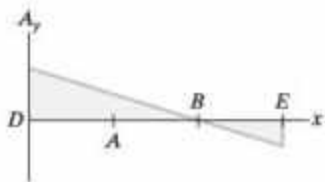
F6-3.



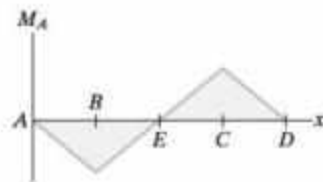
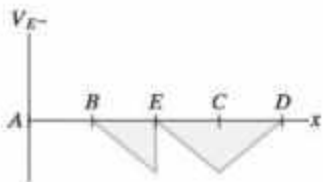
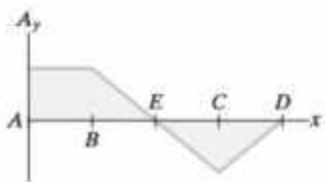
F6-4.



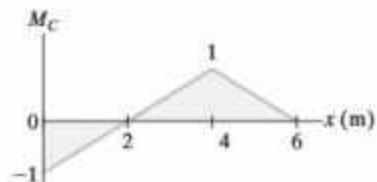
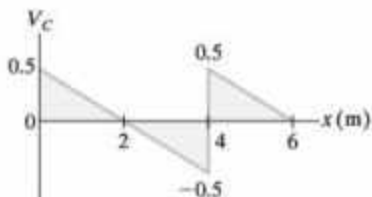
F6-5.



F6-6.



F6-7.



$$(M_C)_{\max(+)} = 8(1) + \left[\frac{1}{2}(6-2)(1) \right](1.5) + \left[\frac{1}{2}(2)(-1) \right](2) + \left[\frac{1}{2}(6-2)(1) \right](2)$$

$$= 13.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

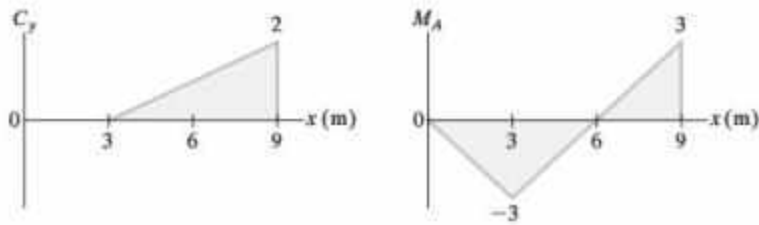
Resp.

$$(V_C)_{\max(+)} = 8(0.5) + \left[\frac{1}{2}(2)(0.5) \right](1.5) + \left[\frac{1}{2}(6-4)(0.5) \right](1.5)$$

$$+ \left[\frac{1}{2}(2)(0.5) \right](2) + \left[\frac{1}{2}(4-2)(-0.5) \right](2) + \left[\frac{1}{2}(6-4)(0.5) \right](2)$$

$$= 6.50 \text{ kN}$$

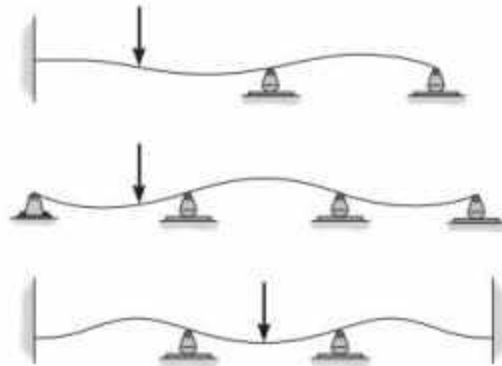
Resp.

F6-8.

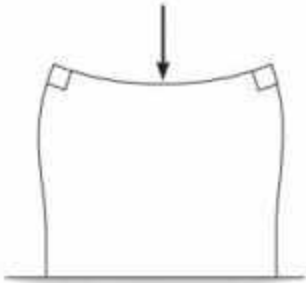
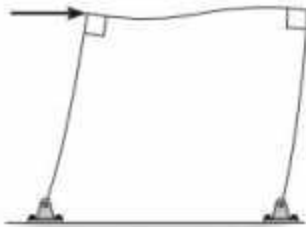
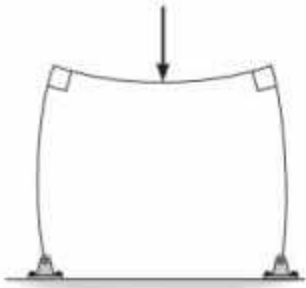
$$\mathbf{a)} \quad (C_y)_{\max(+)} = 6(2) + \left[\frac{1}{2}(9-3)(2) \right](2) + \left[\frac{1}{2}(9-3)(2) \right](4) = 48 \text{ kN}$$

Resp.

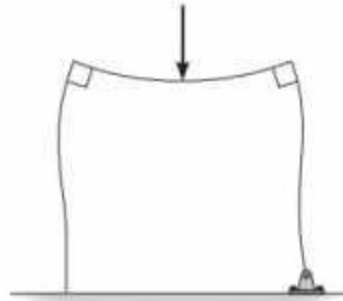
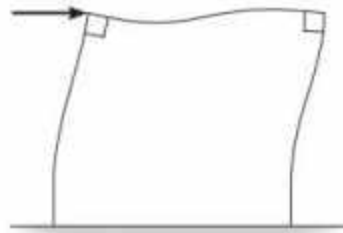
$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad (M_A)_{\max(-)} &= 6(-3) + \left[\frac{1}{2}(6-0)(-3) \right](2) + \left[\frac{1}{2}(6-0)(-3) \right](4) + \left[\frac{1}{2}(9-6)(3) \right](4) \\ &= -54 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

*Resp.***F8-1.**

F8-2.



F8-3.



F8-4. Para $0 \leq x_1 < \frac{L}{2}$

$$M_1 = \frac{P}{2}x_1$$

$$EI \frac{d^2 v_1}{dx_1^2} = \frac{P}{2}x_1$$

$$EI \frac{dv_1}{dx_1} = \frac{P}{4}x_1^2 + C_1 \quad (1)$$

$$EI v_1 = \frac{P}{12}x_1^3 + C_1 x_1 + C_2 \quad (2)$$

Para $\frac{L}{2} < x_2 \leq L$

$$M_2 = \frac{P}{2}(L - x_2) = \frac{PL}{2} - \frac{P}{2}x_2$$

$$EI \frac{d^2 v_2}{dx_2^2} = \frac{PL}{2} - \frac{P}{2}x_2$$

$$EI \frac{dv_2}{dx_2} = \frac{PL}{2}x_2 - \frac{P}{4}x_2^2 + C_3 \quad (3)$$

$$EI v_2 = \frac{PL}{4}x_2^2 - \frac{P}{12}x_2^3 + C_3 x_2 + C_4 \quad (4)$$

$v_1 = 0$ en $x_1 = 0$. De la ecuación (2), $C_2 = 0$

$\frac{dv_1}{dx_1} = 0$ en $x_1 = \frac{L}{2}$. De la ecuación (1), $C_1 = -\frac{PL^2}{16}$

$\frac{dv_2}{dx_2} = 0$ en $x_2 = \frac{L}{2}$. De la ecuación (3), $C_3 = -\frac{3PL^2}{16}$

$v_2 = 0$ en $x_2 = L$. De la ecuación (4), $C_4 = \frac{PL^3}{48}$

$$v_1 = \frac{Px_1}{48EI}(4x_1^2 - 3L^2) \quad \text{Resp.}$$

$$v_2 = \frac{P}{48EI}(-4x_2^3 + 12Lx_2^2 - 9L^2x_2 + L^3) \quad \text{Resp.}$$

F8-5. $M = Px - PL$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = Px - PL$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{P}{2}x^2 - PLx + C_1 \quad (1)$$

$$EI v = \frac{P}{6}x^3 - \frac{PL}{2}x^2 + C_1 x + C_2 \quad (2)$$

$\frac{dv}{dx} = 0$ en $x = 0$. De la ecuación (1), $C_1 = 0$

$v = 0$ en $x = 0$. De la ecuación (2), $C_2 = 0$

$$v = \frac{Px}{6EI}(x^2 - 3Lx) \quad \text{Resp.}$$

F8-6. $M = M_0 - \frac{M_0}{L}x$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M_0 - \frac{M_0}{L}x$$

$$EI \frac{dv}{dx} = M_0x - \frac{M_0}{2L}x^2 + C_1$$

$$EI v = \frac{M_0}{2}x^2 - \frac{M_0}{6L}x^3 + C_1x + C_2 \quad (1)$$

$v = 0$ en $x = 0$. De la ecuación (1), $C_2 = 0$

$v = 0$ en $x = L$. De la ecuación (1), $C_1 = -\frac{M_0L}{3}$

$$v = \frac{M_0}{6EIL}(-x^3 + 3Lx^2 - 2L^2x)$$

Resp.

F8-7. Para $0 \leq x_1 < \frac{L}{2}$

$$M = -\frac{M_0}{L}x_1$$

$$EI \frac{d^2v_1}{dx_1^2} = -\frac{M_0}{L}x_1$$

$$EI \frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{M_0}{2L}x_1^2 + C_1 \quad (1)$$

$$EI v_1 = -\frac{M_0}{6L}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \quad (2)$$

Para $\frac{L}{2} < x_2 \leq L$

$$M = M_0 - \frac{M_0}{L}x_2$$

$$EI \frac{d^2v_2}{dx_2^2} = M_0 - \frac{M_0}{L}x_2$$

$$EI \frac{dv_2}{dx_2} = M_0x_2 - \frac{M_0}{2L}x_2^2 + C_3 \quad (3)$$

$$EI v_2 = \frac{M_0}{2}x_2^2 - \frac{M_0}{6L}x_2^3 + C_3x_2 + C_4 \quad (4)$$

$v_1 = 0$ en $x_1 = 0$. De la ecuación (2), $C_2 = 0$

$v_2 = 0$ en $x_2 = L$. De la ecuación (4), $0 = C_3L + C_4 + \frac{M_0L^2}{3}$ (5)

$\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{dv_2}{dx_2}$ en $x_1 = x_2 = \frac{L}{2}$. De las ecuaciones (1) y (3), $C_1 - C_3 = \frac{M_0L}{2}$ (6)

$v_1 = v_2$ en $x_1 = x_2 = \frac{L}{2}$. De las ecuaciones (2) y (4), $C_1L - C_3L - 2C_4 = \frac{M_0L^2}{4}$ (7)

Resolviendo las ecuaciones (5), (6) y (7)

$$C_4 = \frac{M_0 L^2}{8} \quad C_3 = -\frac{11M_0 L}{24} \quad C_1 = \frac{M_0 L}{24}$$

$$v_1 = \frac{M_0}{24EIL}(-4x_1^3 + L^2 x_1) \quad \text{Resp.}$$

$$v_2 = \frac{M_0}{24EIL}(-4x_2^3 + 12Lx_2^2 - 11L^2 x_2 + 3L^3) \quad \text{Resp.}$$

F8-8. $M = -\frac{w}{2}x^2 + wLx - \frac{wL^2}{2}$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{w}{2}x^2 + wLx - \frac{wL^2}{2}$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{w}{6}x^3 + \frac{wL}{2}x^2 - \frac{wL^2}{2}x + C_1 \quad (1)$$

$$EI v = -\frac{w}{24}x^4 + \frac{wL}{6}x^3 - \frac{wL^2}{4}x^2 + C_1 x + C_2 \quad (2)$$

$$\frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{en } x = 0. \quad \text{De la ecuación (1), } C_1 = 0$$

$$v = 0 \quad \text{en } x = 0. \quad \text{De la ecuación (2), } C_2 = 0$$

$$v = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 4Lx^3 - 6L^2 x^2) \quad \text{Resp.}$$

F8-9. $M = -\frac{w_0}{6L}x^3$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{w_0}{6L}x^3$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{24L}x^4 + C_1 \quad (1)$$

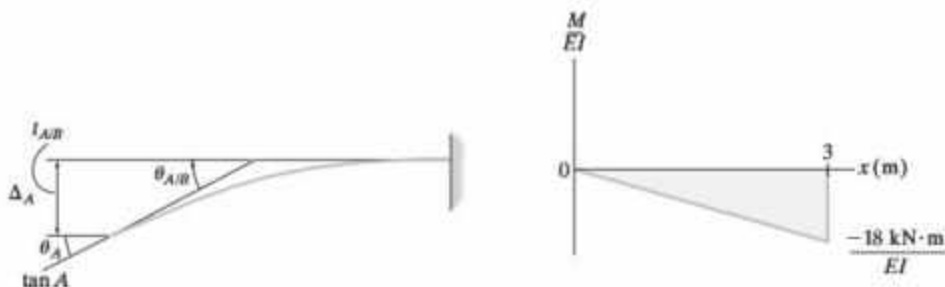
$$EI v = -\frac{w_0}{120L}x^5 + C_1 x + C_2 \quad (2)$$

$$\frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{en } x = L. \quad \text{De la ecuación (1), } C_1 = \frac{w_0 L^3}{24}$$

$$v = 0 \quad \text{en } x = L. \quad \text{De la ecuación (2), } C_2 = -\frac{w_0 L^4}{30}$$

$$v = \frac{w_0}{120EIL}(-x^5 + 5L^4 x - 4L^5) \quad \text{Resp.}$$

F8-10.



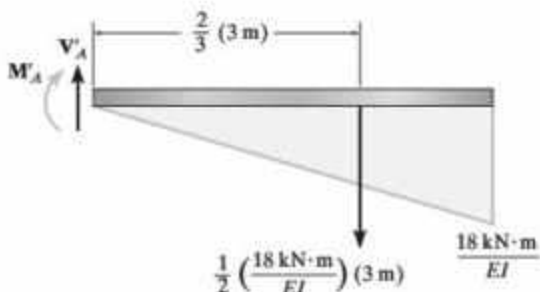
$$\theta_A = |\theta_{A/B}| = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{-18 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (3 \text{ m}) \right| = \frac{27 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nearrow$$

Resp.

$$\Delta_A = |t_{A/B}| = \left[\left[\frac{1}{2} \left(\frac{-18 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (3 \text{ m}) \right] \left[\frac{2}{3} (3 \text{ m}) \right] \right] = \frac{54 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \downarrow$$

Resp.

F8-11.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_A - \frac{1}{2} \left(\frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (3 \text{ m}) = 0 \quad \theta_A = \frac{27 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nearrow$$

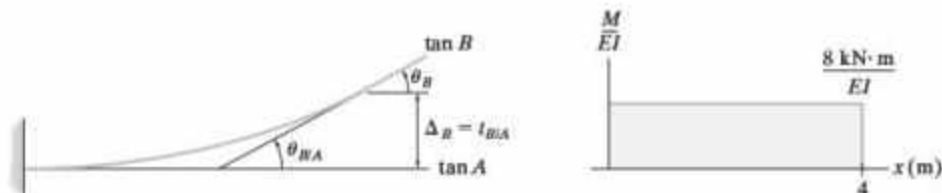
Resp.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0; \quad -M'_A - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (3 \text{ m}) \right] \left[\frac{2}{3} (3 \text{ m}) \right] = 0$$

$$M'_A = \Delta_A = -\frac{54 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{54 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Resp.

F8-12.



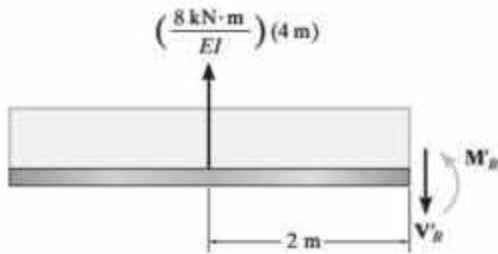
$$\theta_B = |\theta_{B/A}| = \left(\frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (4 \text{ m}) = \frac{32 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \angle$$

Resp.

$$\Delta_B = |t_{B/A}| = \left[\left(\frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (4 \text{ m}) \right] \left[\frac{1}{2} (4 \text{ m}) \right] = \frac{64 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \uparrow$$

Resp.

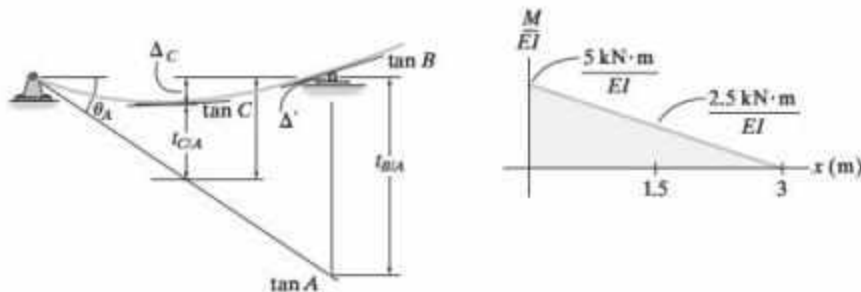
F8-13.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad \left(\frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (4 \text{ m}) - V'_B = 0 \quad \theta_B = \frac{32 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \angle \quad \text{Resp.}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0; \quad M'_B - \left[\left(\frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (4 \text{ m}) \right] (2 \text{ m}) = 0 \quad M'_B = \Delta_B = \frac{64 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \uparrow \quad \text{Resp.}$$

F8-14.



$$t_{B/A} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{5 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (3 \text{ m}) \right] \left[\frac{2}{3} (3 \text{ m}) \right] = \frac{15 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$t_{C/A} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2.5 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (1.5 \text{ m}) \right] \left[\frac{2}{3} (1.5 \text{ m}) \right] + \left[\left(\frac{2.5 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (1.5 \text{ m}) \right] \left[\frac{1}{2} (1.5 \text{ m}) \right]$$

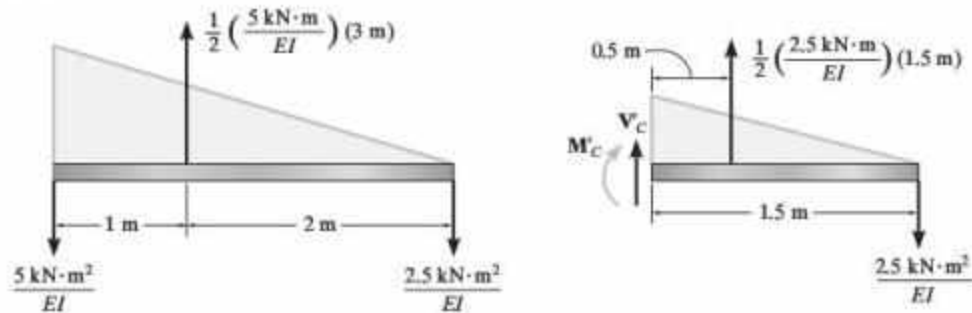
$$= \frac{4.6875 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta' = \frac{1}{2} t_{B/A} = \frac{1}{2} \left(\frac{15 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \right) = \frac{7.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{|t_{B/A}|}{L_{AB}} = \frac{15 \text{ kN} \cdot \text{m}^3 / EI}{3 \text{ m}} = \frac{5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \searrow \quad \text{Resp.}$$

$$\Delta_C = \Delta' - t_{C/A} = \frac{7.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} - \frac{4.6875 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{2.81 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

F8-15.

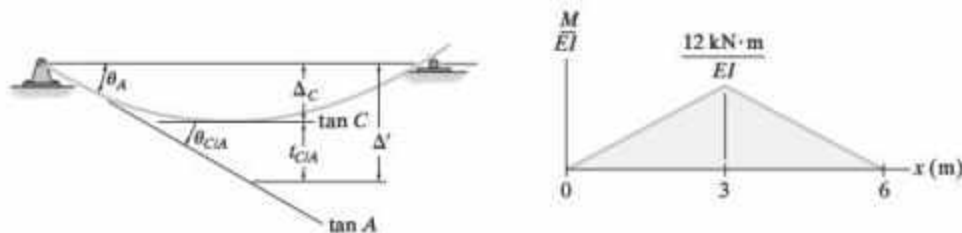


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; -V'_A - \frac{5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} = 0 \quad \theta_A = V'_A = -\frac{5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} = \frac{5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nabla \quad \text{Resp.}$$

$$+\Sigma M_C = 0; \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2.5 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (1.5 \text{ m}) \right] (0.5 \text{ m}) - \left(\frac{2.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \right) (1.5 \text{ m}) - M'_C = 0$$

$$\Delta_C = M'_C = -\frac{2.8125 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{2.81 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

F8-16.



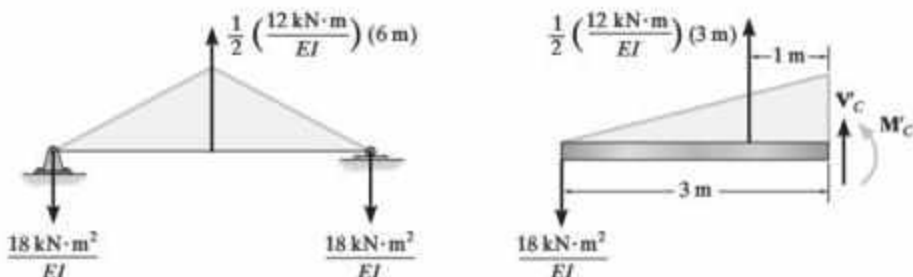
$$\theta_A = \theta_{C/A} = \frac{1}{2} \left(\frac{12 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (3 \text{ m}) = \frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nabla \quad \text{Resp.}$$

$$t_{C/A} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{12 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (3 \text{ m}) \right] \left[\frac{1}{3} (3 \text{ m}) \right] = \frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta' = \theta_A L_{AC} = \left(\frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \right) (3 \text{ m}) = \frac{54 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_C = \Delta' - t_{C/A} = \frac{54 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} - \frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{36 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

F8-17.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V'_A - \frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} = 0 \quad V'_A = \theta_A = -\frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} = \frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \searrow$$

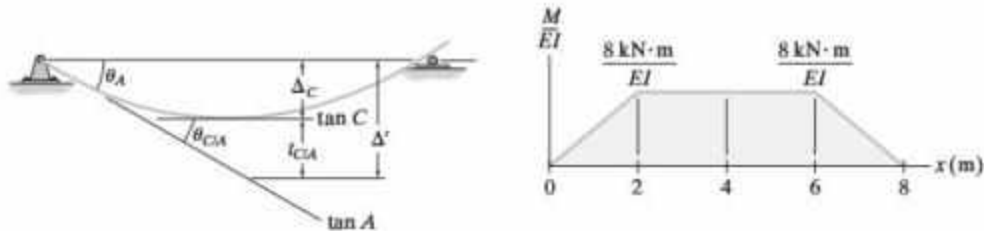
Resp.

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad M'_C + \left(\frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \right) (3 \text{ m}) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{12 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (3 \text{ m}) \right] (1 \text{ m}) = 0$$

$$M'_C = \Delta_C = -\frac{36 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{36 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Resp.

F8-18.



$$\theta_A = \theta_{C/A} = \frac{1}{2} \left(\frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (2 \text{ m}) + \left(\frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (2 \text{ m}) = \frac{24 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \searrow$$

Resp.

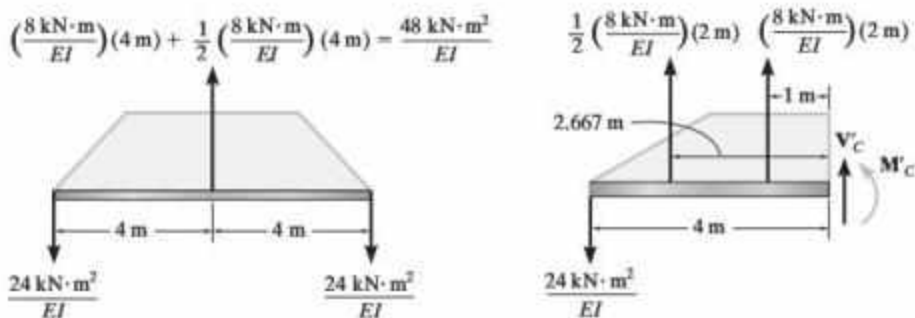
$$t_{C/A} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (2 \text{ m}) \right] \left[2 \text{ m} + \frac{1}{3} (2 \text{ m}) \right] + \left[\left(\frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (2 \text{ m}) \right] (1 \text{ m}) = \frac{37.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta' = \theta_A L_{AC} = \left(\frac{24 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \right) (4 \text{ m}) = \frac{96 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_C = \Delta' - t_{C/A} = \frac{96 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} - \frac{37.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{58.7 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Resp.

F8-19.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V'_A - \frac{24 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} = 0 \quad \theta_A = V'_A = \frac{24 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \searrow$$

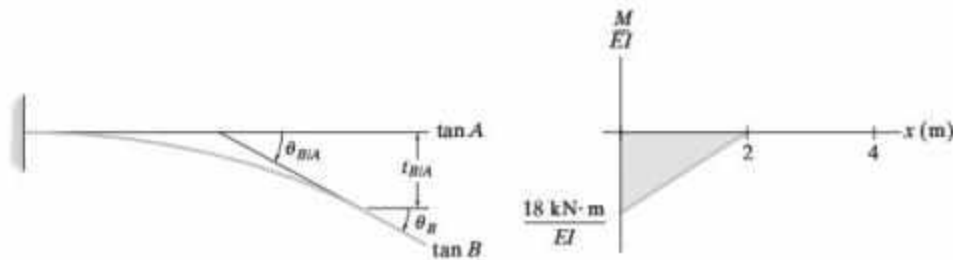
Resp.

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad M'_C + \left(\frac{24 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \right) (4 \text{ m}) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (2 \text{ m}) \right] (2.667 \text{ m}) - \left(\frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (2 \text{ m}) (1 \text{ m}) = 0$$

$$\Delta_C = M'_C = \frac{58.7 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Resp.

F8-20.

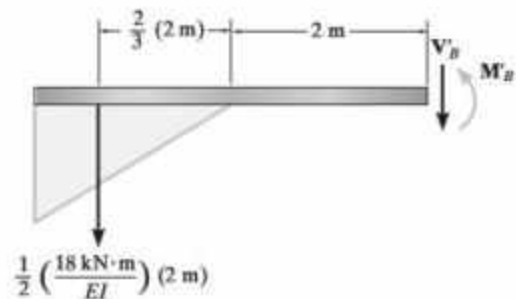


$$\theta_B = |\theta_{B/A}| = \left| \frac{1}{2} \left(-\frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (2 \text{ m}) \right| = \frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \curvearrowright$$

Resp.

$$\Delta_B = |t_{B/A}| = \left| \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (2 \text{ m}) \right] \left[2 \text{ m} + \frac{2}{3}(2 \text{ m}) \right] \right| = \frac{60 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \downarrow$$

F8-21.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V_B - \frac{1}{2} \left(\frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (2 \text{ m}) = 0$$

$$\theta_B = -\frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} = \frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \curvearrowright$$

Resp.

$$+\Sigma M_B = 0; \quad M'_B + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \right) (2 \text{ m}) \right] \left[\frac{2}{3}(2 \text{ m}) + 2 \text{ m} \right] = 0$$

$$M'_B = \Delta_B = -\frac{60 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{60 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Resp.

F9-1.

Elemento	n (lb)	N (lb)	L (pies)	nNL (lb ² ·pie)
AB	-1.667	-250	10	4166.67
AC	1	150	6	900.00
BC	1.333	200	8	2133.33
				$\Sigma 7200$

Entonces,

$$1 \text{ lb} \cdot \Delta_{B_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{7200 \text{ lb}^2 \cdot \text{pie}}{AE}$$

$$\Delta_{B_v} = \frac{7200 \text{ lb} \cdot \text{pie}}{AE} \downarrow$$

Resp.

F9-2.

Elemento	N	$\frac{\delta N}{\delta P}$	N ($P = 150$ lb)	L (pies)	$N \left(\frac{\delta N}{\delta P} \right) L$ (lb·pie)
AB	-1.667 P	-1.667	-250	10	4166.67
AC	P	1	150	6	900.00
BC	1.333 P	1.333	200	8	2133.33
					$\Sigma 7200$

$$\Delta_{B_v} = \sum N \left(\frac{\delta N}{\delta P} \right) \frac{L}{AE} = \frac{7200 \text{ lb} \cdot \text{pie}}{AE} \downarrow$$

Resp.

F9-3.

Elemento	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN ² ·m)
AB	1	-4.041	2	-8.0829
AC	0	8.0829	2	0
BC	0	-8.0829	2	0
CD	0	8.0829	1	0
				$\Sigma -8.0829$

Entonces,

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{A_h} = \sum \frac{nNL}{AE} = -\frac{8.0829 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}}{AE}$$

$$\Delta_{A_h} = -\frac{8.08 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} = \frac{8.08 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} \rightarrow$$

Resp.

F9-4.

Elemento	N (kN)	$\frac{\delta N}{\delta P}$	N ($P = 0$) (kN)	L (m)	$N \left(\frac{\delta N}{\delta P} \right) L$ (kN·m)
AB	$P - 4.041$	1	-4.041	2	-8.083
AC	8.083	0	8.083	2	0
BC	-8.083	0	-8.083	2	0
CD	8.083	0	8.083	1	0
					$\Sigma -8.083$

$$\Delta_{A_h} = \sum N \left(\frac{\delta N}{\delta P} \right) \frac{L}{AE} = -\frac{8.083 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} = \frac{8.08 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} \rightarrow$$

Resp.

F9-5.

Elemento	n (kN)	N (kN)	L	nNL (kN ² ·m)
AB	0	0	3	0
AC	1.414	8.485	$3\sqrt{2}$	50.91
BC	-1	-6	3	18.00
AD	0	-6	3	0
CD	-1	0	3	0
				$\Sigma 68.91$

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{D_h} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{68.91 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}}{AE}$$

$$\Delta_{D_h} = \frac{68.9 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} \rightarrow$$

*Resp.***F9-6.**

Elemento	N (kN)	$\frac{\delta N}{\delta P}$	$N (P=0)$ (kN)	L (m)	$N \left(\frac{\delta N}{\delta P} \right) L$ (kN·m)
AB	0	0	0	3	0
AC	$\sqrt{2}(P+6)$	$\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	50.91
BC	$-(P+6)$	-1	-6	3	18.00
AD	-6	0	-6	3	0
CD	-P	-1	0	3	0
					$\Sigma 68.91$

$$\Delta_{D_h} = \sum N \left(\frac{\delta N}{\delta P} \right) \frac{L}{AE}$$

$$= \frac{68.9 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} \rightarrow$$

*Resp.***F9-7.**

Elemento	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN ² ·m)
AB	0.375	18.75	3	21.09
BC	0.375	18.75	3	21.09
AD	-0.625	-31.25	5	97.66
CD	-0.625	-31.25	5	97.66
BD	0	50	4	0
				$\Sigma 237.5$

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{D_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{237.5 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}}{AE}$$

$$\Delta_{D_v} = \frac{237.5 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} \downarrow$$

Resp.

F9-8.

Elemento	N (kN)	$\frac{\delta N}{\delta P}$	N ($P = 0$) (kN)	L (m)	$N \left(\frac{\delta N}{\delta P} \right) L$ (kN · m)
AB	$\frac{3}{8}P + 18.75$	0.375	18.75	3	21.09
BC	$\frac{3}{8}P + 18.75$	0.375	18.75	3	21.09
AD	$-\left(\frac{5}{8}P + 31.25\right)$	-0.625	-31.25	5	97.66
CD	$-\left(\frac{5}{8}P + 31.25\right)$	-0.625	-31.25	5	97.66
BD	50	0	50	4	0
					$\Sigma 237.5$

$$\Delta_{D_v} = \sum N \left(\frac{\delta N}{\delta P} \right) \frac{L}{AE} = \frac{237.5 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} \downarrow$$

Resp.

F9-9.

Elemento	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN ² · m)
AB	0	-6	1.5	0
BC	0	-6	1.5	0
BD	1	0	2	0
CD	0	10	2.5	0
AD	-1.25	-10	2.5	31.25
DE	0.75	12	1.5	13.5
				$\Sigma 44.75$

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{B_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{44.75 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}}{AE}$$

$$\Delta_{B_v} = \frac{44.75 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} \downarrow$$

Resp.

F9-10.

Elemento	N (kN)	$\frac{\delta N}{\delta P}$	N ($P = 0$) (kN)	L (m)	$N \left(\frac{\delta N}{\delta P} \right) L$ (kN · m)
AB	-6	0	-6	1.5	0
BC	-6	0	-6	1.5	0
BD	P	1	0	2	0
CD	10	0	10	2.5	0
AD	$-(1.25P + 10)$	-1.25	-10	2.5	31.25
DE	$0.75P + 12$	0.75	12	1.5	13.5
					$\Sigma 44.75$

$$\Delta_{B_v} = \sum N \left(\frac{\delta N}{\delta P} \right) \frac{L}{AE} = \frac{44.75 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} \downarrow$$

Resp.

P9-11.

Elemento	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN ² ·m)
AB	0.5	50	2	50.00
DE	0.5	50	2	50.00
BC	0.5	50	2	50.00
CD	0.5	50	2	50.00
AH	-0.7071	-70.71	$2\sqrt{2}$	141.42
EF	-0.7071	-70.71	$2\sqrt{2}$	141.42
BH	0	30	2	0
DF	0	30	2	0
CH	0.7071	28.28	$2\sqrt{2}$	56.57
CF	0.7071	28.28	$2\sqrt{2}$	56.57
CG	0	0	2	0
GH	-1	-70	2	140.00
FG	-1	-70	2	140.00

 $\Sigma 878.98$

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{C_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{878.98 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}}{AE}$$

$$\Delta_{C_v} = \frac{878.98 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} \downarrow$$

Resp.

P9-12.

Elemento	N (kN)	$\frac{\delta N}{\delta P}$	N ($P = 40$ kN)	L (m)	$N \left(\frac{\delta N}{\delta P} \right) L$ (kN·m)
AB	$0.5P + 30$	0.5	50	2	50.00
DE	$0.5P + 30$	0.5	50	2	50.00
BC	$0.5P + 30$	0.5	50	2	50.00
CD	$0.5P + 30$	0.5	50	2	50.00
AH	$-(0.7071P + 42.43)$	-0.7071	-70.71	$2\sqrt{2}$	141.42
EF	$-(0.7071P + 42.43)$	-0.7071	-70.71	$2\sqrt{2}$	141.42
BH	30	0	30	2	0
DF	30	0	30	2	0
CH	$0.7071P$	0.7071	28.28	$2\sqrt{2}$	56.57
CF	$0.7071P$	0.7071	28.28	$2\sqrt{2}$	56.57
CG	0	0	0	2	0
GH	$-(P + 30)$	-1	-70	2	140.00
FG	$-(P + 30)$	-1	-70	2	140.00

 $\Sigma 878.98$

$$\Delta_{C_v} = \sum N \left(\frac{\delta N}{\delta P} \right) \frac{L}{AE} = \frac{878.98 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE}$$

$$\Delta_{C_v} = \frac{878.98 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} \downarrow$$

Resp.

P9-13. Para la pendiente,

$$1 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \theta_A = \int_0^2 \frac{m_\theta M}{EI} dx = \int_0^{3\text{m}} \frac{(-1)(-30x)}{EI} dx = \frac{135 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{135 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nearrow \quad \text{Resp.}$$

Para el desplazamiento,

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{A_v} = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^{3\text{m}} \frac{(-x)(-30x)}{EI} dx = \frac{270 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_{A_v} = \frac{270 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

P9-14. Para la pendiente, $M = -30x - M'$. Por lo tanto, $\frac{\partial M}{\partial M'} = -1$. Sea $M' = 0$. Entonces, $M = (-30x) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$\theta_A = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI} = \int_0^{3\text{m}} \frac{(-30x)(-1)dx}{EI} = \frac{135 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nearrow \quad \text{Resp.}$$

Para el desplazamiento, $M = -Px$. Por lo tanto, $\frac{\partial M}{\partial P} = -x$.

Sea $P = 30 \text{ kN}$. Entonces, $M = (-30x) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$\Delta_{A_v} = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} = \int_0^{3\text{m}} \frac{(-30x)(-x)dx}{EI} = \frac{270 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

P9-15. Para la pendiente, $m_\theta = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $M = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$1 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \theta_A = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx = \int_0^{3\text{m}} \frac{(1)(4)dx}{EI} = \frac{12 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{12 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \searrow \quad \text{Resp.}$$

Para el desplazamiento, $m = x \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $M = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{A_v} = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^{3\text{m}} \frac{x(4)dx}{EI} = \frac{18 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_{A_v} = \frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \uparrow \quad \text{Resp.}$$

P9-16. Para la pendiente, $M = M'$. Por lo tanto, $\frac{\partial M}{\partial M'} = 1$.

Sea $M' = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Entonces, $M = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$\theta_A = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI} = \int_0^{3\text{m}} \frac{4(1)dx}{EI} = \frac{12 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \searrow \quad \text{Resp.}$$

Para el desplazamiento, $M = (Px + 4) \text{ kN} \cdot \text{m}$. Por lo tanto, $\frac{\partial M}{\partial P} = x$.

Sea $P = 0$. Entonces, $M = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$\Delta_{A_v} = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} = \int_0^{3\text{m}} \frac{4(x)dx}{EI} = \frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \uparrow \quad \text{Resp.}$$

P9-17. Para la pendiente, $m_\theta = -1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $M = (-x^3) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$1 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \theta_B = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx = \int_0^{3\text{m}} \frac{(-1)(-x^3)}{EI} dx = \frac{20.25 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{20.25 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nabla$$

Resp.

Para el desplazamiento, $m = (-x) \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $M = (-x^3) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{B_v} = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^{3\text{m}} \frac{(-x)(-x^3)}{EI} dx = \frac{48.6 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_{B_v} = \frac{48.6 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Resp.

P9-18. Para la pendiente, $M = (M' + x^3) \text{ kN} \cdot \text{m}$. Por lo tanto, $\frac{\partial M}{\partial M'} = -1$.

Sea $M' = 0$. Entonces, $M = (-x^3) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$\theta_B = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI} = \int_0^{3\text{m}} \frac{(-x^3)(-1)dx}{EI} = \frac{20.25 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nabla$$

Resp.

Para el desplazamiento, $M = -(Px + x^3) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Por lo tanto, $\frac{\partial M}{\partial P} = -x$. Sea $P = 0$. Entonces, $M = (-x^3) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$\Delta_{B_v} = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} = \int_0^{3\text{m}} \frac{(-x^3)(-x)dx}{EI} = \frac{48.6 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Resp.

P9-19. Para la pendiente, $m_\theta = (1 - 0.125x) \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $M = (32x - 4x^2) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$1 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \theta_A = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx = \int_0^{8\text{m}} \frac{(1 - 0.125x)(32x - 4x^2)}{EI} dx = \frac{170.67 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{171 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nabla$$

Resp.

Para el desplazamiento, $m = (0.5x) \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $M = (32x - 4x^2) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{C_v} = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = 2 \int_0^{4\text{m}} \frac{0.5x(32x - 4x^2)}{EI} dx = \frac{426.67 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_{C_v} = \frac{427 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Resp.

P9-20. Para la pendiente, $M = M' - 0.125M'x + 32x - 4x^2$. Por lo tanto, $\frac{\partial M}{\partial M'} = 1 - 0.125x$.

Sea $M' = 0$, entonces, $M = (32x - 4x^2) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$\theta_A = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI} = \int_0^{8\text{m}} \frac{(32x - 4x^2)(1 - 0.125x)}{EI} dx$$

$$= \frac{170.67 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} = \frac{171 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nabla$$

Resp.

Para el desplazamiento, $M = 0.5Px + 32x - 4x^2$. Por lo tanto, $\frac{\partial M}{\partial P} = 0.5x$. Sea $P = 0$, entonces, $M = (32x - 4x^2) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$\begin{aligned}\Delta_{C_v} &= \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} = 2 \int_0^{4\text{m}} \frac{(32x - 4x^2)(0.5x)dx}{EI} \\ &= \frac{426.67 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{427 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow\end{aligned}$$

Resp.

P9-21. Para la pendiente $(m_\theta)_1 = 0$; $(m_\theta)_2 = -1 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_1 = (-12x_1) \text{ kN} \cdot \text{m}$

y $M_2 = -12(x_2 + 2) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$\begin{aligned}1 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \theta_C &= \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx = \int_0^{2\text{m}} \frac{0(-12x_1)}{EI} dx + \int_0^{2\text{m}} \frac{(-1)[-12(x_2 + 2)]}{EI} dx \\ 1 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \theta_C &= \frac{72 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI} \\ \theta_C &= \frac{72 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nearrow\end{aligned}$$

Resp.

Para el desplazamiento, $m_1 = 0$, $m_2 = -x_2$, $M_1 = (-12x_1) \text{ kN} \cdot \text{m}$

y $M_2 = -12(x_2 + 2) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$\begin{aligned}1 \text{ kN} \cdot \Delta_C &= \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^{2\text{m}} \frac{0(-12x_1)}{EI} dx + \int_0^{2\text{m}} \frac{(-x_2)[-12(x_2 + 2)]}{EI} dx \\ 1 \text{ kN} \cdot \Delta_C &= \frac{80 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI} \\ \Delta_C &= \frac{80 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow\end{aligned}$$

Resp.

P9-22. Para la pendiente, $M_1 = (-12x_1) \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $M_2 = -12(x_2 + 2) - M'$.

Por lo tanto, $\frac{\partial M_1}{\partial M'} = 0$ y $\frac{\partial M_2}{\partial M'} = -1$. Sea $M' = 0$, $M_2 = -12(x_2 + 2)$.

$$\begin{aligned}\theta_C &= \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI} = \int_0^{2\text{m}} \frac{-12x_1(0)}{EI} dx + \int_0^{2\text{m}} \frac{[-12(x_2 + 2)](-1)}{EI} dx \\ &= \frac{72 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI} \nearrow\end{aligned}$$

Resp.

Para el desplazamiento, $M_1 = (-12x_1) \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $M_2 = -12(x_2 + 2) - Px_2$.

Por lo tanto, $\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0$ y $\frac{\partial M_2}{\partial P} = -x_2$. Sea $P = 0$, $M_2 = -12(x_2 + 2) \text{ kN} \cdot \text{m}$.

$$\begin{aligned}\Delta_C &= \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} = \int_0^{2\text{m}} \frac{(-12x_1)(0)}{EI} dx + \int_0^{2\text{m}} \frac{[-12(x_2 + 2)](-x_2)}{EI} dx \\ &= \frac{80 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow\end{aligned}$$

P9-23. $M_1 = 0.5x_1$, $M_2 = 0.5x_2$, $M_1 = \left(24x_1 - \frac{1}{6}x_1^3\right) \text{ kN} \cdot \text{m}$

y $M_2 = \left(48x_2 - 6x_2^2 + \frac{1}{6}x_2^3\right) \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$\begin{aligned} 1 \text{ kN} \cdot \Delta_{C_v} &= \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^{6\text{m}} \frac{(0.5x_1)\left(24x_1 - \frac{1}{6}x_1^3\right)}{EI} dx_1 + \int_0^{6\text{m}} \frac{(0.5x_2)\left(48x_2 - 6x_2^2 + \frac{1}{6}x_2^3\right)}{EI} dx_2 \\ &= \frac{1620 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI} \\ \Delta_{C_v} &= \frac{1620 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

P9-24. $M_1 = 0.5Px_1 + 24x_1 - \frac{1}{6}x_1^3$, $M_2 = 0.5Px_2 + 48x_2 - 6x_2^2 + \frac{1}{6}x_2^3$.

Entonces, $\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0.5x_1$, $\frac{\partial M_2}{\partial P} = 0.5x_2$.

Sea $P = 0$, $M_1 = \left(24x_1 - \frac{1}{6}x_1^3\right) \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $M_2 = \left(48x_2 - 6x_2^2 + \frac{1}{6}x_2^3\right) \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$\begin{aligned} \Delta_{C_v} &= \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} = \int_0^{6\text{m}} \frac{\left(24x_1 - \frac{1}{6}x_1^3\right)(0.5x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^{6\text{m}} \frac{\left(48x_2 - 6x_2^2 + \frac{1}{6}x_2^3\right)(0.5x_2)}{EI} dx_2 \\ &= \frac{1620 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

FIG-1. Superposición

$$\Delta'_B = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x) = \frac{40(2^2)}{6EI}[3(4) - 2] = \frac{266.67 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

$$f_{BB} = \frac{(L/2)^3}{3EI} = \frac{L^3}{24EI} = \frac{4^3}{24EI} = \frac{2.667 \text{ m}^3}{EI} \uparrow$$

$$\Delta_B = \Delta'_B + B_y f_{BB}$$

$$(\uparrow +) 0 = -\frac{266.67 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} + B_y \left(\frac{2.667 \text{ m}^3}{EI} \right)$$

$$B_y = 100 \text{ kN}$$

Resp.

Equilibrio

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$$

Resp.

$$\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 100 - 40 - A_y = 0 \quad A_y = 60 \text{ kN}$$

Resp.

$$\downarrow \Sigma M_A = 0; \quad 100(2) - 40(4) - M_A = 0 \quad M_A = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Resp.

F10-2. Superposición

$$\Delta'_B = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-x) \left(-\frac{w_0}{6L} x^3 \right)}{EI} dx = \frac{w_0 L^4}{30 EI} \downarrow$$

$$f_{BB} = \int_0^L \frac{mm}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-x)(-x)}{EI} dx = \frac{L^3}{3EI} \downarrow$$

$$\Delta_B = \Delta'_B + B_y f_{BB}$$

$$(+\downarrow) 0 = \frac{w_0 L^4}{30 EI} + B_y \left(\frac{L^3}{3EI} \right) \quad B_y = -\frac{w_0 L}{10} = \frac{w_0 L}{10} \uparrow \quad \text{Resp.}$$

Equilibrio

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - \frac{1}{2} w_0 L + \frac{w_0 L}{10} = 0 \quad A_y = \frac{2w_0 L}{5} \quad \text{Resp.}$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad M_A + \frac{w_0 L}{10}(L) - \left(\frac{1}{2} w_0 L \right) \left(\frac{L}{3} \right) = 0 \quad M_A = \frac{w_0 L^2}{15} \quad \text{Resp.}$$

F10-3. Superposición

$$\Delta'_B = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{10(6^4)}{8EI} = \frac{1620 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{1620(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}^3}{[200(10^4) \text{ N/m}^2][300(10^{-6}) \text{ m}^4]} = 0.027 \text{ m} \downarrow$$

$$f_{BB} = \frac{L^3}{3EI} = \frac{6^3}{3EI} = \frac{72 \text{ m}^3}{EI} = \frac{72 \text{ m}^3}{[200(10^9) \text{ N/m}^2][300(10^{-6}) \text{ m}^4]} = 1.2(10^{-6}) \text{ m/N} \uparrow$$

$$\Delta_B = \Delta'_B + B_y f_{BB}$$

$$(+\downarrow) 5(10^{-3}) \text{ m} = 0.027 \text{ m} + B_y [-1.2(10^{-6}) \text{ m/N}]$$

$$B_y = 18.33(10^3) \text{ N} = 18.33 \text{ kN} = 18.3 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Equilibrio

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y + 18.33 - 60 = 0 \quad A_y = 41.67 \text{ kN} = 41.7 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad M_A + 18.33(6) - 60(3) = 0 \quad M_A = 70.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

F10-4. Superposición

$$\Delta'_B = \frac{M_0 x}{6EI L_{AC}} (L_{AC}^2 - x^2) = \frac{M_0(L)}{6EI(2L)} [(2L)^2 - L^2] = \frac{M_0 L^2}{4EI} \downarrow$$

$$f_{BB} = \frac{L_{AC}^3}{48EI} = \frac{(2L)^3}{48EI} = \frac{L^3}{6EI} \uparrow$$

$$\Delta_B = \Delta'_B + B_y f_{BB}$$

$$(+\uparrow) 0 = -\frac{M_0 L^2}{4EI} + B_y \left(\frac{L^3}{6EI} \right) \quad B_y = \frac{3M_0}{2L} \quad \text{Resp.}$$

Equilibrio

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad -C_y(2L) + \frac{3M_0}{2L}(L) - M_0 = 0 \quad C_y = \frac{M_0}{4L} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad \frac{3M_0}{2L} - \frac{M_0}{4L} - A_y = 0 \quad A_y = \frac{5M_0}{4L} \quad \text{Resp.}$$

F10-5. Superposición

$$\Delta'_B = \frac{Pbx}{6EIL_{AC}}(L_{AC}^3 - b^3 - x^3) = \frac{50(2)(4)}{6EI(8)}(8^3 - 2^3 - 4^3) = \frac{366.67 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

$$f_{BB} = \frac{L_{AC}^3}{48EI} = \frac{8^3}{48EI} = \frac{10.667 \text{ m}^3}{EI} \uparrow$$

$$\Delta_B = \Delta'_B + B_y f_{BB}$$

$$(+\uparrow) 0 = -\frac{366.67 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} + B_y \left(\frac{10.667 \text{ m}^3}{EI} \right)$$

$$B_y = 34.375 \text{ kN} = 34.4 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Equilibrio

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad 34.375(4) - 50(2) - C_y(8) = 0 \quad C_y = 4.6875 \text{ kN} = 4.69 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y + 34.375 - 50 - 4.6875 = 0 \quad A_y = 20.3125 \text{ kN} = 20.3 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$\text{F10-6. } \Delta'_B = \frac{5wL_{AC}^4}{384EI} = \frac{5(10)(12^4)}{384EI} = \frac{2700 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{2700(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}^3}{[200(10^9) \text{ N/m}^2][300(10^{-6}) \text{ m}^4]} = 0.045 \text{ m} \downarrow$$

$$f_{BB} = \frac{L_{AC}^3}{48EI} = \frac{12^3}{48EI} = \frac{36 \text{ m}^3}{EI} = \frac{36 \text{ m}^3}{[200(10^9) \text{ N/m}^2][300(10^{-6}) \text{ m}^4]} = 0.6(10^{-6}) \text{ m/N} \uparrow$$

$$\Delta_B = \Delta'_B + B_y f_{BB}$$

$$(+\downarrow) 5(10^{-3}) \text{ m} = 0.045 \text{ m} + B_y[-0.6(10^{-6}) \text{ m/N}] \quad B_y = 66.67(10^3) \text{ N} = 66.7 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Equilibrio

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad C_y(12) + 66.67(6) - 120(6) = 0 \quad C_y = 26.67 \text{ kN} = 26.7 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y + 26.67 + 66.67 - 120 = 0 \quad A_y = 26.67 \text{ kN} = 26.7 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$$

Respuestas a problemas seleccionados

Capítulo 1

- 1-1. $F = 48.3 \text{ k}$
- 1-2. $F = 24.6 \text{ k}$
- 1-3. $w = 521 \text{ lb/pie}$
- 1-5. $F = 173 \text{ kN}$
- 1-6. $w = 468 \text{ lb/pie}$
- 1-7. 620 kN/m
- 1-9. $w = 240 \text{ lb/pie}$
- 1-10. Carga muerta total = 106 lb/pie^2
- 1-11. $F_x = 94.5 \text{ k}$
- 1-13. $L = 1.70 \text{ kN/m}^2$
- 1-14. $L = 3.02 \text{ kN/m}^2$
- 1-15. $p_{0-15} = 27.8 \text{ psf}$
 $p_{20} = 29.1 \text{ psf}$
 $p_{25} = 30.1 \text{ psf}$
 $p_{30} = 31.1 \text{ psf}$
- 1-17. Barlovento:
 $p_{0-15} = 20.9 \text{ psf}$
 $p_{20} = 21.8 \text{ psf}$
 Sotavento:
 $p = -15.4 \text{ psf}$
- 1-18. $p = -18.6 \text{ psf}$
- 1-19. $F = 81.3 \text{ kN}$
- 1-21. $p_f = 0.816 \text{ kN/m}^2$
- 1-22. $p_f = 36 \text{ lb/pie}^2$

Capítulo 2

- 2-1. Sobre $BE = 14.2 \text{ kN/m}$; sobre FED ,
 $E_y = 35.6 \text{ kN}$
- 2-2. Sobre BE carga trapezoidal, pico 21.4 kN/m
 sobre FED cargas triangulares, picos 10.7
 kN/m , con fuerza concentrada de 26.7 kN en E .
- 2-3. Sobre $EF, 0.9 \text{ k/pie}$; sobre $ABCDE$ 3 fuerzas
 de 13.5 k
- 2-5. Sobre $BF = 0.675 \text{ k/pie}$, sobre $ABCDE$ 3
 fuerzas de 6.75 k
- 2-6. Sobre $BG = 230 \text{ lb/pie}$, sobre $ABCDE$ 2
 fuerzas de 1725 lb
- 2-7. Sobre $BG = 368 \text{ lb/pie}$ pico triangular
 Sobre $ABCD$ con 2 fuerzas de 736 lb , 184 lb/pie
 pico triangular
- 2-9. Sobre BE carga trapezoidal, pico 4.125 k/pie ,
 sobre FED cargas triangulares, picos 2.06 k/pie
 y $E_y = 12.9 \text{ k}$

- 2-10. Sobre BE 220 k/pie , sobre FED fuerza de 13.2 k
- 2-11. a. Indeterminada de 2°
 b. Inestable
 c. Estáticamente determinada
 d. Estáticamente determinada
 e. Inestable
- 2-13. a. Estáticamente determinada
 b. Estáticamente indeterminada de 1°
 c. Estáticamente indeterminada de 1°
- 2-14. a. Inestable
 b. Estable y estáticamente determinada
 c. Estable y estáticamente indeterminada
 de segundo grado
- 2-15. a. Inestable
 b. Estable y estáticamente indeterminada
 de primer grado
 c. Inestable
- 2-17. a. Inestable
 b. Estable y estáticamente indeterminada
 de sexto grado
 c. Estable y estáticamente determinada
 d. Inestable
- 2-18. $B_y = 48.0 \text{ kN}$
 $A_y = 16.0 \text{ kN}$
 $A_x = 10.0 \text{ kN}$
- 2-19. $F_B = 110 \text{ k}$
 $A_x = 95.3 \text{ k}$
 $A_y = 5.00 \text{ k}$
- 2-21. $N_A = 12 \text{ kN}$
 $B_x = 0$
 $B_y = 30 \text{ kN}$
 $M_B = 84 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 2-22. $N_F = 4.00 \text{ k}$
 $N_D = 6.00 \text{ k}$
 $N_B = 15.0 \text{ k}$
 $A_y = 7.00 \text{ k}$
 $A_x = 0$
- 2-23. $N_A = 9.59 \text{ k}$
 $C_x = 9.20 \text{ k}$
 $N_B = 8.54 \text{ k}$
 $C_y = 2.93 \text{ k}$

- 2-25. $C = 94.8 \text{ lb}$
 $A_y = 47.4 \text{ lb}$
 $A_x = 398 \text{ lb}$
- 2-26. $B_y = 5.12 \text{ kN}$
 $A_y = 14.7 \text{ kN}$
 $B_x = 20.0 \text{ kN}$
- 2-27. $C_y = 0$
 $B_y = 7.50 \text{ kN}$
 $M_A = 45.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $A_y = 7.50 \text{ kN}$
 $A_x = 0$
- 2-29. $A_y = 4.00 \text{ kN}$
 $M_B = 63.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $B_y = 17.0 \text{ kN}$
 $B_x = 0$
- 2-30. $A_y = 2.00 \text{ kN}$
 $B_y = 12.0 \text{ kN}$
 $B_x = 0$
 $M_B = 32.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 2-31. $w_1 = \frac{2P}{L}$
 $w_2 = \frac{4P}{L}$
 $w_1 = 83.3 \text{ lb/pie}$
 $w_2 = 167 \text{ lb/pie}$
- 2-33. $A_x = 30.0 \text{ kN}$
 $A_y = 6.67 \text{ kN}$
 $C_x = 10.0 \text{ kN}$
 $C_y = 6.67 \text{ kN}$
- 2-34. $N_A = 11.2 \text{ k}$
 $B_x = 9.70 \text{ k}$
 $B_y = 4.10 \text{ k}$
- 2-35. $B_y = 16.6 \text{ k}$
 $A_x = 29.0 \text{ k}$
 $A_y = 17.0 \text{ k}$
- 2-37. $A_y = 300 \text{ N}$
 $A_x = 300 \text{ N}$
 $C_x = 300 \text{ N}$
 $C_y = 300 \text{ N}$
- 2-38. $T = 350 \text{ lb}$
 $A_y = 700 \text{ lb}$
 $A_x = 1.88 \text{ k}$
 $D_x = 1.70 \text{ k}$
 $D_y = 1.70 \text{ k}$
- 2-39. $F_{BE} = 1.53 \text{ k}$
 $F_{CD} = 350 \text{ lb}$
- 2-41. $A_x = 522 \text{ lb}$
 $A_y = 1.47 \text{ k}$

- $C_x = 678 \text{ lb}$
 $C_y = 1.97 \text{ k}$
- 2-42. $C_x = 45.0 \text{ kN}$
 $D_x = 45.0 \text{ kN}$
 $C_y = 7.00 \text{ kN}$
 $A_y = 83.0 \text{ kN}$
 $A_x = 45.0 \text{ kN}$
 $D_y = 7.00 \text{ kN}$
- 2-43. $B_x = 24.8 \text{ k}$
 $B_y = 22.1 \text{ k}$
 $C_x = 8.16 \text{ k}$
 $C_y = 31.9 \text{ k}$

Capítulo 3

- 3-1. a. Inestable
 b. Estáticamente indeterminada de 1°
 c. Estáticamente determinada
 d. Estáticamente determinada
- 3-2. a. Estáticamente determinada
 b. Estáticamente determinada
 c. Inestable
- 3-3. a. Interna y externamente estable (de 2°)
 b. Interna y externamente estable (de 1°)
 c. Interna y externamente estable (de 1°)
- 3-5. $F_{CD} = 780 \text{ lb (C)}$
 $F_{CB} = 720 \text{ lb (T)}$
 $F_{DB} = 0$
 $F_{DE} = 780 \text{ lb (C)}$
 $F_{BE} = 297 \text{ lb (T)}$
 $F_{BA} = 722 \text{ lb (T)}$
- 3-6. $F_{AH} = 4.47 \text{ k (C)}$
 $F_{AB} = 4.00 \text{ k (T)}$
 $F_{BC} = 4.00 \text{ k (T)}$
 $F_{BH} = 0$
 $F_{HC} = 2.24 \text{ k (C)}$
 $F_{HG} = 2.24 \text{ k (C)}$
 $F_{FG} = 0$
 $F_{FE} = 1.5 \text{ k (C)}$
 $F_{GE} = 2.24 \text{ k (C)}$
 $F_{GC} = 0$
 $F_{EC} = 2.24 \text{ k (T)}$
 $F_{ED} = 3.5 \text{ k (C)}$
 $F_{DC} = 0$
- 3-7. $F_{DC} = 9.24 \text{ kN (T)}$
 $F_{DE} = 4.62 \text{ kN (C)}$
 $F_{CE} = 9.24 \text{ kN (C)}$
 $F_{CB} = 9.24 \text{ kN (T)}$
 $F_{BE} = 9.24 \text{ kN (C)}$

- $F_{BA} = 9.24 \text{ kN (T)}$
 $F_{EA} = 4.62 \text{ kN (C)}$
- 3-9.** $F_{AF} = 3.33 \text{ k (T)}$
 $F_{AB} = 2.67 \text{ k (C)}$
 $F_{BF} = 9.00 \text{ k (C)}$
 $F_{BC} = 2.67 \text{ k (C)}$
 $F_{FC} = 5.00 \text{ k (T)}$
 $F_{FE} = 1.33 \text{ k (C)}$
 $F_{CE} = 3.00 \text{ k (C)}$
 $F_{CD} = 1.33 \text{ k (T)}$
 $F_{DE} = 1.67 \text{ k (C)}$
- 3-10.** $F_{EF} = 11.7 \text{ k (C)}$
 $F_{ED} = 8.875 \text{ k (T)}$
 $F_{DF} = 0$
 $F_{DC} = 8.875 \text{ k (T)}$
 $F_{AH} = 2.15 \text{ k (C)}$
 $F_{AB} = 1.375 \text{ k (T)}$
 $F_{BH} = 0$
 $F_{BC} = 1.375 \text{ k (T)}$
 $F_{FC} = 4.04 \text{ k (C)}$
 $F_{FG} = 7.67 \text{ k (C)}$
 $F_{GC} = 3.00 \text{ k (C)}$
 $F_{GH} = 7.67 \text{ k (C)}$
 $F_{CH} = 5.86 \text{ k (T)}$
- 3-11.** $F_{ED} = 8.33 \text{ kN (T)}$
 $F_{CD} = 6.67 \text{ kN (C)}$
 $F_{BC} = 6.67 \text{ kN (C)}$
 $F_{CE} = 5 \text{ kN (T)}$
 $F_{GF} = 20 \text{ kN (T)}$
 $F_{GA} = 15 \text{ kN (T)}$
 $F_{AF} = 18.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{AB} = 10.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{BE} = 4.17 \text{ kN (C)}$
 $F_{FB} = 7.50 \text{ kN (T)}$
 $F_{FE} = 12.5 \text{ kN (T)}$
- 3-13.** $F_{DE} = 16.3 \text{ kN (C)}$
 $F_{DC} = 8.40 \text{ kN (T)}$
 $F_{EA} = 8.85 \text{ kN (C)}$
 $F_{EC} = 6.20 \text{ kN (C)}$
 $F_{CF} = 8.77 \text{ kN (T)}$
 $F_{CB} = 2.20 \text{ kN (T)}$
 $F_{BA} = 3.11 \text{ kN (T)}$
 $F_{BF} = 6.20 \text{ kN (C)}$
 $F_{FA} = 6.20 \text{ kN (T)}$
- 3-14.** $F_{AK} = 42.9 \text{ kN (C)}$
 $F_{AB} = 41.1 \text{ kN (T)}$
 $F_{KB} = 4.00 \text{ kN (C)}$
 $F_{KJ} = 42.9 \text{ kN (C)}$
- $F_{BJ} = 7.94 \text{ kN (T)}$
 $F_{BC} = 34.3 \text{ kN (T)}$
 $F_{JI} = 35.7 \text{ kN (C)}$
 $F_{JC} = 6.00 \text{ kN (C)}$
 $F_{CI} = 9.11 \text{ kN (T)}$
 $F_{CD} = 27.4 \text{ kN (T)}$
 $F_{IH} = 35.7 \text{ kN (C)}$
 $F_{HD} = 6.00 \text{ kN (C)}$
 $F_{HE} = 7.94 \text{ kN (T)}$
 $F_{HG} = 42.9 \text{ kN (C)}$
 $F_{ED} = 34.3 \text{ kN (T)}$
 $F_{ID} = 9.11 \text{ kN (T)}$
 $F_{FG} = 42.9 \text{ kN (C)}$
 $F_{GE} = 4.00 \text{ kN (C)}$
 $F_{FE} = 41.1 \text{ kN (T)}$
- 3-15.** $F_{AH} = F_{FE} = 25 \text{ kN (C)}$
 $F_{AB} = F_{DE} = 20 \text{ kN (T)}$
 $F_{BC} = F_{CD} = 20 \text{ kN (T)}$
 $F_{BH} = F_{DF} = 10 \text{ kN (T)}$
 $F_{HG} = F_{GF} = 16.7 \text{ kN (C)}$
 $F_{HC} = F_{CF} = 8.33 \text{ kN (C)}$
 $F_{GC} = 20 \text{ kN (T)}$
- 3-17.** $F_{AG} = F_{DE} = 4.00 \text{ kN (T)}$
 $F_{AB} = F_{DC} = 3.46 \text{ kN (C)}$
 $F_{GF} = F_{EF} = 4.00 \text{ kN (T)}$
 $F_{GB} = F_{EC} = 0$
 $F_{BF} = F_{CF} = 2.31 \text{ kN (C)}$
 $F_{BC} = 2.31 \text{ kN (C)}$
- 3-18.** $F_{DC} = 11.7 \text{ k (T)}$
 $F_{FG} = 16.6 \text{ k (C)}$
 $F_{FC} = 4.86 \text{ k (T)}$
- 3-19.** $F_{CD} = 2.00 \text{ k (T)}$
 $F_{JN} = 2.50 \text{ k (T)}$
 $F_{JK} = 4.03 \text{ k (C)}$
 Los elementos $KN, NL, MB, BL, CL, IO, OH, GE, EH, HD$ son elementos de fuerza cero.
- 3-21.** $F_{CD} = 6.67 \text{ kN (T)}$
 $F_{GF} = 12.5 \text{ kN (C)}$
 $F_{GC} = 0$
- 3-22.** $F_{BC} = 8.00 \text{ kN (T)}$
 $F_{HG} = 10.1 \text{ kN (C)}$
 $F_{BG} = 1.80 \text{ kN (T)}$
- 3-23.** $F_{GF} = 1.78 \text{ kN (T)}$
 $F_{CD} = 2.23 \text{ kN (C)}$
 $F_{CF} = 0$
- 3-25.** $F_{IH} = 6.00 \text{ kN (T)}$
 $F_{ID} = 4.24 \text{ kN (T)}$
 $F_{CD} = 10.1 \text{ kN (C)}$

3-26. $F_{JI} = 9.00 \text{ kN (T)}$

$F_{IC} = 6.00 \text{ kN (C)}$

$F_{CD} = 10.1 \text{ kN (C)}$

3-27. $F_{KJ} = 115 \text{ kN (C)}$

$F_{CJ} = 27.0 \text{ kN (T)}$

$F_{CD} = 97.5 \text{ kN (T)}$

3-29. $F_{AB} = 0$

$F_{AG} = 1.50 \text{ k (C)}$

$F_{GB} = 0.707 \text{ k (T)}$

$F_{GL} = 0.500 \text{ k (C)}$

$F_{GI} = 0.707 \text{ k (C)}$

$F_{LI} = 0.707 \text{ k (T)}$

$F_{LK} = 0.500 \text{ k (C)}$

$F_{IK} = 0.707 \text{ k (C)}$

$F_{IF} = 0.707 \text{ k (T)}$

$F_{BF} = 2.12 \text{ k (T)}$

$F_{BC} = 1.00 \text{ k (C)}$

$F_{FC} = 0.707 \text{ k (T)}$

$F_{FH} = 2.12 \text{ k (T)}$

$F_{KH} = 0.707 \text{ k (T)}$

$F_{KJ} = 1.50 \text{ k (C)}$

$F_{JH} = 2.12 \text{ k (T)}$

$F_{CD} = 0$

$F_{DE} = 0.500 \text{ k (C)}$

$F_{CE} = 0.707 \text{ k (C)}$

$F_{HE} = 0.707 \text{ k (T)}$

$F_{JE} = 1.50 \text{ k (C)}$

3-30. $F_{AD} = F_{BE} = 0$

$F_{AF} = F_{BC} = 4.00 \text{ kN (C)}$

$F_{FD} = F_{CE} = 8.94 \text{ kN (T)}$

$F_{FE} = F_{CD} = 11.3 \text{ kN (C)}$

$F_{ED} = 16.0 \text{ kN (C)}$

3-31. $F_{EF} = 1.15 \text{ kN (T)}$

$F_{ED} = 3.46 \text{ kN (C)}$

$F_{BA} = 1.15 \text{ kN (T)}$

$F_{BC} = 1.15 \text{ kN (T)}$

$F_{AD} = 4.24 \text{ kN (T)}$

$F_{AF} = 1.58 \text{ kN (T)}$

$F_{CF} = 1.41 \text{ kN (C)}$

$F_{CD} = 4.73 \text{ kN (C)}$

$F_{BE} = 1.15 \text{ kN (T)}$

3-33. $F_{AB} = 6.46 \text{ kN (T)}$

$F_{AC} = F_{AD} = 1.50 \text{ kN (C)}$

$F_{BC} = F_{BD} = 3.70 \text{ kN (C)}$

$F_{BE} = 4.80 \text{ kN (T)}$

3-34. $F_{BC} = F_{BD} = 1.34 \text{ kN (C)}$

$F_{AB} = 2.4 \text{ kN (C)}$

$F_{AG} = F_{AE} = 1.01 \text{ kN (T)}$

$F_{BG} = 1.80 \text{ kN (T)}$

$F_{BE} = 1.80 \text{ kN (T)}$

3-35. $F_{FE} = 0$

$F_{ED} = 0$

3-37. $F_{AB} = 400 \text{ kN (T)}$

$F_{BE} = 5.66 \text{ kN (T)}$

$F_{BD} = 2.00 \text{ kN (C)}$

$F_{AC} = F_{AE} = F_{DE} = F_{DC} = F_{CE} = 0$

3-38. $F_{BC} = 1.15 \text{ kN (C)}$

$F_{DF} = 4.16 \text{ kN (C)}$

$F_{BE} = 4.16 \text{ kN (T)}$

3-39. $F_{CF} = 0$

$F_{CD} = 2.31 \text{ kN (T)}$

$F_{ED} = 3.46 \text{ kN (T)}$

Capítulo 4

4-1. $N_C = 0$

$V_C = 0.667 \text{ kN}$

$M_C = 0.667 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$N_D = 0$

$V_D = -5.33 \text{ kN}$

$M_D = -9.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$

4-2. $N_C = 0$

$V_C = 3.33 \text{ k}$

$M_C = 58.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$N_D = 0$

$V_D = -6.67 \text{ k}$

$M_D = 91.7 \text{ k} \cdot \text{pie}$

4-3. $N_A = 0$

$V_A = 450 \text{ lb}$

$M_A = -1.125 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$N_B = 0$

$V_B = 850 \text{ lb}$

$M_B = -6.325 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$V_C = 0$

$N_C = -1.20 \text{ kip}$

$M_C = -8.125 \text{ k} \cdot \text{pie}$

4-5. $w = 100 \text{ N/m}$

4-6. $N_C = 0$

$V_C = -0.75 \text{ kN}$

$M_C = -0.375 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$N_D = 0$

$V_D = 1.25 \text{ kN}$

$M_D = 1.875 \text{ kN} \cdot \text{m}$

4-7. $N_C = 0$

$V_C = 1.75 \text{ kN}$

$M_C = 8.50 \text{ kN} \cdot \text{m}$

- 4-9.** $N_C = 0$
 $V_C = 1.25 \text{ kN}$
 $M_C = 3.50 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-10.** $N_C = 0$
 $V_C = -0.870 \text{ k}$
 $M_C = 11.2 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 4-11.** $N_D = 0$
 $V_D = 0.930 \text{ k}$
 $M_D = 11.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$
 $N_E = 0$
 $V_E = 0.450 \text{ k}$
 $M_E = -0.675 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 4-13.** $0 \leq x < 1 \text{ m}, V = 4.50 \text{ kN}$
 $M = \{4.50x\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $1 \text{ m} < x < 3 \text{ m}, V = 0.500 \text{ kN}$
 $M = \{0.5x + 4\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $3 \text{ m} < x \leq 4 \text{ m}, V = -5.50 \text{ kN}$
 $M = \{-5.50x + 22\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-14.** $0 \leq x < a, V = \frac{M_O}{L}$
 $M = \frac{M_O}{L}x$
 $a < x \leq L, V = \frac{M_O}{L}$
 $M = -\frac{M_O}{L}(L - x)$
- 4-15.** $0 \leq x < 2 \text{ m}, V = 3.75 \text{ kN}$
 $M = \{3.75x\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $2 \text{ m} < x < 4 \text{ m}, V = -3.25 \text{ kN}$
 $M = \{-3.25x + 14\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $4 \text{ m} < x < 8 \text{ m},$
 $V = -3.25 \text{ kN},$
 $M = \{-3.25x + 26\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-17.** $0 \leq x < 1 \text{ m}, V = -4 \text{ kN}$
 $M = \{-4x\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $1 \text{ m} < x < 2 \text{ m}, V = -12 \text{ kN}$
 $M = \{-12x + 8\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $2 \text{ m} < x \leq 3 \text{ m}, V = -20 \text{ kN}$
 $M = \{-20x + 24\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-18.** $0 \leq x < 6 \text{ pie}, V = \{30 - 2x\} \text{ k}$
 $M = \{-x^2 + 30x - 216\} \text{ k} \cdot \text{pie}$
 $6 \text{ pie} < x \leq 10 \text{ pies}, V = 8.00 \text{ k}$
 $M = \{8x - 120\} \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 4-19.** $0 \leq x < 4 \text{ pie}, V = -250 \text{ lb}$
 $M = \{-250x\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$
 $4 \text{ pies} < x < 10 \text{ pies}, V = \{1050 - 150x\} \text{ lb}$
 $M = \{-75x^2 + 1050x - 4000\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$
 $10 \text{ pies} < x \leq 14 \text{ pies}, V = 250 \text{ lb}$
 $M = \{250x - 3500\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-21.** $V = \{-10x^2 - 800\} \text{ lb}$
 $M = \{-3.33x^3 - 800x - 1200\} \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-22.** $V = \{0.444x^2 - 8x + 36\} \text{ kN}$
 $M = \{0.148x^3 - 4x^2 + 36x - 108\} \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-23.** $V_{\text{máx}} = -386 \text{ lb}$
 $M_{\text{máx}} = -2400 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-25.** $V_{\text{máx}} = -4.89 \text{ kN}$
 $M_{\text{máx}} = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-26.** $V_{\text{máx}} = 10.1 \text{ k}$
 $M_{\text{máx}} = -60 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 4-27.** $V_{\text{máx}} = -3.04 \text{ k}$
 $M_{\text{máx}} = 11.6 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 4-29.** $V_{\text{máx}} = -1.25 \text{ kN}$
 $M_{\text{máx}} = 0.521 \text{ kN}$
- 4-30.** $V_{\text{máx}} = -510 \text{ lb}$
 $M_{\text{máx}} = 2401 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-31.** $V_{\text{máx}} = -\frac{3wL}{8}$
 $M_{\text{máx}} = \frac{9wL^2}{128}$
- 4-33.** $V_{\text{máx}} = -186 \text{ kN}$
 $M_{\text{máx}} = 224 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-34.** $V_{\text{máx}} = \pm 1200 \text{ lb}$
 $M_{\text{máx}} = 6400 \text{ lb} \cdot \text{pie}$
- 4-35.** $V_{\text{máx}} = -3.80 \text{ k}$
 $M_{\text{máx}} = -55.2 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 4-37.** $V_{\text{máx}} = 24.5 \text{ kN}$
 $M_{\text{máx}} = 34.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-38.** $V_{\text{máx}} = 83 \text{ kN}$
 $M_{\text{máx}} = -180 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-39.** $V_{\text{máx}} = -11.8 \text{ k}$
 $M_{\text{máx}} = -87.6 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 4-41.** $V_{\text{máx}} = 12 \text{ k}$
 $M_{\text{máx}} = -90 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 4-42.** $V_{\text{máx}} = 20.0 \text{ k}$
 $M_{\text{máx}} = -144 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 4-43.** $V_{\text{máx}} = -36 \text{ k}$
 $M_{\text{máx}} = 162 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 4-45.** $V_{\text{máx}} = 13.3 \text{ kN}$
 $M_{\text{máx}} = 26.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-46.** $V_{\text{máx}} = -14.5 \text{ kN}$
 $M_{\text{máx}} = 52.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 4-47.** $V_{\text{máx}} = 2.22 \text{ k}$
 $M_{\text{máx}} = 15.5 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 4-49.** $V_{\text{máx}} = 12 \text{ k}$
 $M_{\text{máx}} = -90 \text{ k} \cdot \text{pie}$

Capítulo 5

- 5-1. $F_{BC} = 46.7 \text{ lb}$ $F_{BA} = 83.0 \text{ lb}$ $F_{CD} = 88.1 \text{ lb}$
 $l = 20.2 \text{ pies}$
- 5-2. $T_{\max} = 6.41 \text{ kN}$
 $y_B = 2.43 \text{ m}$
- 5-3. $T_{BC} = 1.60 \text{ kN}$
 $T_{CD} = 3.72 \text{ kN}$
 $T_{AB} = 2.99 \text{ kN}$
 $y_D = 2.10 \text{ m}$
- 5-5. $P = 71.4 \text{ lb}$
- 5-6. $P_1 = 2.50 \text{ kN}$
 $P_2 = 6.25 \text{ kN}$
 $F_{\max} = 12.5 \text{ kN}$
- 5-7. $y = 0.0356x^2$
 $T_O = 7.03 \text{ k}$
 $T_B = 10.3 \text{ k}$
- 5-9. $T_{\min} = 400 \text{ kN}$
 $T_{\max} = 431 \text{ kN}$
- 5-10. $w = 51.9 \text{ lb/pie}$
- 5-11. $T_{\max} = 14.4 \text{ k}$
 $T_{\min} = 13.0 \text{ k}$
- 5-13. $T_{\max} = 10.9 \text{ k}$
- 5-14. $T_{\min} = 100 \text{ k}$
 $T_{\max} = 117 \text{ k}$
 $T_{\text{gancho}} = 10 \text{ k}$
- 5-15. $V_{\max} = \pm 5 \text{ k}$
 $M_{\max} = 6.25 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 5-17. $T_{\min} = 6.25 \text{ MN}$
 $T_{\max} = 6.93 \text{ MN}$
- 5-18. $y = (38.5x^2 + 577x)(10^{-3}) \text{ m}$
 $T_{\max} = 5.20 \text{ kN}$
- 5-19. $T_F = 7.0 \text{ kN}$
 $T_E = T_D = 8.75 \text{ kN}$
 $T_{\text{gancho}} = 1.31 \text{ kN}$
- 5-21. $A_x = 0$
 $C_y = 9.55 \text{ kN}$
 $A_y = 15.5 \text{ kN}$
 $T = 4.32 \text{ kN}$
- 5-22. $F_B = 6.77 \text{ k}$
 $F_A = 10.8 \text{ k}$
 $F_C = 11.7 \text{ k}$
- 5-23. $M_D = 10.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 5-25. $B_x = 46.7 \text{ k}$, $B_y = 5.00 \text{ k}$
 $A_x = 46.7 \text{ k}$, $A_y = 95.0 \text{ k}$
 $C_x = 46.7 \text{ k}$, $C_y = 85 \text{ k}$
- 5-26. $h_1 = 43.75 \text{ pies}$
 $h_2 = 75.00 \text{ pies}$
 $h_3 = 93.75 \text{ pies}$

- 5-27. $B_y = 0.216 \text{ k}$, $B_x = 2.72 \text{ k}$
 $A_x = 2.72 \text{ k}$, $A_y = 3.78 \text{ k}$
 $C_x = 0.276 \text{ k}$, $C_y = 0.216 \text{ k}$
- 5-29. $A_x = 3 \text{ k}$
 $D_y = 8.06 \text{ k}$
 $A_y = 1.94 \text{ k}$
 $T_{AD} = 4.08 \text{ k}$

Capítulo 6

- 6-15. $(M_C)_{\max} = 142 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $(V_C)_{\max} = 20 \text{ kN}$
- 6-17. $(B_y)_{\max(+)} = 12.4 \text{ k}$
 $(M_B)_{\max(-)} = -37.5 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 6-18. $(M_C)_{\max(+)} = 112.5 \text{ k} \cdot \text{pie}$
 $(B_y)_{\max(+)} = 24.75 \text{ k}$
- 6-19. $(A_y)_{\max(+)} = 70.1 \text{ k}$
 $(M_C)_{\max(+)} = 151 \text{ k} \cdot \text{pie}$
 $(V_{A'})_{\max(+)} = 40.1 \text{ k}$
- 6-21. $(M_D)_{\max} = -4 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 6-22. $(M_A)_{\max} = -86.4 \text{ k} \cdot \text{pie}$
 $(V_D)_{\max} = 5.40 \text{ k}$
- 6-23. $(B_y)_{\max(+)} = 87.6 \text{ kN}$
 $(M_C)_{\max(+)} = 72.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $(V_C)_{\max(-)} = -23.6 \text{ kN}$
- 6-25. $(A_y)_{\max(+)} = 20.5 \text{ k}$
 $(M_E)_{\max(+)} = 51.25 \text{ k} \cdot \text{pie}$
 $(V_{C'})_{\max(+)} = 33.0 \text{ k}$
- 6-26. $(V_{BC})_{\max(+)} = 7.15 \text{ kN}$
 $(M_G)_{\max(-)} = -9.81 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 6-27. $(V_{BC})_{\max(+)} = 17.8 \text{ kN}$
 $(M_G)_{\max(+)} = 46.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 6-30. $(V_{AB})_{\max} = 2.73 \text{ k}$
 $(M_D)_{\max} = 61.25 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 6-31. $(V_{BC})_{\max} = 7 \text{ k}$
 $(M_C)_{\max} = 105 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 6-33. $(V_{DE})_{\max(-)} = -52.9 \text{ k}$
 $(M_C)_{\max(-)} = -118 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 6-34. $(V_{DE})_{\max(+)} = 5.07 \text{ k}$
 $(M_H)_{\max(+)} = 19.2 \text{ k} \cdot \text{pie}$
- 6-35. $(V_{CD})_{\max(-)} = -6 \text{ k}$
- 6-37. $(V_{BC})_{\max(-)} = -8.21 \text{ kN}$
 $(M_B)_{\max(+)} = 12.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 6-57. $(F_{CD})_{\max(+)} = 12.0 \text{ k (T)}$
- 6-58. $(F_{CF})_{\max(+)} = 7.54 \text{ k (T)}$
- 6-59. $(M_C)_{\max} = 44.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 6-61. $(V_H)_{\max} = 1.46 \text{ k}$
- 6-62. $(M_C)_{\max(+)} = 20.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- 6-63. $(M_C)_{\max(+)} = 16.8 \text{ k} \cdot \text{pie}$

- 6-65. $(M_C)_{\max(+)} = 34.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 6-66. $(M_C)_{\max(+)} = 4375 \text{ k} \cdot \text{pie}$
 6-67. $(F_{BC})_{\max} = 2.37 \text{ k (T)}$
 6-69. $M_{\max} = 67.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 6-70. $M_{\max} = 64.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 6-71. $V_{\max} = 10 \text{ kN}$
 $M_{\max} = -39 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 6-73. $M_{\max} = 555 \text{ k} \cdot \text{pie}$
 6-74. $V_{\max} = 67.5 \text{ kN}$
 6-75. $M_{\max} = 164 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 6-77. $M_{\max} = 97.2 \text{ k} \cdot \text{pie}$
 6-78. $M_{\max} = 130 \text{ k} \cdot \text{pie}$
 6-79. $V_{\max} = 12.5 \text{ k}$
 6-81. $M_{\max} = 10.5 \text{ k} \cdot \text{pie}$

Capítulo 7

- 7-1. $F_{AE} = F_{BF} = 14.1 \text{ kN (C)}$
 $F_{EF} = 10.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{AB} = 10.0 \text{ kN (T)}$
 $F_{CE} = F_{BD} = 14.1 \text{ kN (C)}$
 $F_{DE} = 10.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{BC} = 10.0 \text{ kN (T)}$
 $F_{AF} = 60.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{BE} = 20.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{CD} = 30.0 \text{ kN (C)}$
- 7-2. $F_{AE} = F_{CE} = 0$
 $F_{BF} = 28.3 \text{ kN (T)}$
 $F_{EF} = 20.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{AB} = 0$
 $F_{BD} = 28.3 \text{ kN (T)}$
 $F_{DE} = 20.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{BC} = 0$
 $F_{AF} = 70.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{BE} = 40.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{CD} = 40.0 \text{ kN (C)}$
- 7-3. $F_{HB} = 5.89 \text{ k (T)}$
 $F_{AG} = 5.89 \text{ k (C)}$
 $F_{AB} = 9.17 \text{ k (T)}$
 $F_{AH} = 14.2 \text{ k (C)}$
 $F_{HG} = 4.17 \text{ k (C)}$
 $F_{GC} = 1.18 \text{ k (C)}$
 $F_{BF} = 1.18 \text{ k (T)}$
 $F_{GF} = 7.5 \text{ k (C)}$
 $F_{GB} = 5.0 \text{ k (C)}$
 $F_{BC} = 12.5 \text{ k (T)}$
 $F_{EC} = 8.25 \text{ k (T)}$
 $F_{DF} = 8.25 \text{ k (C)}$
 $F_{CD} = 5.83 \text{ k (T)}$
- $F_{ED} = 15.8 \text{ k (C)}$
 $F_{FE} = 0.833 \text{ k (C)}$
 $F_{FC} = 5.0 \text{ k (C)}$
- 7-5. $F_{AG} = 12.1 \text{ k (C)}$
 $F_{BH} = 12.1 \text{ k (T)}$
 $F_{AB} = 7.67 \text{ k (T)}$
 $F_{GH} = 9.67 \text{ k (C)}$
 $F_{BF} = 0.417 \text{ k (C)}$
 $F_{CG} = 0.417 \text{ k (T)}$
 $F_{FG} = 19.7 \text{ k (C)}$
 $F_{BC} = 17.7 \text{ k (T)}$
 $F_{DF} = 11.25 \text{ k (C)}$
 $F_{CE} = 11.25 \text{ k (T)}$
 $F_{EF} = 11.0 \text{ k (C)}$
 $F_{CD} = 9.00 \text{ k (T)}$
 $F_{AH} = 14.25 \text{ k (C)}$
 $F_{BG} = 7.00 \text{ k (C)}$
 $F_{DE} = 13.75 \text{ k (C)}$
- 7-6. $F_{AG} = F_{BF} = F_{DF} = 0$
 $F_{CE} = 22.5 \text{ k (T)}$
 $F_{DE} = 20.5 \text{ k (C)}$
 $F_{BH} = 24.2 \text{ k (T)}$
 $F_{GH} = 19.3 \text{ k (C)}$
 $F_{AB} = 2.00 \text{ k (C)}$
 $F_{CG} = 0.833 \text{ k (T)}$
 $F_{FG} = 20.0 \text{ k (C)}$
 $F_{BC} = 17.3 \text{ k (T)}$
 $F_{EF} = 20.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{CD} = 0$
 $F_{AH} = 21.5 \text{ k (C)}$
 $F_{BG} = 14.5 \text{ k (C)}$
 $F_{CF} = 14.0 \text{ k (C)}$
 $F_{DE} = 20.5 \text{ k (C)}$
- 7-7. $F_{EC} = 3.33 \text{ kN (T)}$
 $F_{BD} = 3.33 \text{ kN (C)}$
 $F_{ED} = 2.67 \text{ kN (T)}$
 $F_{BC} = 2.67 \text{ kN (C)}$
 $F_{CD} = 2.00 \text{ kN (T)}$
 $F_{FB} = 10.0 \text{ kN (T)}$
 $F_{AE} = 10.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{FE} = 13.3 \text{ kN (T)}$
 $F_{AB} = 13.3 \text{ kN (C)}$
 $F_{BE} = 4.00 \text{ kN (T)}$
 $F_{AF} = 6.00 \text{ kN (T)}$
- 7-9. $F_{DG} = 2.48 \text{ k (C)}$
 $F_{CF} = 2.48 \text{ k (T)}$
 $F_{FG} = 3.25 \text{ k (C)}$

$$F_{CD} = 3.25 \text{ k (T)}$$

$$F_{AC} = 3.89 \text{ k (C)}$$

$$F_{BG} = 3.89 \text{ k (T)}$$

$$F_{BC} = 7.75 \text{ k (T)}$$

$$F_{AG} = 7.75 \text{ k (C)}$$

$$F_{EF} = 2.12 \text{ k (C)}$$

$$F_{DE} = 1.50 \text{ k (T)}$$

$$F_{DF} = 0.250 \text{ k (C)}$$

$$F_{CG} = 1.00 \text{ k (C)}$$

$$F_{AB} = 2.75 \text{ k (T)}$$

7-10. $F_{DG} = F_{AC} = 0$

$$F_{CF} = 4.95 \text{ k (T)}$$

$$F_{CD} = 1.50 \text{ k (T)}$$

$$F_{FG} = 5.00 \text{ k (C)}$$

$$F_{BG} = 7.78 \text{ k (T)}$$

$$F_{BC} = 5.00 \text{ k (T)}$$

$$F_{AG} = 10.5 \text{ k (C)}$$

$$F_{EF} = 2.12 \text{ k (C)}$$

$$F_{DE} = 1.50 \text{ k (T)}$$

$$F_{DF} = 2.00 \text{ k (C)}$$

$$F_{CG} = 5.50 \text{ k (C)}$$

$$F_{AB} = 0$$

7-11. $F_{DF} = 6.67 \text{ kN (T)}$

$$F_{CE} = 6.67 \text{ kN (C)}$$

$$F_{CD} = 5.33 \text{ kN (C)}$$

$$F_{AC} = 15.0 \text{ kN (T)}$$

$$F_{BF} = 15.0 \text{ kN (C)}$$

$$F_{EF} = 5.33 \text{ kN (T)}$$

$$F_{BC} = 22.7 \text{ kN (C)}$$

$$F_{AF} = 22.7 \text{ kN (T)}$$

$$F_{DE} = 4.00 \text{ kN (C)}$$

$$F_{CF} = 5.00 \text{ kN (C)}$$

$$F_{AB} = 9.00 \text{ kN (T)}$$

7-13. $M_A = 4.86 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$M_B = 3.78 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

7-14. $M_F = 4.05 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$$M_D = 7.20 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

7-15. $M_A = 40.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$

7-17. $M_I = 9.00 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$$M_L = 20.25 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_H = 27.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

7-18. $A_x = 0; B_x = 0; C_x = 0$

$$A_y = 12 \text{ k}; B_y = 16 \text{ k}; C_y = 4 \text{ k}$$

$$M_A = 16.2 \text{ k} \cdot \text{pie}; M_B = 9 \text{ k} \cdot \text{pie};$$

$$M_C = 7.2 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

7-19. Articulados:

$$A_x = 6.00 \text{ kN}$$

$$A_y = 18.0 \text{ kN}$$

$$B_x = 6.00 \text{ kN}$$

$$B_y = 18.0 \text{ kN}$$

Fijos:

$$A_x = 6.00 \text{ kN}$$

$$A_y = 9.00 \text{ kN}$$

$$M_A = 18.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$B_x = 6.00 \text{ kN}$$

$$B_y = 9.00 \text{ kN}$$

$$M_B = 18.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

7-21. $F_{CF} = 1.77 \text{ k (T)}$

7-22. $F_{CE} = 1.06 \text{ k (T)}$

7-23. $A_x = 1.50 \text{ k}$

$$A_y = 1.875 \text{ k}$$

$$M_A = 9.00 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$B_x = 1.50 \text{ k}$$

$$B_y = 1.875 \text{ k}$$

$$M_B = 9.00 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$F_{DG} = 3.125 \text{ k (C)}$$

$$F_{CD} = 2.00 \text{ k (T)}$$

$$F_{FG} = 1.00 \text{ k (C)}$$

$$F_{DF} = 3.125 \text{ k (T)}$$

$$F_{DE} = 3.00 \text{ k (C)}$$

7-25. $F_{EG} = 27.5 \text{ kN (T)}$

$$F_{EF} = 24.0 \text{ kN (C)}$$

$$F_{CG} = 4.00 \text{ kN (C)}$$

$$F_{CE} = 27.5 \text{ kN (C)}$$

$$F_{DE} = 20.0 \text{ kN (T)}$$

7-26. $F_{EG} = 15.0 \text{ kN (T)}$

$$F_{CG} = 4.00 \text{ kN (C)}$$

$$F_{EF} = 14.0 \text{ kN (C)}$$

$$F_{CE} = 15.0 \text{ kN (C)}$$

$$F_{DE} = 10.0 \text{ kN (T)}$$

7-27. $A_x = 10.0 \text{ kN}$

$$A_y = 14.0 \text{ kN}$$

$$M_A = 30.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$B_x = 10.0 \text{ kN}$$

$$B_y = 14.0 \text{ kN}$$

$$M_B = 30.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{FH} = 17.5 \text{ kN (C)}$$

$$F_{EF} = 16.5 \text{ kN (C)}$$

$$F_{GH} = 17.0 \text{ kN (T)}$$

$$F_{EH} = 17.5 \text{ kN (T)}$$

$$F_{HI} = 4.00 \text{ kN (C)}$$

$$F_{EI} = 17.5 \text{ kN (C)}$$

- $F_{DE} = 4.50 \text{ kN (T)}$
 $F_{DI} = 17.5 \text{ kN (T)}$
 $F_{CI} = 25.0 \text{ kN (C)}$
7-29. $A_x = 2.00 \text{ k}$
 $A_y = 1.125 \text{ k}$
 $M_A = 12.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$
 $B_x = 2.00 \text{ k}$
 $B_y = 1.125 \text{ k}$
 $M_B = 12.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$
 $F_{GK} = 1.875 \text{ k (C)}$
 $F_{GF} = 0$
 $F_{JK} = 0.500 \text{ k (C)}$
7-30. $A_x = 2.00 \text{ k}$
 $A_y = 1.875 \text{ k}$
 $B_x = 2.00 \text{ k}$
 $B_y = 1.875 \text{ k}$
 $F_{GK} = 3.125 \text{ k (C)}$
 $F_{GF} = 0$
 $F_{JK} = 0.500 \text{ k (T)}$
7-31. $F_{FG} = 0$
 $F_{EH} = 0.500 \text{ k (T)}$
 $F_{FH} = 3.125 \text{ k (C)}$
7-33. $F_{HG} = 4.02 \text{ kN (C)}$
 $F_{KL} = 5.29 \text{ kN (T)}$
 $F_{HL} = 5.43 \text{ kN (C)}$
7-34. $F_{HG} = 2.52 \text{ kN (C)}$
 $F_{KL} = 1.86 \text{ kN (T)}$
 $F_{HL} = 2.99 \text{ kN (C)}$

Capítulo 8

- 8-1.** $\theta_A = \frac{Pa(a-L)}{2EI}$
 $v_1 = \frac{Px_1}{6EI}[x_1^2 + 3a(a-L)]$
 $v_2 = \frac{Pa}{6EI}[3x_2(x_2-L) + a^2]$
 $v_{\text{máx}} = \frac{Pa}{24EI}(4a^2 - 3L^2)$
8-2. $\theta_A = -\frac{3PL^2}{8EI}$
 $v_C = \frac{-PL^3}{6EI}$
8-3. $v_B = -\frac{11PL^3}{48EI}$
8-5. $v_1 = \frac{w}{24EI}(-x_1^4 + 4ax_1^3 - 6a^2x_1^2)$
 $v_3 = \frac{wa^3}{24EI}(4x_3 + a - 4L)$
 $\theta_B = -\frac{wa^3}{6EI}$
 $v_B = \frac{wa^3}{24EI}(a - 4L)$
8-6. $(v_2)_{\text{máx}} = \frac{wL^4}{18\sqrt{3}EI}$
8-7. $\theta_A = \frac{5w_0L^3}{192EI}$
 $v = \frac{w_0x}{960EIL}(40L^2x^2 - 16x^4 - 25L^4)$
 $v_{\text{máx}} = \frac{w_0L^4}{120EI}$
8-9. $\theta_B = -\frac{7wa^3}{6EI}$
 $v_1 = \frac{wax_1}{12EI}(2x_1^2 - 9ax_1)$
 $v_C = -\frac{7wa^4}{12EI}$
 $v_3 = \frac{w}{24EI}(-x_3^4 + 8ax_3^3 - 24a^2x_3^2 + 4a^3x_3 - a^4)$
8-10. $\theta_B = 0.00268 \text{ rad } \nabla$
 $\Delta_{\text{máx}} = 0.322 \text{ pulg } \downarrow$
8-11. $\theta_B = 0.00268 \text{ rad } \nabla$
 $\Delta_{\text{máx}} = 0.322 \text{ pulg } \downarrow$
8-13. $\theta_C = \frac{3937.5 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI} \nabla$
 $\Delta_C = \frac{50,625 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \downarrow$
8-14. $a = 0.153L$
8-15. $a = 0.153L$
8-17. $a = \frac{L}{3}$
8-18. $\theta_C = \frac{Pa^2}{4EI} \angle$
 $\Delta_C = \frac{Pa^3}{4EI} \uparrow$
8-19. $\theta_C = \frac{Pa^2}{4EI} \angle$
 $\Delta_C = \frac{Pa^3}{4EI} \uparrow$
8-21. $\theta_C = 0.00171 \text{ rad } \nabla$
 $\Delta_C = 3.86 \text{ mm } \downarrow$
8-22. $a = 0.152L$
8-23. $a = 0.152L$
8-25. $\theta_B = \frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nabla$
 $\Delta_C = \frac{90 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$

$$8-26. \quad \theta_B = \frac{7Pa^2}{4EI} \angle$$

$$\Delta_C = \frac{9Pa^3}{4EI} \downarrow$$

$$8-27. \quad \theta_B = \frac{7Pa^2}{4EI} \nearrow$$

$$\Delta_C = \frac{9Pa^3}{4EI} \downarrow$$

$$8-29. \quad F = \frac{P}{4}$$

$$8-30. \quad \theta_B = \frac{5Pa^2}{12EI} \nearrow$$

$$\Delta_C = \frac{3Pa^3}{4EI} \downarrow$$

$$8-31. \quad \theta_B = \frac{5Pa^2}{12EI} \nearrow$$

$$\Delta_C = \frac{3Pa^3}{4EI} \downarrow$$

$$8-33. \quad \theta_A = \frac{M_0L}{24EI} \nabla$$

$$\Delta_{\max} = \frac{0.00802M_0L^2}{EI} \downarrow$$

$$8-34. \quad \theta_C = \frac{3Pa^2}{EI} \nabla$$

$$\Delta_C = \frac{25Pa^3}{6EI} \downarrow$$

$$8-35. \quad \theta_C = \frac{3Pa^2}{EI} \nabla$$

$$\Delta_C = \frac{25Pa^3}{6EI} \downarrow$$

$$8-37. \quad \theta_D = \frac{75 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nearrow$$

$$\Delta_C = \frac{169 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

$$8-38. \quad \theta_D = \frac{1008 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI} \nabla$$

$$\Delta_D = \frac{10368 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \downarrow$$

$$8-39. \quad \theta_D = \frac{1008 \text{ k} \cdot \text{pie}^2}{EI} \nabla$$

$$\Delta_D = \frac{10368 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \downarrow$$

Capítulo 9

$$9-1. \quad \Delta_{A_v} = 0.536 \text{ mm} \downarrow$$

$$9-2. \quad \Delta_{A_v} = 0.536 \text{ mm} \downarrow$$

$$9-3. \quad \Delta_{B_v} = 3.38 \text{ mm} \downarrow$$

$$9-5. \quad \Delta_{E_v} = 2.95 \text{ mm} \downarrow$$

$$9-6. \quad \Delta_{E_v} = 2.95 \text{ mm} \downarrow$$

$$9-7. \quad \Delta_{D_v} = \frac{199 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE} \downarrow$$

$$9-9. \quad \Delta_{F_v} = 0.0392 \text{ pulg} \downarrow$$

$$9-10. \quad \Delta_{F_v} = 0.0392 \text{ pulg} \downarrow$$

$$9-11. \quad \Delta_{A_v} = 0.0582 \text{ pulg} \downarrow$$

$$9-13. \quad \Delta_{D_h} = \frac{170 \text{ k} \cdot \text{pie}}{AE} \rightarrow$$

$$9-14. \quad \Delta_{D_h} = \frac{170 \text{ k} \cdot \text{pie}}{AE} \rightarrow$$

$$9-15. \quad \Delta_{C_v} = 4.91 \text{ mm} \downarrow$$

$$9-17. \quad \Delta_{A_v} = 0.0341 \text{ pulg} \downarrow$$

$$9-18. \quad \Delta_{A_v} = 0.0341 \text{ pulg} \downarrow$$

$$9-19. \quad \Delta_{A_v} = 0.507 \text{ pulg} \uparrow$$

$$9-21. \quad \Delta_C = \frac{PL^3}{48EI} \downarrow$$

$$\theta_B = \frac{PL^2}{16EI} \angle$$

$$9-22. \quad \Delta_C = \frac{PL^3}{48EI} \downarrow$$

$$\theta_B = \frac{PL^2}{16EI} \angle$$

$$9-23. \quad \Delta_C = \frac{2Pa^3}{3EI} \downarrow$$

$$9-25. \quad \theta_C = \frac{5Pa^2}{6EI} \nabla$$

$$9-26. \quad \theta_C = \frac{5Pa^2}{6EI} \nabla$$

$$9-27. \quad \theta_A = \frac{Pa^2}{6EI} \nabla$$

$$9-29. \quad \theta_C = 0.00156 \text{ rad} \nabla$$

$$\Delta_C = 0.145 \text{ pulg} \downarrow$$

$$9-30. \quad \theta_C = 0.00156 \text{ rad} \nabla$$

$$\Delta_C = 0.145 \text{ pulg} \downarrow$$

$$9-31. \quad \theta_C = 0.00670 \nabla$$

$$\Delta_C = 0.282 \text{ pulg} \downarrow$$

$$9-33. \quad \theta_B = \frac{3150 \text{ N} \cdot \text{m}^2}{EI} \nabla$$

$$\Delta_B = \frac{6637.5 \text{ N} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

$$9-34. \quad \theta_B = \frac{3150 \text{ N} \cdot \text{m}^2}{EI} \nabla$$

$$\Delta_B = \frac{6637.5 \text{ N} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

$$9-35. \quad \theta_B = 0.00448 \text{ rad} \angle$$

$$\Delta_B = 0.455 \text{ pulg}$$

$$9-37. \quad \theta_B = 0.00448 \text{ rad } \angle$$

$$\Delta_B = 0.469 \text{ pulg } \downarrow$$

$$9-38. \quad \Delta_C = \frac{w_0 L^4}{120EI} \downarrow$$

$$9-39. \quad \Delta_C = \frac{w_0 L^4}{120EI} \downarrow$$

$$9-41. \quad \theta_A = \frac{9 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \nearrow$$

$$\Delta_A = \frac{22.95 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

$$9-42. \quad \Delta_D = \frac{1397 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \downarrow$$

$$9-43. \quad \Delta_D = \frac{1397 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \downarrow$$

$$9-45. \quad (\Delta_D)_v = \frac{440 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \downarrow$$

$$9-46. \quad \Delta_{C_k} = \frac{5wL^4}{8EI}$$

$$9-47. \quad \Delta_{B_f} = \frac{wL^4}{4EI}$$

$$9-49. \quad \Delta_{C_k} = \frac{1148 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \leftarrow$$

$$9-50. \quad \Delta_{C_k} = \frac{1148 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \leftarrow$$

$$9-51. \quad (\Delta_C)_v = 2.81 \text{ mm } \downarrow$$

$$9-53. \quad (\Delta_C)_v = 2.81 \text{ mm } \downarrow$$

$$9-54. \quad \theta_A = 0.414(10^{-3}) \text{ rad}$$

$$9-55. \quad \theta_A = 0.414(10^{-3}) \text{ rad}$$

$$9-57. \quad (\Delta_C)_h = 0.0401 \text{ pulg } \rightarrow$$

$$9-58. \quad (\Delta_C)_h = \frac{79.1 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \rightarrow$$

$$9-59. \quad (\Delta_C)_h = \frac{79.1 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \rightarrow$$

$$9-61. \quad (\Delta_C)_v = \frac{417 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI} \downarrow$$

Capítulo 10

$$10-1. \quad A_x = 0$$

$$A_y = \frac{2w_0 L}{5}$$

$$B_y = \frac{w_0 L}{10}$$

$$M_A = \frac{w_0 L^2}{15}$$

$$10-2. \quad C_x = 0$$

$$C_y = 14.625 \text{ k}$$

$$B_y = 30.75 \text{ k}$$

$$A_y = 2.625 \text{ k}$$

$$10-3. \quad A_x = 0$$

$$A_y = \frac{57wL}{128}$$

$$B_y = \frac{7wL}{128}$$

$$M_A = \frac{9wL^2}{128}$$

$$10-5. \quad A_y = \frac{3P}{2}$$

$$A_x = 0$$

$$M_A = \frac{PL}{2}$$

$$B_y = \frac{5P}{2}$$

$$10-6. \quad B_y = 37.7 \text{ k}$$

$$A_x = 0$$

$$A_y = 17.1 \text{ k}$$

$$C_y = 17.1 \text{ k}$$

$$10-7. \quad \Delta_B = 1.50 \text{ mm}$$

$$10-9. \quad \Delta_C = \frac{2640 \text{ k} \cdot \text{pie}^3}{EI}$$

$$10-10. \quad B_y = 75 \text{ lb}$$

$$A_x = 0$$

$$A_y = 75 \text{ lb}$$

$$M_A = 200 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

$$10-11. \quad B_y = 7.20 \text{ k}$$

$$A_y = 0.900 \text{ k}$$

$$A_x = 0$$

$$C_y = 0.900 \text{ k}$$

$$10-13. \quad C_x = 3.75 \text{ k}$$

$$A_x = 21.75 \text{ k}$$

$$C_y = 42.4 \text{ k}$$

$$A_y = 29.6 \text{ k}$$

$$10-14. \quad C_y = 1.875 \text{ k}$$

$$A_x = 3.00 \text{ k}$$

$$A_y = 3.125 \text{ k}$$

$$M_A = 6.25 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$10-15. \quad A_y = 4.35 \text{ k}$$

$$C_x = 0$$

$$C_y = 5.65 \text{ k}$$

$$M_C = 10.4 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$10-17. \quad C_y = 39.0 \text{ kN}$$

$$A_y = 33.0 \text{ kN}$$

$$A_x = 24.0 \text{ kN}$$

$$M_A = 45.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

10-18. $A_y = -15.0 \text{ k}$
 $D_x = 2 \text{ k}$
 $D_y = 15.0 \text{ k}$
 $M_D = 19.5 \text{ k} \cdot \text{pie}$

10-19. $D_x = -2.27 \text{ k}$
 $D_y = 22.5 \text{ k}$
 $A_y = 22.5 \text{ k}$
 $A_x = 2.27 \text{ k}$

10-21. $D_x = 5.41 \text{ k}$
 $A_x = 2.59 \text{ k}$
 $D_y = 4.65 \text{ k}$
 $A_y = 4.65 \text{ k}$

10-22. $B_x = 2.65 \text{ kN}$
 $A_x = 2.65 \text{ kN}$
 $B_y = 0$
 $A_y = 0$

10-23. $B_x = 1.53 \text{ kN}$
 $A_x = 1.53 \text{ kN}$
 $B_y = 7.50 \text{ kN}$
 $A_y = 15.0 \text{ kN}$

10-25. $F_{AB} = 0.667 \text{ k (C)}$
 $F_{BD} = 0.667 \text{ k (T)}$
 $F_{BC} = 0$

10-26. $F_{CB} = 3.06 \text{ k (C)}$
 $F_{AC} = 8.23 \text{ k (C)}$
 $F_{DC} = 6.58 \text{ k (T)}$
 $F_{DB} = 5.10 \text{ k (T)}$
 $F_{AB} = 10.1 \text{ k (C)}$
 $F_{DA} = 4.94 \text{ k (T)}$

10-27. $F_{AC} = 7.91 \text{ kN (C)}$

10-29. $F_{AD} = 8.54 \text{ kN (C)}$
 $F_{AE} = 6.04 \text{ kN (T)}$
 $F_{AB} = 6.04 \text{ kN (T)}$
 $F_{CB} = 14.1 \text{ kN (T)}$
 $F_{CD} = 10.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{BE} = 5.61 \text{ kN (T)}$
 $F_{BD} = 14.0 \text{ kN (C)}$
 $F_{DE} = 3.96 \text{ kN (C)}$

10-30. $F_{AC} = 1.41 \text{ k (T)}$
 $F_{DC} = F_{CB} = 0.414 \text{ k (T)}$
 $F_{AD} = F_{AB} = 0.414 \text{ k (T)}$
 $F_{DB} = 0.586 \text{ k (C)}$

10-31. $F_{CD} = 4.63 \text{ kN (T)}$

10-33. $F_{DB} = 19.2 \text{ kN}$

$F_{CB} = 53.4 \text{ kN}$

10-34. $F_{BD} = 22.8 \text{ k (C)}$

$F_{AB} = 18.4 \text{ k (T)}$

$F_{BC} = 16.3 \text{ k (T)}$

10-35. $F_{BC} = 28.1 \text{ k (T)}$

10-37. $C_x = 0$

$C_y = \frac{P}{3}$

10-38. $F_{CD} = 7.48 \text{ kip}$

10-39. $F_{AC} = 28.0 \text{ k}$

10-45. $C_y = 0.241 \text{ k}$

Capítulo 11

11-1. $M_A = -4.62 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_B = -8.76 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_C = -10.6 \text{ k} \cdot \text{pie}$

11-2. $M_{AB} = -102 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BA} = 84 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BC} = -84 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CB} = 48 \text{ k} \cdot \text{pie}$

11-3. $M_{AB} = -18.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M_{CB} = 20.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M_{BA} = 19.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M_{BC} = -19.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$

11-5. $M_{AB} = 4.09 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M_{BA} = 8.18 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M_{BC} = -8.18 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M_{CB} = 8.18 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M_{CD} = -8.18 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M_{DC} = -4.09 \text{ kN} \cdot \text{m}$

11-6. $M_{AB} = -49.5 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BA} = 13.5 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BC} = -13.5 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CB} = 9 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CD} = -9 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{DC} = 40.5 \text{ k} \cdot \text{pie}$

11-7. $M_{BA} = 41.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M_{BC} = -41.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$

11-9. $M_{AB} = -167 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BA} = 66.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BC} = -66.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CB} = 2.61 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CD} = -2.61 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$$11-10. M_{AB} = -10.5 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BA} = 24 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$11-11. M_{AB} = -24.5 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BA} = -0.923 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BC} = 0.923 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CB} = 27.2 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CD} = -27.2 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$11-13. M_{AB} = -126 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BA} = 72 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BC} = -72 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CB} = -36 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$11-14. M_{AB} = -42.9 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CB} = 16.7 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$11-15. M_{AB} = -1.98 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA} = 0.540 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = -0.540 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$11-17. M_{AB} = -2.11 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BA} = 40.8 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BC} = -40.8 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$11-18. M_{BA} = 69.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = -34.9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BD} = -34.9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$11-19. M_{DC} = -13.4 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CD} = 13.4 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{DA} = 13.4 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CB} = -13.4 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$11-21. M_{DC} = 64.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CD} = 80.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DA} = -64.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = -80.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$11-22. M_{AD} = -25.9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DA} = -3.32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DC} = 3.32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CD} = 6.32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = -9.43 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = -6.32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$11-23. M_{AB} = 25.4 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{DC} = -56.7 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$12-7. A_x = 0$$

$$A_y = 33 \text{ kN}$$

$$B_y = 33 \text{ kN}$$

$$M_A = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$C_y = 6 \text{ kN}$$

$$12-14. M_{AB} = -2.30 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BA} = 19.4 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BC} = -19.4 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CB} = 0$$

$$12-15. A_x = 29.3 \text{ k}$$

$$A_y = 96.0 \text{ k}$$

$$M_A = 146 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$D_x = 29.3 \text{ k}$$

$$D_y = 96.0 \text{ k}$$

$$M_D = 146 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$12-19. M_A = 20.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B = -41.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C = -41.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_D = 20.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$12-22. M_{AB} = 128 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BA} = 218 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BC} = -218 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CB} = 175 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CD} = -175 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{DC} = -55.7 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$12-23. M_{BA} = -104 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BC} = 104 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CB} = 196 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CD} = -196 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{AB} = M_{DC} = 0$$

$$12-25. M_{BA} = 24.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BC} = -24.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CB} = -24.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CD} = 24.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$12-26. M_{DA} = 14.2 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{DC} = -14.2 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CD} = -7.54 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CB} = 7.54 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Capítulo 12

$$12-1. M_B = M_C = -84.0 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$12-2. M_A = -230 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_B = -187 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_C = -122 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

Capítulo 13

$$13-1. M_{AB} = -348 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BA} = 301 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{BC} = -301 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

$$M_{CB} = 348 \text{ k} \cdot \text{pie}$$

13-2. $M_{AB} = -348 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BA} = 301 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BC} = -301 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CB} = 348 \text{ k} \cdot \text{pie}$

13-3. $M_{AC} = 37.6 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CA} = 75.1 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CB} = -75.1 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BC} = 369 \text{ k} \cdot \text{pie}$

13-5. $M_{AB} = 0$

$M_{BA} = 604 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BC} = -610 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BF} = 5.53 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{FB} = 2.77 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CB} = 610 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CD} = -604 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CE} = -5.53 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{EC} = -2.77 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{DC} = 0$

13-6. $M_{AB} = 0$

$M_{BA} = 604 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BC} = -610 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BF} = 5.53 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{FB} = 2.77 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CB} = 610 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CD} = -604 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CE} = -5.53 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{EC} = -2.77 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{DC} = 0$

13-7. $M_{AB} = 1.75 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BA} = 3.51 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BC} = -3.51 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CB} = 3.51 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CD} = -3.51 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{DC} = -1.75 \text{ k} \cdot \text{pie}$

13-9. $M_{BA} = 28.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BD} = -28.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{DB} = 28.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{DC} = -28.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{AB} = M_{CD} = 0$

13-10. $M_{BA} = 28.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{BD} = -28.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{DB} = 28.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{DC} = -28.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{AB} = M_{CD} = 0$

13-11. $M_{CD} = M_{BA} = 180 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CF} = M_{BE} = 94.6 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{CB} = M_{BC} = -274 \text{ k} \cdot \text{pie}$

$M_{FC} = M_{EB} = 47.3 \text{ k} \cdot \text{pie}$

Capítulo 14

14-1.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 510.72 & 0 & -201.39 & 0 & -154.67 & -116 & -154.67 & 116 \\ 0 & 174 & 0 & 0 & -116 & -87.0 & 116 & -87.0 \\ -201.39 & 0 & 201.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -154.67 & -116 & 0 & 0 & 154.67 & 116 & 0 & 0 \\ -116 & -87.0 & 0 & 0 & 116 & 87.0 & 0 & 0 \\ -154.67 & 116 & 0 & 0 & 0 & 0 & 154.67 & -116 \\ 116 & -87.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -116 & 87.0 \end{bmatrix}$$

14-2. $D_1 = 0$

$D_2 = -0.0230 \text{ pulg}$

14-3. $q_1 = 33.3 \text{ k (C)}$

$q_2 = 0$

$q_3 = 3.33 \text{ k (T)}$

14-5. $D_1 = -0.00172 \text{ pulg}$

$q_2 = 12.7 \text{ lb (C)}$

14-6. $q_2 = 6.57 \text{ k (C)}$

14-7. $\mathbf{K} =$

$$\begin{bmatrix} 203.033 & -53.033 & -53.033 & 53.033 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -53.033 & 53.033 & 53.033 & -53.033 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -53.033 & 53.033 & 256.066 & 0 & 0 & 0 & -53.033 & -53.033 & -150 & 0 \\ 53.033 & -53.033 & 0 & 256.066 & 0 & -150 & -53.033 & -53.033 & 0 & 0 \\ -150 & 0 & 0 & 0 & 300 & 0 & -150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -150 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -53.033 & -53.033 & -150 & 0 & 203.033 & 53.033 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -53.033 & -53.033 & 0 & 0 & 53.033 & 53.033 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (10^6)$$

14-9. $\mathbf{K} =$

$$\begin{bmatrix} 113.4 & 28.8 & -75 & 0 & -38.4 & -28.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 28.8 & 21.6 & 0 & 0 & -28.8 & -21.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -38.4 & -28.8 & 0 & 0 & 151.8 & 0 & 0 & -75 & -38.4 & 28.8 \\ -28.8 & -21.6 & 0 & -100 & 0 & 143.2 & 0 & 0 & 28.8 & -21.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -75 & 0 & 0 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -75 & 0 & -38.4 & 28.8 & 0 & 0 & 113.4 & -28.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 28.8 & -21.6 & -100 & 0 & -28.8 & 121.6 \end{bmatrix} (10^6)$$

14-10. $q_5 = 33.3 \text{ kN}$

14-11. $D_6 = 0.0133 \text{ m}$

14-13. $D_5 = 0.00546 \text{ m}$
 $q_5 = 1.64 \text{ k (C)}$

14-14. $q_3 = 3.55 \text{ k (T)}$

14-15.

$$K = AE \begin{bmatrix} 0.40533 & 0.096 & 0.01697 & -0.11879 & -0.33333 & 0 \\ 0.096 & 0.128 & 0.02263 & -0.15839 & 0 & 0 \\ 0.01697 & 0.02263 & 0.129 & -0.153 & 0 & 0.17678 \\ -0.11879 & -0.15839 & -0.153 & 0.321 & 0 & -0.17678 \\ -0.33333 & 0 & 0 & 0 & 0.33333 & 0 \\ 0 & 0 & 0.17678 & -0.17678 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Capítulo 15

15-1. $M_1 = 90 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M_3 = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

15-2. $M_1 = 27.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$M_3 = 116 \text{ kN} \cdot \text{m}$

15-3. $R_3 = 7.85 \text{ kN}$

$R_4 = 40.2 \text{ kN}$

$R_5 = 86.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$R_6 = 39.6 \text{ kN}$

15-5. $R_4 = 1.93 \text{ kN}$

$R_5 = 34.5 \text{ kN}$

$R_6 = 12.4 \text{ kN}$

15-6. $R_3 = 32.25 \text{ kN}$

$R_4 = 85.75 \text{ kN}$

$R_5 = 22.0 \text{ kN}$

$R_6 = 14.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$

15-7. $R_2 = 41.4 \text{ kN}$

$R_3 = 7.725 \text{ kN}$

$R_4 = 2.30 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$R_5 = 28.9 \text{ kN}$

$R_6 = 30.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$

15-9. $M_2 = M_3 = 44.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$

15-10. $Q_4 = 25.5 \text{ k}$

$Q_5 = 21.0 \text{ k}$

$Q_6 = 25.5 \text{ k}$

15-11. $R_2 = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$R_3 = 120 \text{ kN}$

$R_4 = 160 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Capítulo 16

16-1. $K =$

$$\begin{bmatrix} 511.29 & 0 & 22.5 & -11.25 & 0 & 22.5 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 511.25 & -22.5 & 0 & -500 & 0 & 0 & -11.25 & -22.5 \\ 22.5 & -22.5 & 120 & -22.5 & 0 & 30 & 0 & 22.5 & 30 \\ -11.25 & 0 & -22.5 & 11.25 & 0 & -22.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22.5 & 0 & 30 & -22.5 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & -11.25 & 22.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.25 & 22.5 \\ 0 & -22.5 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22.5 & 60 \end{bmatrix} (10^6)$$

16-2. $R_4 = 3.21 \text{ kN} \rightarrow$

$R_5 = 21.6 \text{ kN} \uparrow$

$R_6 = 2.72 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$

$R_7 = 6.79 \text{ kN} \rightarrow$

$R_8 = 26.4 \text{ kN} \uparrow$

$R_9 = 19.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \uparrow$

16-3.

$$K = \begin{bmatrix} 851250 & 0 & 22500 & 22500 & -11250 & 0 & -440000 & 0 & 0 \\ 0 & 1055760 & -14400 & 0 & 0 & -1050000 & 0 & -5760 & -14400 \\ 22500 & -14400 & 108000 & 30000 & -22500 & 0 & 0 & 14400 & 24000 \\ 22500 & 0 & 30000 & 60000 & -22500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11250 & 0 & -22500 & -22500 & 11250 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1050000 & 0 & 0 & 0 & 1050000 & 0 & 0 & 0 \\ -440000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140000 & 0 & 0 \\ 0 & -5760 & 14400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5760 & 14400 \\ 0 & -14400 & 24000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14400 & -48000 \end{bmatrix}$$

16-5.

$$K = \begin{bmatrix} 763.125 & 0 & 26.25 & 26.25 & 0 & -13.125 & 0 & -750 & 0 \\ 0 & 763.125 & -26.25 & 0 & -26.25 & 0 & -750 & 0 & -13.125 \\ 26.25 & -26.25 & 140 & 35 & 35 & -26.25 & 0 & 0 & 26.25 \\ 26.25 & 0 & 35 & 70 & 0 & -26.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -26.25 & 35 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 26.25 \\ -13.125 & 0 & -26.25 & -26.25 & 0 & 13.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 750 & 0 & 0 \\ -750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 750 & 0 \\ 0 & -13.125 & 26.25 & 0 & 26.25 & 0 & 0 & 0 & 13.125 \end{bmatrix} (10^6)$$

16-6. $R_6 = 5.54 \text{ kN}$

$R_7 = 35.5 \text{ kN}$

$R_8 = 5.54 \text{ kN}$

$R_9 = 24.5 \text{ kN}$

16-7.

$$K = \begin{bmatrix} 4833.33 & 0 & 0 & -4833.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 130.90 & 7854.17 & 0 & -130.90 & 7854.17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7854.17 & 628333.33 & 0 & -7854.17 & 324166.67 & 0 & 0 & 0 \\ -4833.33 & 0 & 0 & 4833.33 & 0 & 5454.28 & -75.75 & 0 & 5454.28 \\ 0 & -130.90 & -7854.17 & 0 & 4158.68 & -7854.17 & 0 & -4027.78 & 0 \\ 0 & 7854.17 & 314166.67 & 5454.28 & -7854.17 & 1151964.64 & -5454.28 & 0 & 261805.55 \\ 0 & 0 & 0 & -75.75 & 0 & -5454.28 & 75.75 & 0 & -5454.28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4027.78 & 0 & 0 & 4027.78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5454.28 & 0 & 261805.55 & -5454.28 & 0 & 523611.11 \end{bmatrix}$$

$$16-9. \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1268.75 & 0 & 3625 & 0 & 3625 & -1208.33 & 0 & -60.4167 & 0 \\ 0 & 2424.22 & 906.25 & 906.25 & 0 & 0 & -7.5521 & 0 & -2416.67 \\ 3625 & 906.25 & 435000 & 72500 & 145000 & 0 & -906.25 & -3625 & 0 \\ 0 & 906.25 & 72500 & 145000 & 0 & 0 & -9060.25 & 0 & 0 \\ 3625 & 0 & 145000 & 0 & 290000 & 0 & 0 & -3625 & 0 \\ -1208.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1208.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7.5521 & -906.25 & -906.25 & 0 & 0 & 7.5521 & 0 & 0 \\ -60.4167 & 0 & -3625 & 0 & -3625 & 0 & 0 & 60.4167 & 0 \\ 0 & -2416.67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2416.67 \end{bmatrix}$$

$$16-10. \quad R_7 = 20 \text{ k}$$

$$R_8 = 0$$

$$R_9 = 20 \text{ k}$$

$$16-11. \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2048.31 & 0 & -304.04 & -304.04 & 0 & -34.4170 & 0 & -2013.89 & 0 \\ 0 & 3031.03 & -1468.46 & 0 & -1468.46 & 0 & -3020.83 & 0 & -10.1976 \\ -3304.04 & -1468.46 & 704861 & 211458 & 140972 & 3304.04 & 0 & 0 & 1468.46 \\ -3304.04 & 0 & 211458 & 422917 & 0 & 3304.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1468.46 & 140972 & 0 & 2819.44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -34.4170 & 0 & 3304.04 & 3304.04 & 0 & 34.4170 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3020.83 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3020.83 & 0 & 0 \\ -2013.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2013.89 & 0 \\ 0 & -10.1976 & 1468.46 & 0 & 1468.46 & 0 & 0 & 0 & 10.1976 \end{bmatrix}$$

Apéndices

$$A-1. \quad 2\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 6 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 17 & 31 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A-2. \quad 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \\ -7 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -9 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A-3. \quad \mathbf{AB} = [18 \quad -12]$$

$$A-5. \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & -10 \\ -20 & -30 & 25 \\ 24 & 36 & -30 \end{bmatrix}$$

$$A-6. \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = [1 \quad 9 \quad 10] = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$A-7. \quad \mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 8 & 18 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A-9. \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 68 & 38 \\ 38 & 26 \end{bmatrix}$$

$$A-10. \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$A-11. \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 30 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$A-15. \quad |\mathbf{A}| = 27$$

$$|\mathbf{B}| = -30$$

$$A-17. \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{43} \begin{bmatrix} -7 & 16 & 17 \\ -4 & 3 & 22 \\ 12 & -9 & -23 \end{bmatrix}$$

$$A-18. \quad x_1 = -\frac{4}{9}$$

$$x_2 = -\frac{5}{9}$$

$$x_3 = \frac{4}{3}$$

$$A-19. \quad x_1 = -\frac{4}{9}$$

$$x_2 = -\frac{5}{9}$$

$$x_3 = \frac{4}{3}$$

$$A-21. \quad x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = -1$$

Índice

A

Almas, 4

American Association of State and Highway
Transportation Officials (AASHTO), 9, 15-16

American Concrete Institute (ACI), 9, 41

American Forest and Paper Association (AFPA), 9

American Institute of Steel Construction (AISC), 9, 35

American Railroad Engineers Association (AREA), 9, 15

American Society of Civil Engineers (ASCE), 9

Análisis

de marcos planos, utilizando el método de la rigidez,
595-611

dinámico, cargas sísmicas, 25

estático, cargas sísmicas, 25

matricial, 539, 565. *Vea también* Método de análisis de la
rigidez

Arcos, 7, 31, 194-203

atados, 194

de dos articulaciones, 194

de tres articulaciones, 194-200, 203

fijos, 194

forma parabólica de, 194

fuerzas de compresión y, 194-203

funiculares, 194

usos estructurales de, 7, 31, 194

Área de influencia, cargas vivas, 13

Armadura

de abanico, 80-81

de tijeras, 80-81

diente de sierra, 80-81

Fink, 80-81

Howe, 80-83

Pratt, 80-83

Warren, 80-83

Armaduras, 6-7, 31, 79-131, 232-235, 261, 264-267, 275-277,
296-297, 300, 348-360, 376-377, 392-393, 422-425,
538-573

análisis aproximado de, 264-267, 273-277, 296-297

articuladas, 84, 130, 275, 297

carga externa, y 348

cargas comunes, 84, 130

clasificación de las, 85-94

complejas, 86, 116-119, 130

componentes verticales, 264

compuestas, 86-87, 110-112, 130

con refuerzo transversal, 264-267

conexiones fijas, 275, 297

coordenadas nodales, 560-563

coplanares, 85-94

curvatura de, 349

deflexiones de, 275-277, 297, 300, 348-360, 376-377,
392-393

desplazamiento rotacional de, 300, 348-360, 376-377,
392-393

determinación de, 87, 120, 130

efectos de la temperatura (térmicos) sobre, 349, 392,
564-565, 568-569

elementos de fuerza cero, 98-99, 122-123, 264

errores de fabricación, 349, 392, 564-567

estabilidad de, 82, 87-91, 120, 131

estáticamente determinadas, 79-131

estáticamente indeterminadas, 264-267, 275-277, 296-297,
422-425

identificación de elementos y nodos en las, 540

indeterminación cinemática, 541

líneas de influencia para, 232-235, 261

matrices de rigidez para, 540, 542-543, 546-559, 570-571

matrices de transformación para, 543-545, 570

matriz de rigidez (del elemento) global (**k**), 546-547

matriz de rigidez de la estructura (**K**), 540, 547-551

matriz de rigidez del elemento (**k**), 541-543, 546-551

matriz de transformación de la fuerza (**Q**) para, 545,
564-569

matriz de transformación del desplazamiento (**T**) para,
544

método de análisis de la fuerza, 422-425

método de análisis de la rigidez, 538-573

método de las secciones para, 104-109, 123, 131

método de los elementos sustitutos, 116-119

método de los nudos para, 94-97, 123, 131

- nodos, 540
- para techo, 80-81
- placa de refuerzo, 79
- planas, 6, 79
- portales de, 275-277, 297
- procedimientos de análisis para, 95, 106, 116-117, 123, 350, 357, 553
- puentes, 82-83
- relaciones carga-desplazamiento, 542-543
- simples, 85, 130
- sistemas de coordenadas, 540, 543-545, 560-563, 570
- soportes para, 275-277, 297
- subdivididas, 82
- supuestos de diseño para, 84, 120, 130
- teorema de Castigliano para, 356-360, 390
- tipos de, 80-83
- trabajo virtual para, método del, 346-354, 392
- uso estructural de, 6-7, 31, 79
- Armaduras espaciales, 6, 120-126, 570-571
 - componentes de fuerza x , y , z de, 122
 - determinación, 120
 - elementos de fuerza cero en, 122-123
 - estabilidad de, 120
 - matrices de transformación para, 570
 - método de análisis de la rigidez, 570-571
 - procedimiento de análisis para, 123
 - soportes para, 120-121
 - supuestos de para el diseño para, 120

B

- Bahías, 80
- Bisagras, 282-283, 289, 297, 437
- BridasAlas, 4

C

- Caballetes, 80
- Cables, 7, 31, 37, 181-193, 203
 - cargas concentradas y, 182-183, 203
 - cargas uniformemente distribuidas y, 184-189, 203
 - conexiones de apoyo, 37, 181-193
 - curva catenaria, 185
 - ecuaciones de equilibrio para, 182-185
 - flecha, 182
 - flexibilidad de los, 182, 203
 - forma parabólica de, 185
 - usos estructurales de, 7, 31, 181
- Caparzones, estructuras superficiales, 8

- Carga de datos, software para el análisis estructural, 627
- Cargas, 2-31, 40-43, 47, 68, 132-179, 181-183, 203, 204-261, 270-272, 282-293, 296-297, 430, 501-503, 523-527, 529-530
 - antisimétricas, 430, 502, 530
 - códigos de construcción (generales), 9
 - códigos de diseño, 9
 - de nieve, 22-24
 - del viento, 16-22
 - diseño de edificios y, 12-14, 16-26, 270-272, 296
 - efectos de la presión del suelo, 25
 - efectos de la presión hidrostática, 25
 - elementos estructurales, en, 132-179
 - elementos no prismáticos, 523-527, 529-530
 - estructuras de cable, 181-193, 203
 - estructuras idealizadas, 40-43, 68
 - estructuras y, 2-31
 - factor de impacto (I), 16
 - fijas, 205-206. *Vea también* Cargas muertas
 - fuerza concentrada, 182-183, 203, 213-214, 240-249, 260-261
 - laterales, 282-293, 297
 - líneas de influencia para, 204-261
 - móviles, *vea* Cargas vivas
 - muertas, 10-12, 31, 205-206
 - naturales, 26
 - publicaciones de la Portland Cement Association, 525-527
 - puentes carreteros, 15
 - puentes ferroviarios, 15
 - serie de, 244-245, 261
 - simétricas, 501, 503, 529
 - sísmicas, 23-25
 - unitarias, 206-212, 260-261
 - unitarias, líneas de influencia y, 206-212, 260-261
 - verticales, 270-272, 296
 - verticales, análisis de marcos de construcción y, 270-272, 296
- Cargas concentradas, 182-183, 203, 213-214, 240-254, 260-261
 - cables, 182-183, 203
 - elementos de una armadura, 84, 94-95, 104-105, 130
 - estructuras arqueadas, 194-203
 - fuerza cortante (V) en, 240-243, 261
 - fuerza cortante y momento máximos absolutos en, 250-254, 261
 - líneas de influencia y, 213-214, 240-254, 260-261
 - método de las secciones y, 104-105

- momento (M) en, 244-245, 261
- serie de, 240-249, 261
- vigas, 213-214, 240-249, 260-261
- Cargas distribuidas, 150-151, 184-189, 203, 213-214, 260.
 - Vea también* Cargas uniformes
 - cables, 184-189, 203
 - diagramas de fuerza cortante y de momento y, 150-151
 - líneas de influencia y, 213-214, 260
 - uniformemente, 184-189, 203, 213-214, 260
 - vigas, 213-214, 260
- Cargas internas, 47, 132-179, 303, 305-308
 - cargas distribuidas y, 150-151
 - convención de signos para, 134
 - deflexiones y, 303, 305-308
 - diagramas de fuerza cortante y de momento para, 150-159, 178-179
 - diagramas de momento para, 168-172
 - elementos estructurales, 132-179
 - fuerza cortante (V) y, 133-138, 178
 - fuerza de momento flexionante (M), 133-138, 178, 303, 305-308
 - fuerza normal (N) y, 133-135, 178
 - funciones de fuerza cortante y de momento de, 139-143, 178-179
 - marcos, 163-167
 - método de la superposición para, 168-172
 - método de las secciones para, 47, 133-138, 178
 - procedimientos de análisis para, 135, 140, 153
 - puntos específicos, fuerzas en, 133-138, 178
 - vigas, 132-159, 178-179
- Cargas laterales, 282-293, 297
 - análisis aproximado para, 282-293, 297
 - deflexión por, 282-283, 297
 - marcos de construcción, 282-293, 297
 - método del portal para, 282-287, 297
 - método del voladizo para, 288-293, 297
 - soportes fijos para, 282-283, 289, 297
- Cargas tributarias, 40-43, 68
 - losas de dos sentidos (sistema), 42-43, 68
 - losas de un solo sentido (sistema), 40-41, 68
- Cargas uniformes, 12-14, 184-189, 203, 213-214, 260
 - cables y, 184-189, 203
 - distribuidas, 184-189, 203, 213-214, 260
 - líneas de influencia y, 213-214, 260
 - vigas, 213-214, 260
 - vivas, 12-14, 213-214, 260
- Cargas vivas, 12-26, 31, 204-261
 - área de influencia, 13
 - cargas de impacto, 16
 - cargas de la nieve, 23-24
 - cargas del viento, 16-22
 - cargas sísmicas, 24-25
 - diseño de edificios y, 12-14, 16-26, 228-231, 261
 - diseño de puentes y, 15-16, 240-254, 261
 - efectos de la presión hidrostática y del suelo, 25
 - factor de impacto, 16
 - líneas de influencia para, 204-261
 - naturales, 26
 - reducidas, ecuación para, 13-14
 - uniformes, 12-14
- Castigliano, teorema de, 381, 392
- Códigos
 - de construcción (generales), 9
 - de diseño, 9
- Columna viga, 6, 31
- Columnas 6, 31
- Comba, 349
- Compatibilidad, 48, 397-407
 - ecuaciones de, 48, 398-401
 - estructuras estáticamente determinadas, 48
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 397-401
 - método de análisis de la fuerza, 397-401
 - requisitos de, 397
- Componentes
 - de fuerza x , y , z , armaduras espaciales, 122
 - verticales, armaduras, 264
- Condiciones
 - de continuidad, método de la doble integración, 307
 - de frontera, método de la doble integración, 307
- Conexiones de junta de rótula, 120-121
- Conexiones de los soportes, 34-37, 68, 120-121, 181-193, 273-277, 282-283, 289, 297, 300-303, 326-333, 339
 - armaduras, 84, 120-121, 130, 275, 297
 - armaduras espaciales, 120-121
 - articuladas, 34-37, 68, 84, 130, 273, 275, 297
 - bisagras, 282-283, 289, 297
 - bola y cuenca, 120-121
 - cables, 37, 181-193
 - deflexión y, 300-303, 326-333, 339
 - eslabones cortos, 36, 121
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 273-277, 282-283, 289, 296-297
 - estructuras idealizadas, 34-37
 - fijación parcial, 274

- fijas, 34-37, 274, 275, 282-283, 289, 297
- fuerza (F), reacciones, 52
- junta de rótula, 120-121
- juntas, 34-37, 68
- juntas conectadas con rodillos, 34-37, 120-121
- marcos, 273-275, 282-283, 289, 297
- método de la viga conjugada y, 326-333, 339
- portales, 273-277, 297
- Coordenadas
 - del elemento (locales), 540, 576, 627
 - globales (de la estructura), 540, 576, 625
 - nodales, 560-563
- Cubierta, cargas sobre el puente y la, 82
- Curva catenaria, 185
- Curva elástica, 299-303, 307-313, 316-325, 228-339
 - centro de curvatura (O'), 305
 - deflexiones tangenciales, 317
 - deflexiones y, 299-303, 316-325, 339
 - método de la doble integración para, 307-313, 338
 - pendiente y, 300-301, 307-308, 316
 - radio de curvatura (ρ), 305-306
 - rigidez a la flexión (EI), 305-306
 - teoremas de momento-área para, 316-325, 339
 - teoría de la viga elástica y, 305-306
- Curvatura (ρ), 305-306
- D**
- Datos
 - de los elementos, software para el análisis estructural, 626-627
 - del nodo, software para el análisis estructural, 626
 - del soporte, software para análisis estructural, 627
- Deflexión, 205, 216-223, 260, 270-277, 282-283, 296-297, 298-339, 341-393
 - armaduras, 275-277, 297, 300, 348-360, 376-377, 392-393
 - cargas laterales y, 282-283, 297
 - cargas verticales y, 270-272, 296
 - cargas vivas y, 205, 216-223, 260
 - convención de signos para, 304, 307, 316-317
 - cortante (V) y, 375
 - curva elástica para, 299-303, 307-313, 316-325, 338-339
 - curvatura (ρ), 305-306
 - de desplazamiento (rotación) (desplazamiento), 341-393
 - diagramas (M/EI), 299-303, 316-325, 338-339
 - elementos circulares, 376
 - energía de deformación (U_i) y, 341, 344, 375-380, 392
 - estructuras de portal, 273-277, 297
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 270-277, 296
 - flexión (M), 303, 305-313, 338, 344
 - flexión interna (M) y, 303, 305-308
 - fuerzas axiales (N) y, 303, 344, 375
 - líneas de influencia y, 205, 216-223, 260
 - marcos, 270-275, 282-283, 296-297, 300-303, 364-386, 393
 - marcos de construcción y, 270-272, 282-283, 296-297
 - método de la doble integración para, 307-313, 338
 - método de la viga conjugada para, 326-333, 339
 - métodos de energía para, 341-393
 - pendiente y, 300-301, 307-308, 316
 - principio de conservación de la energía, 341, 392
 - principio de Müller-Breslau para, 216-223, 260
 - principio del trabajo virtual para, 346-348
 - principio del trabajo y la energía para, 345
 - procedimientos para el análisis de, 308, 318, 328, 350, 357, 366, 382
 - punto de inflexión, 304, 338
 - respuesta material lineal elástica, 355-356, 375-376
 - soportes y, 300-303, 326-333, 339
 - temperatura (T) y, 349, 376-377
 - teorema de Castigliano para, 355-360, 381-386, 393
 - teoremas de área-momento para, 316-325, 339
 - teoría de la viga elástica para, 305-306
 - torsión (T) y, 376
 - trabajo externo (U_e) y, 341-344, 392
 - trabajo virtual, método del, 346-354, 364-380, 392-393
 - trabajo y, 341-393
 - vigas, 205, 216-223, 260, 298-339, 364-386, 393
- Deflexiones, 299-339
- Deflexiones empleando método de la energía, 341-393
 - deflexiones, 341-393
 - desplazamientos de rotación, 341-393
 - energía de deformación (U_i), 341, 344-345, 355-356, 375-380, 392
 - fuerza (F) y, 342-343
 - principio de conservación de la energía, 341, 392
 - principio del trabajo y, 346-348, 392
 - teorema de Castigliano, 355-360, 381-386, 393
 - trabajo externo (U_e), 341-344, 355, 392
 - trabajo virtual, 346-354, 364-380, 392-393
 - trabajo y, 341-393
- Desplazamiento (v), 326-328, 341-393, 397-398, 402-403, 448, 450-485, 486-521, 542-543, 577-578, 595-596. *Vea también* Deflexiones, métodos de energía
 - angular (θ), 454-455
 - cero, 327

convención de signos para, 453, 459, 488
 de rotación (deflexión), 341-393
 deflexión y, 326-328
 distribución de momentos para, 486-521
 ecuaciones de equilibrio para, 397, 459
 ecuaciones de pendiente-deflexión para, 450-485
 energía de deformación (U_i) y, 341, 344-345, 355-356, 375-380, 392
 estructuras estáticamente determinadas, 341-393
 estructuras estáticamente indeterminadas, 397-398, 402-403, 448, 450-485
 factores de rigidez, 457-458, 488-490, 500-505
 grados de libertad, 452-453, 452-453, 459, 485
 lineal (Δ), 453, 455
 marcos, 452-453, 459, 469-481, 495, 508-517
 matrices de rigidez, 542-543, 577-578, 595-596
 método de la viga conjugada y, 326-328
 nodos, 452-453, 459
 relaciones carga-desplazamiento, 542-543, 577-578, 595-596
 Teorema de la reciprocidad de Maxwell, 402-403, 448
 trabajo virtual para, 346-354, 364-380, 392-393
 vigas, 452-453, 459-466, 491-505, 577-578

Desplazamiento

angular (θ), 454-455
 de rotación, 341-393. *Vea también* Deflexión
 de torsión, elementos circulares, 376
 lineal (Δ), 453, 455
 Desplazamiento lateral, 469-481, 485, 508-517
 distribución de momentos para, 508-517
 ecuaciones de pendiente-deflexión para, 469-480
 marcos con, 474-481, 510-517
 marcos sin, 469-473, 508-509
 método de análisis del desplazamiento para, 469-481, 485, 508-517

Desplazamientos y momentos cero, 327

Determinación, 48-54, 69, 87, 120, 130

armaduras, 87, 120, 130
 armaduras espaciales, 120
 ecuaciones de compatibilidad para, 48
 ecuaciones de equilibrio y, 48-51, 69
 estabilidad y, 48-54, 69
 estáticamente determinada, 48
 estáticamente indeterminada, 48

Determinantes para matrices, 618-620

Diagramas de cuerpo libre, 47-51, 59-60

Diagramas de fuerza cortante y de momento, 150-159, 163-167, 178-179, 205-206
 cargas distribuidas y, 150-151
 cargas internas y, 150-159, 163-167, 178-179
 cargas muertas y, 205-206
 marcos, 163-167
 vigas, 150-159, 178-179

Diagramas de momento, 168-172

Diseño de edificios, 12-14, 16-26, 228-231, 261, 270-272, 282-293, 296-297
 cargas laterales y, 282-293, 297
 cargas vivas y, 12-14, 16-26, 228-231, 261
 cargas verticales y, 270-272, 296
 deflexión y, 270-272, 282-283, 296-297
 método del voladizo para, 288-293, 297
 líneas de influencia para, 228-231, 261
 marcos, 270-272, 282-293, 296
 método del portal para, 282-287, 297
 soportes y, 282-283, 289, 296-297

Dispositivos de deslizamiento, 436

Distribución de momentos, 486-521, 528-533

convención de signos para, 459, 488
 desplazamiento lateral y, 508-517
 elementos articulados, 528-529
 elementos no prismáticos, 528-533
 factor de traslado, 490
 factores de distribución (DF), 489, 491
 factores de rigidez, 488-490, 500-505
 marcos, 495, 508-517
 método de análisis del desplazamiento, 486-521, 528-533
 momentos de extremo fijo (FEM), 491-495
 procedimientos de análisis usando la, 487-490, 495
 traslación relativa de las juntas, 531
 vigas, 491-505, 528-533
 vigas simétricas, 501-503, 529-530

E

Ecuación de rigidez de la estructura, 552

Ecuaciones de pendiente-deflexión, 450-485, 534-535
 claro final articulado, 458, 485
 convención de signos para, 453
 desplazamiento angular (θ), 454-455
 desplazamiento lateral y, 469-481, 485
 desplazamiento lineal (Δ), 453, 455
 elementos no prismáticos, 534-535
 estructuras estáticamente indeterminadas, 450-485
 factor de rigidez (k), 457-458

- marcos, 469-481
- método de análisis del desplazamiento usando, 450-485, 534-535
- método de la viga conjugada para, 454-457
- momentos de extremo fijo (FEM), 456-458, 485, 534-535
- principio de superposición para, 453
- procedimiento de análisis empleando, 459
- rigidez del elemento (k), 457
- rotación del claro (ψ), 457
- traslación relativa de las juntas, 534-535
- vigas, 459-466
- Efectos
 - de la presión del suelo sobre en las estructuras, 25
 - de la presión hidrostática, 25
- Elementos
 - circulares, desplazamiento torsional de, 376
 - de la armadura de fuerza cero, 98-99, 122-123
 - de una matriz, 612
 - estructurales, vea Vigas de ver; Elementos no prismáticos
- Elementos no prismáticos, 522-537
 - cargas antisimétricas, 530
 - cargas simétricas, 529
 - distribución de momentos para, 528-533
 - ecuaciones de pendiente-deflexión, 534-535
 - extremos articulados, 528
 - factor de rigidez (K), 524-525
 - factor de traslado (COFTR), 524-525
 - método de análisis del desplazamiento, 522-537
 - momentos de extremo fijo (FEM), 524-525, 531, 534-535
 - propiedades de carga en, 523-527
 - sustitutos, método de análisis de los, 116-119
 - traslación relativa de las juntas, 531, 534-535
 - vigas, 528-533
 - vigas simétricas, 529-530
- Energía de deformación (U_p), 341, 344-345, 355-356, 375-380, 392
 - cambios de temperatura (T) y, 376-377
 - deflexión y, 341, 344, 375-380, 392
 - elementos circulares, 376
 - fuerza axial (N) de, 344, 375
 - fuerza cortante (V) y, 375
 - momento flexionante (M) de, 344
 - principio del trabajo y de la energía con, 345
 - teorema de Castigliano para, 365-366, 393
 - torsión (T) y, 375
 - trabajo virtual y, 375-380
- Envolvente de los valores máximos de la línea de influencia, 251
- Equilibrio, 47-51, 59-67, 69, 182-185, 398-401, 459
 - análisis de cables y, 182-185
 - aplicaciones estáticamente determinadas, 59-67
 - desplazamiento y, 397, 459
 - determinación y, 48-51, 69
 - diagramas de cuerpo libre para, 47-51, 59-60
 - ecuaciones de, 47-51, 59-67, 69, 182-185, 398-401, 459
 - incógnitas, 397
 - método de análisis de la fuerza y, 397-401
 - requisitos de, 397
- Errores de fabricación, 349, 392, 564-567
 - armaduras, 349, 392, 564-567
 - deflexión y, 349, 392
 - matriz de transformación de la fuerza (Q) para, 564-565
 - método de análisis de la rigidez para, 564-567
- Escalares, multiplicación de matrices y, 614
- Esfuerzo
 - permisibles de diseño (EPDDEP), 26
 - primario, 84
 - secundario, 84
- Esfuerzos, juntas de los elementos y, 84
- Esquineros, 80
- Estabilidad, 48-54, 69, 82, 87-91, 120, 131
 - armaduras, 82, 87-91, 120, 131
 - armaduras espaciales, 120
 - determinación y, 48-54, 69
 - ecuaciones de equilibrio y, 48-51
 - externa, 87, 120, 131
 - externa, armaduras, 87, 120, 131
 - interna, 88-89, 120, 131
 - interna, armaduras, 88-89, 120, 131
 - por inspección, 53
 - reacciones en los soportes, 52
 - restricciones impropias y, 52-53
 - restricciones parciales y, 52
- Estructuras, 2-31, 32-77, 79-131, 132-179, 180-203, 204-261, 262-297, 394-449, 450-485, 486-521, 522-537, 538-573, 574-593, 594-611, 625-627
 - análisis de, 3-4, 79-131, 132-179, 180-203
 - arcos, 7, 31, 194-203
 - armaduras, 6-7, 31, 79-131
 - cables, 7, 31, 181-193, 203
 - cargas internas en los elementos, 132-179
 - cargas tributarias, 40-43, 68
 - cargas y, 2-31, 132-179, 204-261

- clasificación de, 4-8
- códigos de construcción (generales), 9
- columnas, 6, 31
- compuestas, 425-427
- compuestas, método de análisis de la fuerza para, 425-427
- conexiones de los soportes para, 34-37, 68
- de placa delgada, 8
- determinación de, 48-54, 69
- diagramas de cuerpo libre de, 47-51, 59-60
- diseño de, 9, 26
- diseño del esfuerzo permisible (DEP), 26
- ecuaciones de compatibilidad para, 48
- ecuaciones de equilibrio de, 47-51, 59-67, 69
- elementos no prismáticos, 397, 450-485, 486-521, 522-537
- elementos para, 4-6
- estabilidad de, 48-54, 69
- estáticamente determinadas, 32-77, 79-131, 204-261
- estáticamente indeterminadas, 48-51, 262-297, 394-449, 450-485, 486-521, 522-537
- factores de carga y resistencia de diseño (LRFD), 26
- idealizadas, 33-45, 68
- líneas de influencia para, 204-261
- marcos, 8, 31
- método de análisis de la fuerza, 394-449
- método de análisis de la rigidez, 538-573, 574-593, 594-611
- método de análisis del desplazamiento, 397, 450-485, 486-521, 522-537
- métodos de análisis aproximados, 262-297
- placas delgadas (caparazón), 8
- procedimiento de análisis para, 61
- restricciones impropias para, 52-53
- restricciones parciales, 52
- simétricas, 429-430, 449
- sistemas, tipos de, 6-6
- software para el análisis de, 625-627
- superficiales, 8
- superposición, principio de la, 46, 69
- tirantes, 4, 31
- trabes, 4-5, 38
- vigas, 4-5, 31, 38-39, 132-179
- Estructuras estáticamente determinadas, 32-77, 79-131, 212-261, 396-397
 - análisis de, 79-131
 - análisis idealizado, de, 33-45, 68
 - armaduras, 79-131
 - articuladas, 50, 59-61
 - determinación de, 48-54
 - ecuaciones de equilibrio aplicadas a, 59-67
 - estabilidad de, 48-54
 - estructuras estáticamente indeterminadas comparadas con, 396-397
 - líneas de influencia para, 204-261
 - marcos, 51
 - procedimientos de análisis para, 61, 206
 - restricciones impropias para, 52-53
 - restricciones parciales, 52
 - vigas, 49
- Estructuras estáticamente indeterminadas, 48-51, 262-297, 394-449, 450-485, 486-521, 522-537
 - análisis de, por el método de la fuerza, 395-449
 - armaduras, 264-267, 275-277, 296-297, 422-425
 - cargas laterales, 282-293, 297
 - cargas verticales, 270-272, 296
 - deflexión de, 270-277, 282-283, 296-297
 - desplazamiento lateral y, 469-481
 - determinación de, 48-51, 395, 452-453
 - distribución de momentos para, 486-521, 528-533
 - ecuaciones de pendiente-deflexión para, 450-485, 534-535
 - elementos no prismáticos, 522-537
 - estructuras compuestas, 425-427
 - estructuras estáticamente determinadas comparadas con, 396-397
 - estructuras simétricas, 429-430, 449
 - grados de libertad, 452-453, 459, 485
 - ley de Betti, 403
 - líneas de influencia para, 435-445, 449
 - marcos, 270-274, 282-293, 296-297, 411-415, 439-445, 452-453, 459, 469-481, 495, 508-517
 - marcos de construcción, 270-272, 282-293, 296
 - método de análisis de la fuerza, 394-449
 - método de análisis del desplazamiento, 450-485, 486-521, 522-537
 - método del portal para, 282-287, 297
 - método del voladizo para, 288-293, 297
 - métodos de análisis aproximados, 262-297
 - portales, 273-277, 282-287, 297
 - procedimientos de análisis para, 401, 438, 459
 - puntos de inflexión, 274-275, 282, 297
 - soportes y, 273-277, 282-283, 289, 296-297
 - teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos, 402-403, 448
 - vigas, 403-410, 452-453, 435-438, 459-466, 491-505, 528-533

Estructuras idealizadas, 33-45, 68

articulaciones, 34-37

cargas tributarias, 40-43, 68

conexiones de soporte, 34-37, 68

modelos, 38-45

planes estructurales, 38-39

sistema de dos sentidos, 42-43

sistemas de un solo sentido, 40-41

Estructuras simétricas, 429-430, 449, 501-503, 529-530

cargas, 501, 503, 529

cargas antisimétricas, 430, 502, 530

elementos no prismáticos, 529-530

método de análisis de la fuerza, 429-430, 449

método de análisis del desplazamiento, 501-503, 529-530

vigas, 501-503, 529-530

Estructuras superficiales, 8

F

Factor

de carga de impacto (I), 16

de carga y resistencia de diseño (LRFD), 26

de distribución (DF), 489, 491

de rigidez del claro (k), 457-458de rigidez relativa (K_R), 490de rigidez total (K_T), 489

de traslado (COFFTR), 490, 524-525

Factores de rigidez, 457-458, 488-490, 500-505, 524-525

cargas antisimétricas, 502

cargas simétricas, 501, 503

de elementos no prismáticos, 524-525

de un elemento de viga (K), 488, 500-505

de las juntas, 489

de vigas simétricas, 501-503

del claro (k), 457-458

distribución de momentos y, 488-490, 500-505

ecuaciones de pendiente-deflexión, 457-458

extremos articulados, 458, 500

modificación, 500-505

relativa (K_R), 490total (K_T), 489

Flecha, en cables, 182

Flexibilidad de cables, 182, 203

Formas parabólicas, 185, 194

Fuerza (**F**), 36-37, 84, 94-95, 104-105, 122-123, 130, 194-203,303, 305-313, 338, 342-344, 355-362, 375, 381-383. *Vea**también* Cargas; Fuerza cortante

análisis de armaduras y, 84, 94-95, 104-105, 122-123, 130

axial (**N**), 303, 344, 375componentes x , y , z de la, 122de compresión (**C**), 84, 94-95, 104-105, 130, 194-203de flexión (**M**), 303, 305-313, 338, 344de tensión (**T**), 84, 94-95, 104-105, 130

deflexión (desplazamiento de rotación) y, 303, 305-313, 338, 342-344, 355-362, 375, 381-383

elementos de armadura de fuerza cero, 98-99, 122-123

estructuras arqueadas, 194-203

fuerza externa (**P**), 355-362, 381-383fuerza interna (**N**), 356-362

magnitud de la, 94-95

por inspección, 95

reacciones en los soportes, 36-37

trabajo virtual y, 375

trabajo y, 342-343

Fuerza cortante (**V**), 4-5, 133-138, 178, 216-220, 240-243,

250-254, 261, 375, 436

aplicada, 4-5

cargas concentradas y, 240-243, 250-254, 261

cargas internas y, 133-138, 178

cargas vivas y, 216-220, 260

desplazamiento de rotación (deflexiones) y, 375

energía de deformación virtual causada por, 375

envolvente de los valores máximos de la línea de influencia, 251

líneas de influencia y, 216-220, 240-243, 250-254, 261, 436

máxima absoluta, 250-254, 261

máxima absoluta (**V**) y momento (**M**), 250-254, 261

principio de Müller-Breslau para, 216-220, 260

serie de cargas concentradas, 240-243, 261

vigas en voladizo, 250, 261

vigas simplemente apoyadas, 250-251, 261

Fuerzas axiales (**N**), desplazamiento de rotación

(deflexiones) y, 303, 344, 375

Funciones de fuerza cortante y de momento, 139-143, 178-179

G

Gaus, método de, 623

Grados de libertad, 452-453, 459, 485

I

Igualdad de matrices, 614

Indeterminación cinemática, 541, 576-577

Integración para el trabajo virtual, 364-365

Inversa de una matriz, 620-622

- J**
- Juntas, 34-39, 50, 59-67, 68, 84, 94-97, 123, 130-131, 489, 531, 534-535
 - análisis de armaduras y, 84, 94-97, 13, 130-131
 - articuladas, 34-37, 50, 59-61, 84, 130
 - conectadas fijamente, 34-39
 - conectadas mediante rodillos, 34-37
 - conexiones en los soportes para, 34-37, 68
 - ecuaciones de equilibrio aplicadas a, 59-67
 - elementos no prismáticos, 531, 534-535
 - estructuras idealizadas, 33-39, 68
 - esfuerzos en los elementos y, 84
 - factor de rigidez (K), 489
 - fuerza de compresión (C) aplicada a, 84, 130
 - fuerza de tensión (T) aplicada a, 84, 130
 - método de las, 94-97, 123, 131
 - momentos de extremo fijo (FEM) y, 531, 534-535
 - reacciones de fuerza (F), 36-37
 - traslación relativa de las juntas, 531, 534-535
 - Juntas conectadas con rodillos, 34-37, 120-121, 216-217
- L**
- Largueros, cargas del puente y, 82
 - Ley de Betti, 403
 - Línea de acción, 94
 - Líneas de influencia, 204-261, 435-445, 449
 - armaduras, 232-235, 261
 - cargas uniformemente distribuidas y, 213-214, 260
 - cargas vivas y, 204-261
 - construcción de, 205-212
 - cualitativas, 216-223, 438-445
 - cuantitativas, 438
 - deflexión y, 205, 216-223, 260
 - diagramas de fuerza cortante y de momento en
 - comparación con, 205-206
 - diseño de edificios y, 228-231, 261
 - diseño de puentes y, 240-254, 261
 - dispositivos de deslizamiento para, 436
 - ecuaciones, 206-212
 - envolvente de valores máximos, 251
 - estructuras estáticamente determinadas, 204-261
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 435-445, 449
 - fuerza cortante (V) y, 216-220, 240-243, 250-254, 261, 436
 - fuerza cortante (V) y momento (M) máximos absolutos, 250-254, 261
 - fuerzas concentradas (cargas) y, 213-214, 240-254, 260-261
 - marcos, 215, 439-445
 - máxima en un punto, 240-249
 - momentos (M) y, 216-219, 221-223, 244-245, 250-254, 261, 437
 - pasador o bisagra para, 437
 - posiciones de la carga unitaria para, 206-212, 260-261
 - principio de Müller-Breslau para, 216-223, 260
 - procedimientos de análisis para, 206, 438
 - reacciones curvas para, 435-436, 449
 - serie de cargas concentradas, 240-249, 261
 - teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos para, 435-437
 - trabes de piso, 228-231, 261
 - vigas, 213-231, 240-254, 260-261, 435-438
 - Losas, cargas tributarias y, 40-43, 68
- M**
- Magnitud, 94-95
 - Marcos, 8, 31, 163-167, 270-274, 282-293, 296-297, 364-386, 393, 411-415, 439-445, 452-453, 459, 469-481, 495, 508-517, 594-611
 - análisis aproximado de, 270-274, 282-293, 296-297
 - articulados, 273, 297
 - bisagras, 282-283, 289, 297
 - carga axial (N), 375
 - cargas verticales, 270-272, 296
 - de construcción, 270-272, 282-293, 296-297
 - de varios niveles, 510-511
 - deflexiones y, 270-274, 282-283, 297, 364-386, 393
 - desplazamiento lateral de, 474-481, 510-517
 - desplazamiento rotacional de, 364-386, 393
 - diagramas de fuerza cortante y de momento para, 163-167
 - distribución de momentos, 495, 508-517
 - ecuaciones de pendiente-desplazamiento, 459, 469-481
 - efectos de la temperatura (T) sobre, 376-377
 - energía de deformación y, 375-380
 - fijamente apoyados, 274, 282-283, 289, 297
 - grados de libertad, 452-453, 459
 - líneas de influencia y, 439-445
 - matrices de rigidez, 595-596, 599-600
 - matrices de transformación para, 597-598
 - matriz de rigidez (del elemento) global (k), 599
 - matriz de rigidez de la estructura (K), 600
 - matriz de rigidez del elemento (k), 595-596, 599
 - matriz de rigidez simétrica (del elemento), 599
 - matriz de transformación de la fuerza (Q), 598
 - matriz de transformación del desplazamiento (T), 597
 - método de análisis de la fuerza, 411-415, 439-445

- método de análisis de la rigidez, 594-611
- método de análisis del desplazamiento, 452-453, 459, 469-481, 495, 508-517
- método del portal para, 282-287, 297
- método del voladizo para, 288-293, 297
- portales, 273-274, 297
- procedimiento, 600-601
- procedimientos de análisis para, 366, 382, 459, 495
- puntos de inflexión, 274-275, 282, 297
- relación carga-desplazamiento para, 595-596
- sin desplazamiento lateral del, 469-473, 508-509
- soportes parcialmente fijos, 274, 297
- teorema de Castigliano para, 381-386, 393
- trabajo virtual, método del, 364-380, 393
- uso estructural de, 8, 31
- Matrices, 428-429, 540-551, 570-571, 577-579, 597-599, 612-624
 - adición y sustracción de, 614
 - columna, 613
 - cuadradas, 613
 - de flexibilidad, 428-429
 - de rigidez, 540-543, 546-551, 570-571, 577-579, 599
 - de transformación, 543-545, 570, 597-598
 - de transformación de la fuerza (\mathbf{Q}), 545, 564-569, 598
 - de transformación del desplazamiento (\mathbf{T}), 544, 597
 - determinantes para, 618-620
 - diagonal, 613
 - elementos de, 612
 - escalares y, 614
 - fila, 612
 - identidad, 613
 - igualdad de, 614
 - inversa de, 620-622
 - método de Gauss para soluciones simultáneas, 623
 - multiplicación de, 614-616
 - orden de las, 612
 - partición de, 617-618
 - relaciones de carga-desplazamiento y, 542-543, 577-578, 595-596
 - simétricas, 578, 599, 613
 - transpuestas, 616-617
 - unitarias, 613
 - usando el álgebra, 612-624
- Matrices de rigidez, 540-543, 546-551, 570-571, 577-579, 599
 - armaduras, 540-543, 546-551
 - de la estructura (\mathbf{K}), 540, 547-551, 579, 600
 - del elemento (\mathbf{k}), 541-543, 546-551, 577-578, 595-596, 599
 - globales (de los elementos), 546-547, 599
 - indeterminación cinemática, 541, 576-577
 - marcos, 595-596, 599-600
 - relaciones carga-desplazamiento y, 542-543, 577-578, 595-596
 - simétricas, 578, 581
 - vigas, 576-579
- Matrices de transformación, 543-545, 570, 597-598
 - armaduras, 543-545, 570
 - de la fuerza (\mathbf{Q}), 545, 564-569, 598
 - del desplazamiento (\mathbf{T}), 544, 597
 - marcos, 597-598
- Matriz
 - columna, 613
 - cuadrada, 613
 - de flexibilidad, 428-429
 - de rigidez de la estructura (\mathbf{K}), 540, 547-551, 579, 600
 - diagonal, 613
 - fila, 612
 - identidad, 613
 - transpuesta, 616-617
 - unitaria, 613
- Matriz de rigidez del elemento (\mathbf{k}), 541-543, 546-551, 577-578, 595-596, 599
 - armaduras, 541-543, 546-551
 - marcos planos, 595-596, 599
 - vigas, 577-578
- Matriz de transformación
 - de la fuerza (\mathbf{Q}), 545, 564-569, 598
 - del desplazamiento (\mathbf{T}), 544, 597
- Maxwell, teorema de la reciprocidad, 402-403, 448
- Método
 - de análisis del portal, 282-287, 297
 - de Gauss para soluciones simultáneas, 623
 - de la doble integración, 307-313, 338
 - de los nudos, 94-97, 123, 131
 - del voladizo, análisis de carga lateral, 288-293, 297
- Método de análisis de la fuerza, 394-449
 - armaduras, 422-425
 - cargas antisimétricas, 430
 - comparación de la determinación, 396-397
 - compatibilidad y, 48, 397-407
 - desplazamientos y, 397-398, 428
 - equilibrio y, 397-401
 - estructuras compuestas, 425-427
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 394-449
 - estructuras simétricas, 429-430, 449

- Ley de Betti, 403
- líneas de influencia para, 435-445, 449
- marcos, 411-415, 439-445
- matriz de flexibilidad, 428-429
- principio de superposición para, 400-401
- procedimientos para el análisis de, 401, 438
- teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos, 402-403, 448
- vigas, 403-410, 435-438
- Método de análisis de la rigidez, 538-573, 574-593, 594-611
 - análisis matricial, 539, 565
 - aplicaciones del, 552-559, 579-591, 600-608
 - armaduras y, 538-573
 - armaduras espaciales, 570-571
 - coordenadas del elemento (locales), 540, 576
 - coordenadas globales (de la estructura), 540, 576
 - coordenadas nodales, 560-563
 - ecuación de rigidez de la estructura, 552
 - efectos térmicos (de la temperatura) y, 564-565, 568-569
 - errores de fabricación y, 564-567
 - identificación de elementos y nodos de, 540, 575
 - indeterminación cinemática, 541, 576-577
 - marcos planos, 594-611
 - matrices de rigidez, 540, 542-543, 546-559, 570-571, 576-579, 595-596, 599-600
 - matrices de transformación para, 543-545, 570, 597-598
 - matriz de rigidez (del elemento) global (\mathbf{k}), 546-547, 599
 - matriz de rigidez de la estructura (\mathbf{K}), 540, 547-551, 579, 600
 - matriz de rigidez del elemento (\mathbf{k}), 541-543, 546-551, 577-578, 595-596, 599
 - matriz de rigidez simétrica (del elemento), 578, 599
 - matriz de transformación de la fuerza (\mathbf{Q}), 545, 564-569, 598
 - matriz de transformación del desplazamiento (\mathbf{T}), 544, 597
 - nodos, 540, 575
 - procedimientos de análisis usando el, 553, 581, 600-601
 - sistemas de coordenadas, 540, 543-545, 560-563, 576
 - vigas, 574-593
- Método de análisis de la viga conjugada, 326-333, 339, 454-457
 - deflexiones, 326-333, 339
 - desplazamiento angular (θ), 454-455
 - desplazamiento lineal (Δ), 455
 - desplazamiento y momentos cero, 327, 454
 - ecuaciones de pendiente-deflexión usando, 454-457
 - momentos de extremo fijo (FEM), 456-457
 - procedimiento de análisis mediante el, 328
 - soportes para, 326-327
- Método de análisis del desplazamiento, 397, 450-485, 486-521, 522-537
 - convención de signos para, 453, 459, 488
 - desplazamiento lateral y, 469-481, 485, 508-517
 - distribución de momentos para, 486-521, 528-533
 - ecuaciones de pendiente-deflexión para, 450-485, 534-535
 - elementos no prismáticos, 522-537
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 450-485, 486-521, 522-537
 - extremos fijamente apoyados, 458, 485, 528
 - factor de distribución (DF), 489, 491
 - factor de traslado (COF), 490, 524-525
 - factores de rigidez, 457-458, 488-490, 500-505, 524-525
 - grados de libertad, 452-453, 452-453, 459, 485
 - marcos, 452-453, 459, 469-481, 495, 508-517
 - momentos de extremo fijo (FEM), 456-458, 485, 491-495, 524-525, 531, 534-535
 - procedimientos para el, 451-453, 459, 487-490, 495
 - traslación relativa de las juntas, 531, 534-535
 - vigas, 452-453, 459-466, 491-505, 529-533
- Método de las secciones, 104-109, 123, 131, 133
 - armaduras, 104-109, 123, 131, 133
 - armaduras espaciales, 123
 - cargas internas, 47, 133-138, 178
 - elementos estructurales, 133-138, 178
 - procedimientos de análisis mediante el, 106, 123, 135
- Método del trabajo mínimo, *vea* Teorema de Castigliano
- Métodos de análisis aproximados, 262-297
 - armaduras, 264-267, 273-277, 296-297
 - cargas laterales, 282-293, 297
 - cargas verticales, 270-272, 296
 - estructuras estáticamente indeterminadas, 262-297
 - marcos de construcción, 270-272, 282-293, 296
 - marcos para portales, 273-274, 282-287, 297
 - método del portal para, 282-287, 297
 - método del voladizo para, 288-293, 297
 - supuestos de los, 264, 270-271, 283, 289
- Momento de par (M'), 381-382, 384
- Momentos (\mathbf{M}), 4-5, 133-138, 178, 216-219, 221-223, 244-245, 250-254, 260-261, 326-328, 343-344, 381-386, 437, 456-458, 485
 - aplicados, 4-5
 - cargas concentradas y, 244-245, 250-254, 261

cargas internas y, 133-138, 178, 381-386
 cargas vivas y, 216-219, 221-223, 244-245, 250-254, 260-261
 cero, 327
 de extremo fijo (FEM), 456-458, 485
 de par (M'), 381-382
 deflexión y, 326-328, 343-344, 381-386
 ecuaciones de pendiente-deflexión, 456-458, 485
 energía de deformación (U_d) de los, 344
 envolvente de los valores máximos de la línea de influencia, 251
 flexionantes (M), 133-138, 178, 344
 líneas de influencia y, 216-219, 221-223, 244-245, 250-254, 260-261, 437
 máximos absolutos, 250-254, 261
 método de la viga conjugada y, 326-328
 principio de Müller-Breslau para, 216-219, 260
 serie de cargas concentradas, 244-245, 261
 teorema de Castigliano y, 381-386
 trabajo externo (U_e) de, 343, 392
 vigas en voladizo, 250, 261
 vigas simplemente apoyadas, 250-251, 261
 Momentos de extremo fijo (FEM), 456-458, 485, 491-495, 524-525, 531, 534-535
 distribución de momentos de, 488, 491-495, 531
 ecuaciones de pendiente-deflexión y, 456-458, 485, 534-535
 elementos no prismáticos, 524-525, 534-535
 traslación relativa de las juntas y, 531, 534-535
 Momentos flexionantes (M), 133-138, 178, 303, 305-313, 338, 344
 cargas internas y, 133-138, 178
 deflexión por, 303, 305-313, 338, 344
 energía de deformación (U_d) y, 344
 fuerza (M), 133-138, 178
 método de la doble integración y, 307-313, 338
 teoría de la viga elástica para, 305-306, 338
 Müller-Breslau, principio de, 216-223, 260

N

Nodos, 452-453, 459, 540, 575

P

Partición de matrices, 617-618
 Pendientes, deflexión y, 300-301, 307-308, 316
 Pisos, 38-45, 68, 82, 228-231, 261
 cargas tributarias, 40-43, 68
 estructuras idealizadas, 38-45

líneas de influencia para, 228-231, 261
 losa de dos sentidos (sistema), 42-43, 68
 losa de un solo sentido (sistema), 40-41, 68
 planos de estructura, 38-39
 puentes armados, 82
 puntos de panel, 228-229
 trabes, 38, 228-231, 261
 vigas, 82
 viguetas, 38-39

Planos de estructuras, 38-39

Por inspección, 53, 95

Portales, 82, 273-277, 282-287, 297
 análisis de carga lateral, 282-287, 297
 armaduras, 82, 275-277, 297
 articulados, 273, 275, 297
 deflexión de, 270-277, 296-297
 estabilidad de, 82
 fijamente apoyados, 274, 275, 297
 marcos, 273-274, 282-287, 297
 parcialmente fijos, 274

Portland Cement Association, 525-527

Pratt, armadura, 80-83

Presión del viento de diseño, 18-22

Principio

de conservación de la energía, 341, 392
 de Müller-Breslau, 216-223, 260
 del trabajo virtual, 346-348, 392
 del trabajo y la energía, 345

Puentes, 15-16, 82-83, 232-235, 240-254, 261. *Vea también*

Marcos de portal, armaduras
 armaduras, 82-83, 232-235, 261
 cargas concentradas, serie de, 240-254, 261
 cargas vivas y, 15-16, 232-235, 240-254, 261
 carreteros, 15
 cubierta, 82
 factor de carga del impacto (I), 16
 ferroviarios, 15
 fuerza cortante (V) y, 240-243, 250-254, 261
 fuerza cortante (V) y momento (M) máximos absolutos, 250-254, 261
 largueros, 82
 líneas de influencia para, 232-235, 240-254, 261
 momentos (M) y, 244-245, 250-254, 261
 portales, 82
 refuerzo contraladeo, 82
 vigas de piso, 82

Puntos

de inflexión, 274-275, 282, 297, 301, 338
del panel, 228-229

R

Radio de curvatura (ρ), 305-306
Refuerzo cruzado, armaduras, 264-267
Refuerzos contraladeo, estabilidad de la armadura, 82
Relaciones de carga-desplazamiento, 542-543, 577-578, 595-596
Respuesta material lineal elástica, 355-356, 375-376
Rigidez a la flexión (EI), 305-306
Rotación (ψ), claros finales articulados, 457
Rotación del claro (γ), 457

S

Secciones, método de análisis de las, 104-109, 131
Sistemas de coordenadas, 540, 543-545, 560-563, 570, 576, 597-598, 625-626
armaduras, 540, 543-545, 570
del elemento (locales), 540, 576, 626
globales (de la estructura), 540, 576, 625
matrices de transformación para, 543-545, 570, 597-598
nodal, 560-563
software para el análisis estructural y, 625-626
uso de, para el método de la rigidez, 540, 560-563, 576
Software para el análisis, procedimiento para el, 625-627
Soportes articulados, 34-37, 50, 59-61, 84, 130, 273, 275, 297, 437, 458, 485, 500, 528
análisis del desplazamiento y, 458, 485, 500, 528
armaduras, 84, 130, 275, 297
claros finales, 458, 485
conexiones de viga, 34-37, 50, 500, 528
conexiones de las juntas, 34-37, 50, 59-61, 84, 130
determinación de, 50
distribución de momentos, 500, 528
ecuaciones de equilibrio para, 59-60
ecuaciones de pendiente-deflexión, 458, 845
elementos no prismáticos, 528
estructuras estáticamente determinadas, 50, 59-61
estructuras estáticamente indeterminadas, 273, 275, 297, 437, 458, 485, 500, 528
estructuras idealizadas, 34-37
factores de rigidez, 458, 500
líneas de influencia y, 437
marcos, 273, 297

portales, 273, 275, 297

reacciones de fuerza (\mathbf{F}), 36-37

Soportes fijos, 34-39, 274-275, 282-283, 289, 297

armaduras, 275, 297

cargas laterales, 282-283, 289, 297

conexiones de juntas, 34-39

marcos, 274, 282-283, 289, 297

portales, 274-275, 297

Superposición, 46, 69, 168-172, 400-401

diagramas de momento contruidos por el método de, 168-172

método de análisis de la fuerza mediante, 400-401

principio de la, 46, 69, 400-401

vigas, 168-172

T

Techos, 23-24, 40-45

cargas de nieve, 23-24

cargas tributarias, 40-43

estructuras idealizadas, 40-45

Temperatura (T), 349, 376-377, 564-565, 568-569

desplazamiento rotacional (deflexiones) y, 349, 376-377

efectos en las armaduras, 349, 376-377, 564-565, 568-569

matriz de transformación de la fuerza (\mathbf{Q}) para la, 564-565

método de análisis para la rigidez, 564-565, 568-569

Teorema de Castigliano, 355-360, 381-386, 393

armaduras, 356-360, 390

deflexión (desplazamiento de rotación) y, 355-360, 381-386, 393

energía de deformación (U) y, 355-356, 392

fuerza externa (P) para, 355-362, 381-383

fuerzas internas (M) para, 356-362

marcos, 381-386, 393

momento de par (M') para, 381-382, 384

momentos internos (M) para, 381-386

procedimientos de análisis mediante usando el, 357, 382

trabajo externo y (U_e), 355, 392

vigas, 381-386, 393

Teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos, 402-403, 435-437, 448

Teoremas de momento-área, 316-325, 339

Teoría de la viga elástica, 305-306

Tirantes, 4, 31

Trabajo, 341-393

deflexión (desplazamiento de rotación) y, 341-393

energía de deformación (U_i) y, 341, 344, 355-356, 375-380, 392

- externo (U_e), 341-344, 355, 392
 - fuerza (F) y, 342-343
 - momento (M) de, 343
 - principio de conservación de la energía, 341, 392
 - principio de la energía y el, 345
 - teorema de Castigliano para el, 355-360, 381-386, 393
 - virtual, 346-354, 364-374, 392
 - virtual, principio del, 346-348
 - Trabajo externo (U_e), 341-344, 392
 - Trabajo virtual, 346-354, 364-380, 392-393
 - cambios de temperatura y, 376-377
 - deflexión (desplazamiento de rotación) y, 346-354, 364-374, 392
 - desplazamientos de la armadura y, 348-354, 392
 - energía de deformación y, 375-380
 - errores de fabricación y, 349, 392
 - externo, 348, 364, 392
 - fuerza axial (N) y, 375
 - fuerza cortante (V) y, 375
 - integración para, 364-365
 - interno, 364-365
 - marcos, 364-380, 393
 - principio del, 346-348, 392
 - procedimientos de análisis usando, 350, 366
 - temperatura (T) y, 349, 392
 - torsión (T) y, 375
 - vigas, 364-380, 393
 - Trabes, 4-5, 38, 228-231, 261
 - estructuras idealizadas, 38
 - líneas de influencia para, 228-231, 261
 - placas, 4-5
 - uso estructural de, 4-5
 - Traslación relativa de las juntas, 531, 534-535
- V**
- Vigas, 4-5, 31, 34-39, 50, 132-159, 168-172, 178-179, 213-231, 240-254, 260-261, 298-339, 364-386, 393, 403-410, 435-438, 452-453, 459-466, 491-505, 528-533, 574-593
 - almas, 4
 - análisis de, utilizando el método de rigidez, 575
 - articuladas en los extremos, 34-37, 50, 500, 528
 - bridas, 4
 - carga antisimétrica, 502, 530
 - cargas axiales (N), 375
 - cargas cortantes (V), 375
 - cargas distribuidas y, 150-151, 213-214, 260
 - cargas internas en, 132-159, 168-172, 178-179
 - cargas simétricas, 501, 503
 - cargas uniformemente distribuidas y, 213-214, 260
 - concreto, 5
 - deflexión y, 205, 216-223, 260, 298-339, 364-386, 393
 - desplazamiento rotacional de, 364-386, 393
 - diagramas de fuerza cortante y de momento para, 150-159, 178-179
 - diagramas de momento para, 168-172
 - distribución de momentos, 491-505, 528-533
 - ecuaciones de pendiente-desplazamiento, 459-466
 - efectos de la temperatura (T) sobre, 376-377
 - en voladizo, 169, 250, 261
 - energía de deformación y, 375-380
 - estáticamente indeterminadas, 403-410, 435-438, 452-453, 459-466, 491-505, 528-533
 - estructuras idealizadas, 38-39
 - factor de rigidez (K), 488, 500-505
 - flexión interna (M), 303, 305-308
 - flexión, 303, 305-313, 338
 - fuerzas concentradas (cargas) y, 213-214, 240-254, 260-261
 - funciones de fuerza cortante y de momento en, 139-143, 179
 - grados de libertad, 452-453, 459
 - identificación de elementos y nodos para, 575
 - indeterminación cinemática y, 576-577
 - laminadas, 5
 - largueros, 4-5, 38, 228-231, 261
 - líneas de influencia para, 213-231, 240-254, 260-261, 435-438
 - matrices de rigidez, 576-579
 - matriz de rigidez de la estructura (K), 579
 - matriz de rigidez del elemento (k), 577-578
 - método de análisis de la fuerza, 403-410, 435-438
 - método de análisis de la rigidez, 574-593
 - método de análisis del desplazamiento, 459-466, 491-505, 528-533
 - método de la doble integración para, 307-313, 338
 - método de la viga conjugada para, 326-333, 339
 - momentos de extremo fijo (FEM), 491-495
 - no prismáticas, 528-533
 - principio de Müller-Breslau para, 216-223, 260
 - procedimientos para el análisis de, 134, 140, 153, 308, 318, 328, 366, 382, 459, 495, 581
 - puntos específicos, fuerzas en, 133-138, 178
 - relaciones carga-desplazamiento, 577-578
 - simétricas, 501-503, 529-530

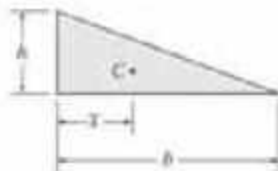
simétricas, matriz de rigidez (del elemento), 578
simplemente apoyadas, 250-253, 261
teorema de Castigliano para, 381-386, 393
teoremas de momento-área para, 316-325, 339
trabajo virtual, método del, 364-380, 393
traslación relativa de la junta, 531

uso estructural de, 4-5, 31
viguetas de piso, 38-39
y marcos con elementos no prismáticos, 523-537

W

Warren, armadura, 80-83

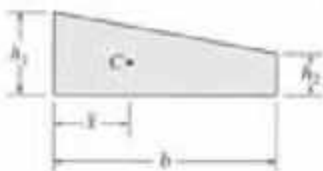
Propiedades geométricas de las áreas



Triángulo

$$A = \frac{1}{2}bh$$

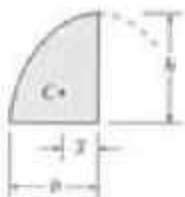
$$\bar{x} = \frac{1}{3}b$$



Trapezoide

$$A = \frac{1}{2}b(h_1 + h_2)$$

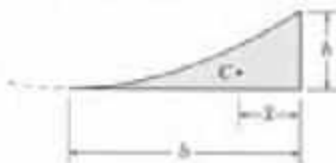
$$\bar{x} = \frac{b(2h_2 + h_1)}{3(h_1 + h_2)}$$



Media parábola

$$A = \frac{2}{3}bh$$

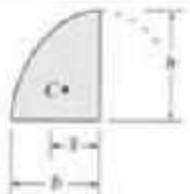
$$\bar{x} = \frac{3}{8}b$$



Enjuta parabólica

$$A = \frac{1}{3}bh$$

$$\bar{x} = \frac{1}{4}b$$



Medio segmento de una curva de n-ésimo grado

$$A = bh \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$\bar{x} = \frac{b(n+1)}{2(n+2)}$$



Enjuta de una curva de n-ésimo grado

$$A = bh \left(\frac{1}{n+1} \right)$$

$$\bar{x} = \frac{b}{(n+2)}$$

Momentos de extremo fijo

$$(FEM)_{AB} = \frac{PL}{8} \quad (FEM)_{BA} = \frac{PL}{8}$$

$$(FEM)_{AB}' = -\frac{3PL}{16}$$

$$(FEM)_{AB} = \frac{Pb^2a}{L^2} \quad (FEM)_{BA} = \frac{Pa^2b}{L^2}$$

$$(FEM)_{AB}' = -\left(\frac{P}{L^2}\right)\left(b^2a + \frac{a^3}{2}\right)$$

$$(FEM)_{AB} = \frac{2PL}{9} \quad (FEM)_{BA} = \frac{2PL}{9}$$

$$(FEM)_{AB}' = -\frac{PL}{3}$$

$$(FEM)_{AB} = \frac{5PL}{16} \quad (FEM)_{BA} = \frac{5PL}{16}$$

$$(FEM)_{AB}' = \frac{45PL}{96}$$

$$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{12} \quad (FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{12}$$

$$(FEM)_{AB}' = -\frac{wL^2}{8}$$

$$(FEM)_{AB} = \frac{11wL^2}{192} \quad (FEM)_{BA} = \frac{5wL^2}{192}$$

$$(FEM)_{AB}' = \frac{9wL^2}{128}$$

$$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{20} \quad (FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{30}$$

$$(FEM)_{AB}' = \frac{wL^2}{15}$$

$$(FEM)_{AB} = \frac{5wL^2}{96} \quad (FEM)_{BA} = \frac{5wL^2}{96}$$

$$(FEM)_{AB}' = \frac{5wL^2}{64}$$

$$(FEM)_{AB} = \frac{6E\Delta}{L^2} \quad (FEM)_{BA} = \frac{6E\Delta}{L^2}$$

$$(FEM)_{AB}' = \frac{3E\Delta}{L^2}$$

ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Este libro ofrece una presentación clara y completa de la teoría y la aplicación del análisis estructural en armaduras, vigas y marcos con énfasis en el desarrollo de la habilidad de los estudiantes para modelar y analizar estructuras; asimismo el contenido incluye aplicaciones reales, similares a las que se encuentran en la práctica profesional.

El texto se revisó cuidadosamente para que los conceptos fueran claros, concisos y estuvieran totalmente actualizados. Esto incluye la incorporación de las nuevas normas sobre cargas ASCE/SEI 07-10, y una explicación mejorada de cómo trazar diagramas de cortante, diagramas de momento y la curva de deflexión de una estructura.

Novedades en esta edición

- **Problemas fundamentales.** Estos problemas son aplicaciones sencillas de los conceptos vistos en el texto, y que ofrecen la oportunidad de resolver dificultades antes de tratar de solucionar los problemas típicos.
- **Cambios en los ejemplos.** Se han cambiado numerosos ejemplos, y con ayuda de fotografías se explican las técnicas de modelado y el análisis de cargas sobre estructuras reales.
- **Fotografías adicionales.** La importancia de conocer el objeto de estudio se refleja en aplicaciones al mundo real, las cuales se muestran a través de una gran cantidad de fotografías nuevas y actualizadas, junto con sus comentarios.
- **Problemas nuevos.** Aproximadamente 70% de los problemas son nuevos, y se han distribuido a lo largo del texto en secciones bien definidas con orden de dificultad creciente.

Para mayor información visite la página Web del libro en:

www.pearsonenespañol.com/hibbeler

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com

